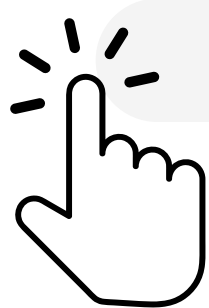


تم تحميل ورفع المادة على منصة



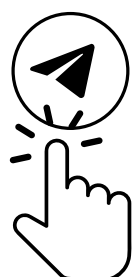
للعودة الى الموقع اكتب في بحث جوجل



المعلم التعليمي



ALMUALM.COM



انضم الى قناة المنهج السوداني على التليجرام

T.ME/ALMANHJ_S

جمهورية السودان

وزارة التعليم والتربية الوطنية
المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
بخت الرضا



المرحلة الثانوية

الرياضيات

الصف الثاني

إعداد لجنة بتكليف من المركز القومي للمناهج والبحث التربوي من الأساتذة:

- د. الخطيب الطيب سيداحمد حمدتوده - المناهج بخت الرضا
- أ. د. عبد الرضي عبدالرحمن عبدالقادر - جامعة أم درمان الإسلامية
- د. عادل أحمد حسن كبة - جامعة وادي النيل
- د. محمد حمد النيل محمد - جامعة القرآن الكريم والعلوم الإسلامية
- د. عبد المنعم محمود عبده عز الدين - خبير تربوي

الإشراف العام :

د. معاوية السر علي قشي- المدير العام
أ . حبيب آدم حبيب - نائب المدير العام
أ. الباقر رحمة البشير - الأمين العام
أ. أحمد حمد النيل حسب الله - مدير إدارة المناهج

التصميم والخراج الفني:

د. الرفاعي عبدالله عبدالمهيل مرحوم
المناهج بخت الرضا

الجمع بالحاسوب:

أعضاء لجنة التأليف

حقوق التأليف محفوظة للمركز القومي للمناهج والبحث التربوي بخت
الرضا، وحقوق الطبع والنشر محفوظة لوزارة التعليم والتربية الوطنية
ولايجوز لأي جهة نقل جزء من هذا الكتاب أو إعادة طبعه
أو التصرف في محتواه دون إذن كتابي

الطبعة الأولى

٢٠٢٦م

المحتويات

الوحدة	الموضوع	رقم الصفحة
	مقدمة	٤
الأولى	الدوال الأسية واللوغاريتمية	(٣٩ - ٥)
الثانية	الهندسة التحليلية (الإحداثية)	(٦٤ - ٤٠)
الثالثة	المتباينات والبرمجة الخطية	(٩٢ - ٦٥)
الرابعة	الإحصاء	(١٢٣ - ٩٣)
الخامسة	حساب المثلثات	(١٥٥ - ١٢٤)
السادسة	التحويلات الهندسية	(١٨١ - ١٥٦)
السابعة	الأعداد المركبة	(٢٠٤ - ١٨٢)
الثامنة	المتتاليات	(٢٣٩ - ٢٠٥)

المقدمة

الحمد لله ربّ العالمين، والصلاة والسلام على سيدنا محمد، وعلى آله وصحبه أجمعين، أما بعد:

يسرّنا أن نقدّم لأبنائنا الطلاب وبناتنا الطالبات كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي، المُعدّ وفقاً لمنهج المرحلة الثانوية في ضوء خطط تطوير المناهج، ومواكبةً للتطوّر الكبير الذي شهده محتوى الرياضيات وأساليب عرضها؛ لذلك حرصنا على أن يكون هذا الكتاب معاصراً في أسلوبه، ومحتواه، وطرائق تقديمه.

وقد استهلّت كل وحدة بسؤال يوضّح أهمية دراستها، كما تضمّنت درساً تمهيدياً يعرض المعارف السابقة التي يحتاج إليها الطالب لبناء المفاهيم الجديدة، واختُتمت بدرس يبرز المعارف والمهارات التي اكتسبها الطالب من خلال دراسة الوحدة. وقُدّمت مادة الكتاب في صورة دروس، يضمّ كل منها فكرة رئيسة مدعومة بالأمثلة والتدريبات المناسبة، إضافةً إلى تدريبات للواجب المنزلي، مع الحرص على تحقيق التوازن بين المفاهيم والمهارات الرياضية.

كما رُبّطت أغلب المفاهيم الرياضية بمواقف حياتية بصورة مباشرة أو غير مباشرة، من خلال ارتباطها بالعلوم الأخرى؛ تأكيداً لدور الرياضيات في فهم الواقع وتطبيقاته المتنوعة. ونسأل الله تعالى أن نكون قد وُفّقنا في تقديم هذا العمل بالصورة المرجوة، ونرحّب بكل نقدٍ بناءٍ ومقترحٍ هادفٍ من الطلاب وأولياء الأمور والمعلمين؛ بما يسهم في إثراء هذا الكتاب وتطويره.

والله الموفق

لجنة التأليف

الوحدة الأولى

الدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

أهداف الوحدة:

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن:

١. يُعرِّف الأسس الكسرية ويعبر عنها بالصورة الجذرية.
٢. يُجري العمليات على الأسس الكسرية.
٣. يُجري العمليات على الجذور.
٤. يتعرّف على الدالة الأسية ويمثلها بيانياً.
٥. يتعرّف على خواص الدالة الأسية.
٦. يحل المعادلات الأسية.
٧. يُعرِّف الدالة اللوغاريتمية ويمثلها بيانياً.
٨. يستنتج خواص الدالة اللوغاريتمية.
٩. يُميز بين الدالة الأسية واللوغاريتمية.
١٠. يتعرّف على قوانين اللوغاريتمات.
١١. يبسط المقادير اللوغاريتمية.
١٢. يحل المعادلات اللوغاريتمية.
١٣. يستخدم الآلة الحاسبة في حساب اللوغاريتمات.
١٤. يطبق مفاهيم الأسس واللوغاريتمات في تفسير وحل مشكلات حياتية واقعية.

لماذا ندرس الدوال الأسية واللوغاريتمية؟

لأنها تمثّل نماذج رياضية أساسية لظواهر حقيقية لا يمكن تمثيلها بالدوال الخطية أو التربيعية، ولها أهمية علمية وتطبيقية واسعة في مجالات متعددة مثل قياس شدة الزلازل (مقياس ريختر) في الجيولوجيا، قياس النمو الاقتصادي في مجال الاقتصاد، وفي انتشار الأوبئة في الحياة، وقياس الحموضة (PH) في الكيمياء.

Previously Acquired Knowledge : (١-١) المعارف السابقة المكتسبة :

من دراستنا سابقاً تعرّفنا علی :

١. إذا كان a عدداً حقيقياً ، m ، n عددان صحيحان فإن:
- أ. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ب. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ج. $(a^m)^n = a^{m \times n}$
٢. إذا كان a ، b عددان حقيقيان ، n عدد صحيح فإن $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
٣. الأس الصفري: إذا كان a عدداً حقيقياً ، $a \neq 0$ صفر فإن $a^0 = 1$
٤. الأس السالبة: إذا كان a عدداً حقيقياً ، $a \neq 0$ صفر ، n عدد صحيح فإن: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
٥. إذا كان a ، $b \neq 0$ صفر ، m عدد صحيح فإن: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
٦. إذا كان $a > 0$ حيث $a < 0$ ، $a \neq 0$ ، n عدداً حقيقياً فإن $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

مثال (۱): بسط

$$\begin{array}{l} \text{(أ)} \quad \frac{2 \text{ م}^{\circ} \times 3 \text{ م}^{\circ}}{\frac{1-}{\text{م}^{\circ}}} \quad \text{(ب)} \quad \frac{(3 \text{ م}^{\circ})^3}{\frac{\text{م}^{\circ} \text{ ص}^{\circ}}{3 \text{ م}^{\circ}}} \quad \text{(ج)} \quad \frac{3 \text{ م}^{\circ} \times 3 \text{ ص}^{\circ}}{\frac{0.7}{3- \text{م}^{\circ}}} \quad \text{(د)} \quad \frac{3 \text{ م}^{\circ} \times 3 \text{ م}^{\circ}}{\frac{1-}{\text{م}^{\circ}}} \quad \text{(هـ)} \quad \frac{(3 \text{ م}^{\circ})^3}{\frac{\text{م}^{\circ} \text{ ص}^{\circ}}{3 \text{ م}^{\circ}}} \quad \text{(و)} \quad \frac{3 \text{ م}^{\circ} \times 3 \text{ ص}^{\circ}}{\frac{0.7}{3- \text{م}^{\circ}}} \quad \text{(ز)} \quad \frac{3 \text{ م}^{\circ} \times 3 \text{ م}^{\circ}}{\frac{1-}{\text{م}^{\circ}}} \end{array}$$

الحل:

$$(أ) \quad 2 \text{ س } 5 \times 3 \text{ س } 7 = (2 \times 3) \text{ س } (5+7) = 6 \text{ س } 12$$

(ب) ${}^3({}^4s) = {}^{3 \times 4}s = {}^{12}s$

$${}^3(\text{ج س}) = {}^3\text{ص} \times {}^3\text{س}$$

$$s^0 = s^{1+1-} = s^{(1-)-1-} = \frac{s^{1-}}{s^{1-}} \quad (د)$$

$$(ه) \quad \text{س}^{\circ} \text{ص} = \frac{\text{س}^{\circ} (١)}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\text{س}^{\circ} \text{س}^{-٥}}{\text{س}^{\circ}} = \text{س}^{\circ} \text{س}^{\circ} \text{س}^{\circ}$$

$$^{\circ}(\mathfrak{M}) = {}^{\circ}\mathfrak{M} \circ \mathfrak{A} = {}^{\varepsilon-\mathfrak{q}}(\mathfrak{M}) \circ \mathfrak{A} = \frac{{}^{\mathfrak{q}}\mathfrak{M} \circ \mathfrak{A}}{\varepsilon} \quad (\text{ج}) \quad \mathfrak{r}_{\text{س}} = \frac{1}{\mathfrak{r}_{\text{س}}} = \frac{7}{\mathfrak{r}_{\text{س}}} \quad (\text{و})$$

مثال (٢): اكتب لـ $16 = 2^4$ في الصورة الأسية.

الحل: لو $2^x = 16 \Leftrightarrow 2^4 = 16$

تمرين (١-١)

١. جد قيمة كل مما يأتي: ٥ ، $(\frac{1}{3})^3$ ، $(-1)^4$ ، $٢^{-٥}$ ، ٨^{-1} ، $٧^٠$.
 ٢. بسّط كل مما يأتي:
 (أ) $س^٤ \times س^٥$ (ب) $س^٤ \times ص^٤$ (ج) $٣ س^{-١}$ (د) $٢ \div ٣^٥$
 ٣. أكتب كل مما يأتي في أبسط صورة
 (أ) $٢ س^٦ \times ٤ س^{-١}$ (ب) $\frac{٢ س^٢ ص^٢}{٣} \times \frac{٦ ص}{٤ س^٢}$
 (ج) $(٤ أ^٢ ت^٣) \times (٢ أ^{-١} ت^٢)$
 ٤. حوّل العلاقة الأسية $٢٥٦ = ٢^٨$ إلى الصورة اللوغاريتمية .
 ٥. حوّل العلاقة اللوغاريتمية $٢٤٣ = ٥$ إلى الصورة الأسية.
 ٦. إذا كان $٥,٦٣٦ = ٠,٧٥١$ جد:
 (أ) لو ٥٦٣٦ (ب) لو $٥٦,٣٦$ (ج) لو $٠,٥٦٣٦$
- خطأ شائع :**
 إذا كان لو $٥,٦٣٦ = ٠,٧٥١$ فإن لو $٠,٥٦٣٦ = -٢,٧٥١$ هذا خطأ والصحيح هو :
 لو $٠,٥٦٣٦ = ٠,٧٥١ - ٢ = -١,٢٤٩$

(٢-١) الأسس الكسرية والجذور: Fractional Powers and Radicals

تمثل الأسس الكسرية امتداداً طبيعياً لمفهوم الأسس الصحيحة وهي أسس تكتب على صورة كسر حيث يعبر بها عن الجذور والأسس معاً.

الأسس الكسرية:

- ما العدد الذي إذا رفع للقوة ٢ يعطي ١٦ ؟ الإجابة ٤ لأن $١٦ = ٤^٢$
- ما العدد الذي إذا رفع للقوة ٣ كان الناتج ٢٧ ؟ الإجابة ٣ لأن $٢٧ = ٣^٣$
- كيف يمكن التعبير عن الجذر بطريقة تشبه الأسس؟
إذا كان $ص = س^{\frac{١}{٢}}$ فإن $(ص)^٢ = (س^{\frac{١}{٢}})^٢ \Leftrightarrow ص^٢ = س$
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد أن: $ص = \sqrt[٢]{س}$ ونستنتج من ذلك أن $\sqrt[٢]{س} = س^{\frac{١}{٢}}$
مثلاً: $٤ = \sqrt[٢]{١٦} = ١٦^{\frac{١}{٢}} = (٢٤)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt[٢]{٢٤} = ٤$ وذلك لأن $١٦ = ٢^٤$
وبنفس الأسلوب يتبين أن $\sqrt[٣]{٢٨} = ٢٨^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{٢٨}$

تعريف

إذا كان $أ \in \mathbb{R} - \{٠\}$ ، $ن \in \mathbb{P}$ ، $١ < ن$ فإن كل عدد حقيقي $س$ يحقق المعادلة $س^{\frac{١}{ن}} = أ$ يسمى جذراً نونياً للعدد $أ$ ويرمز له بالرمز $\sqrt[ن]{أ}$ أو $أ^{\frac{١}{ن}}$ أي أن $س = \sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{١}{ن}}$

نستنتج من التعريف:

١. لكل $ن \in \mathbb{P}$ ، $١ < ن$ ، $أ = صفر$ ، $\sqrt[ن]{صفر} = صفر$.
٢. إذا كان $ن$ عدداً طبيعياً زوجياً وكان $أ$ عدداً حقيقياً موجباً وكان $س = أ$ فإن $س = \sqrt[ن]{أ} + \sqrt[ن]{أ}$ أو $س = \sqrt[ن]{أ} - \sqrt[ن]{أ}$
٣. إذا كان $ن$ عدداً طبيعياً زوجياً وكان $أ$ عدداً حقيقياً سالباً فإنه لا يوجد عدد يحقق المعادلة $س^{\frac{١}{ن}} = أ$ ، (لأن $س \in \mathbb{R}$ ، $س^{\frac{١}{ن}}$ موجبة)
٤. إذا كان $ن$ عدداً طبيعياً فردياً وكان $أ$ عدداً حقيقياً فإنه يوجد عدد حقيقي واحد يحقق المعادلة $س^{\frac{١}{ن}} = أ$ ، حيث $س = \sqrt[ن]{أ}$.

تعريف

$$\text{إذا كان } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \text{ فإن } \sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}} = \alpha^{\frac{1}{n}}$$

$$\binom{N}{1} \sqrt{p} = \binom{N}{\frac{1}{p}} = \frac{N}{p}$$

هل يمكن تعميم قوانين الأسس على الأسس الكسرية؟

$$١٦ = ٢٤ = \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢} ٤ = \frac{٣}{٢} ٤ \times \frac{١}{٢} ٤ \quad \text{نلاحظ:}$$

$$١٦ = ٨ \times ٢ = \sqrt[٣]{٤} \times \sqrt[٣]{٤} = \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢} \text{ وأيضاً}$$

نخلص إلى أنه يمكن تطبيق قوانين الأسس على الأسس الكسرية.

خطأ شائع: يعتقد البعض أن $\sqrt[4]{\pm 2}$ وهذا غير صحيح . فالقيمة الصحيحة للجذر

التربيعي للعدد ٤ هي ٢ ، لأن الجذر التربيعي يُعرّف بأنه القيمة الموجبة .

أما إذا كانت لدينا المعادلة $s^2 = \epsilon$ فإنّ حلولها هي $s = \pm \sqrt{\epsilon}$

قوانين الأسس الكسرية:

إذا كان $أ \in ج$ ، $أ \neq \text{صفر}$ ، $م$ ، $ن \in ج$ ، $م < ن$ فإن

1. $أ^م \times أ^ن = أ^{م+ن}$
2. $أ^م \div أ^ن = أ^{م-ن}$
3. $أ^ن = (أ^م)^{\frac{ن}{م}}$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = n^{-.4}$$

مثال (١): حول $7^{\frac{2}{5}}$ إلى الصورة الجذرية.

الحل: $\sqrt[49]{V^0} = \sqrt[2]{V^0} = \frac{1}{0} (V^0) = \frac{2}{0} V$

مثال (٢): حول $\sqrt[7]{5^2}$ إلى صورة أسية كسرية.

الحل: $\frac{2}{\sqrt{v}} \circ = \frac{1}{\sqrt{v}} (2 \circ) = \sqrt{2 \circ} \sqrt{v}$

مثال (٣): جد قيمة كل من:

$$\frac{1}{z} \left(\frac{16}{81} \right) \quad (د) \quad \frac{1}{z} (25) \quad (ج) \quad \frac{3}{5} (32-) \quad (ب) \quad \frac{1}{z} (81) \quad (ا)$$

الحل:

$$\mathfrak{r} = \sqrt{\mathfrak{r}} = \frac{\xi}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\xi} = \sqrt{\lambda \mu} = \sqrt{\lambda} \sqrt{\mu} = \sqrt{\lambda} (\mu)^{\frac{1}{2}}$$

$$3 = \frac{1}{\frac{1}{4} \times 4}(3) = \frac{1}{\frac{1}{4}}(\frac{1}{4} \times 3) = \frac{1}{\frac{1}{4}}(1) \quad \text{حل آخر:}$$

$$٨- = ٢(٢-) = \sqrt[١٥]{(٢-)} = \sqrt[٢]{(٢-)} = \sqrt[٢]{(٣٢-)} = \sqrt[٢]{(٣٢-)} = \sqrt[٢]{(٣٢-)} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{\sqrt[٢]{٢٥}} = \frac{1}{\sqrt[٢]{٢٥}} = \sqrt[٢]{(٢٥)} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{٣}{٢} = \left(\frac{٣}{٢} \right)^{\frac{1}{٤} \times ٤} = \left(\left(\frac{٣}{٢} \right)^4 \right)^{\frac{1}{٤}} = \left(\frac{٨١}{١٦} \right)^{\frac{1}{٤}} = \sqrt[٤]{\frac{٨١}{١٦}} = \sqrt[٤]{\frac{٨١}{١٦}} \quad (\text{د})$$

مثال (٤): اختصر:

$$\frac{\sqrt[٢]{٨}}{\sqrt[٢]{٤}} \quad (\text{ب}) \quad \frac{\sqrt[٢]{٢} - \sqrt[٢]{٢} + \sqrt[٢]{٢}}{\sqrt[٢]{٢} + \sqrt[٢]{٢} - \sqrt[٢]{٢}}$$

$$\frac{٢٤}{١٧} = \frac{(١-٤)^{٢٢}}{(١٦+١)} = \frac{(١-٢٢)^{\sqrt[٢]{٢}}}{(٤+١)^{\sqrt[٢]{٢}}} = \frac{\sqrt[٢]{٢} - \sqrt[٢]{٢} + \sqrt[٢]{٢}}{\sqrt[٢]{٢} + \sqrt[٢]{٢} - \sqrt[٢]{٢}} \quad (\text{أ})$$

$$١ = \frac{\sqrt[٢]{٢}}{\sqrt[٢]{٢}} = \frac{\sqrt[٢]{٢} \times \sqrt[٢]{٢}}{\sqrt[٢]{٢} \times \sqrt[٢]{٢}} = \frac{\sqrt[٢]{(٢٢)}}{\sqrt[٢]{(٢٢)}} = \frac{\sqrt[٢]{٨}}{\sqrt[٢]{٤}} \quad (\text{ب})$$

تمرين (٢-١)

١. احسب قيمة كل مما يأتي:

$$\sqrt[٢]{\left(\frac{٤}{٩} \right)} \quad (\text{هـ}) \quad \sqrt[٢]{\left(\frac{٨}{٢٧} \right)} \quad (\text{د}) \quad \sqrt[٢]{\left(\frac{١٦}{٨١} \right)} \quad (\text{ج}) \quad \sqrt[٢]{٨} \quad (\text{ب}) \quad \sqrt[٢]{٨١} \quad (\text{أ})$$

٢. أكتب بأس موجب $\sqrt[٢]{٢} \times \sqrt[٢]{٢}$

$$\sqrt[٢]{\left(\frac{١٦ \text{ ص } ٤}{٨١ \text{ ص } ١٢} \right)} \quad (\text{أ})$$

٣. اختصر

$$\sqrt[٢]{٤} \times \sqrt[٢]{٩} \quad (\text{هـ}) \quad \sqrt[٢]{٢٥٦} \quad (\text{د}) \quad \sqrt[٢]{\left(٢ \frac{٧}{٩} \right)} \quad (\text{ج}) \quad \sqrt[٢]{\left(\frac{١}{١٦} \right)} \quad (\text{ب}) \quad \sqrt[٢]{(٠,٠٠٨)} \quad (\text{أ})$$

٤. جد قيمة كل مما يأتي:

$$\sqrt[٢]{\left(\frac{٤ \text{ ص } ٤}{٩ \text{ ص } ٦} \right)} \quad (\text{د}) \quad \sqrt[٢]{(٢ \text{ ص } ٢)} \quad (\text{ب}) \quad \sqrt[٢]{(٢ \text{ ص } ٢)} \quad (\text{أ})$$

٥. اختصر كلاً مما يأتي:

٦. جد نصف العدد ٢ ١٠

٧. جد ثلث العدد ٣ ٧

بعض الجذور هي كميات لا يمكن إيجاد قيمتها بصورة مضبوطة مثل $\sqrt[3]{10}$ ، $\sqrt[5]{61}$ ، ...

ومثل هذه الجذور تسمى بالجذور الصماء وفيما يلي بعض الخواص لتسهيل عملية تبسيطها.

الخواص:

$$١. \sqrt[n]{ص} \times \sqrt[n]{ص} = \sqrt[n]{ص \times ص}، ص < ٠$$

$$\text{مثلاً: } \sqrt[5]{١٢} \times \sqrt[5]{٦} = \sqrt[5]{١٢ \times ٦} = \sqrt[5]{٧٢}$$

$$\sqrt[4]{١٥} \sqrt[4]{٣} \sqrt[4]{٥} = \sqrt[4]{١٥ \times ٣ \times ٥} = \sqrt[4]{٢٢٥}$$

$$٢. \sqrt[n]{\frac{ص}{ص}} = \frac{\sqrt[n]{ص}}{\sqrt[n]{ص}}، ص \neq ٠، \text{ مثلاً: } \sqrt[3]{\frac{٢١}{٣}} = \frac{\sqrt[3]{٢١}}{\sqrt[3]{٣}}$$

مثال (١):

رتب الجذور الآتية تصاعدياً: $\sqrt[3]{١٢}$ ، $\sqrt[5]{٥}$ ، $\sqrt[7]{١٤٧}$

الحل: $\sqrt[7]{١٤٧} = \sqrt[7]{٢١ \times ٧} = \sqrt[7]{٢١} \sqrt[7]{٧}$ ، $\sqrt[5]{٥} = \sqrt[5]{٥}$ ، $\sqrt[3]{١٢} = \sqrt[3]{٣ \times ٤} = \sqrt[3]{٣} \sqrt[3]{٤}$

الترتيب يكون $\sqrt[5]{٥}$ ، $\sqrt[3]{١٢}$ ، $\sqrt[7]{١٤٧}$

العددان المترافقان $\sqrt{أ} \pm \sqrt{ب}$

العامل المنسب هو الذي لو ضربت به الكمية غير النسبية لتحولت إلى كمية نسبية.

العامل المنسب للمقدار $٢\sqrt{٣}$ هو $\sqrt{٣}$ لأن $٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٢ \times ٣ = ٦$

العامل المنسب للمقدار $٣\sqrt[3]{٣}$ هو $\sqrt[3]{٣}$ لأن $٣\sqrt[3]{٣} \times \sqrt[3]{٣} = ٣ \times ٣ = ٩$

العامل المنسب للمقدار $٥\sqrt{٦} + ٦\sqrt{٥}$ هو مرافقه $٥\sqrt{٦} - ٦\sqrt{٥}$ ، $(٥\sqrt{٦} - ٦\sqrt{٥})(٥\sqrt{٦} + ٦\sqrt{٥}) = ١٩$

العامل المنسب للمقدار $٥\sqrt[3]{٢} - ٢\sqrt[3]{٣}$ هو مرافقه $٥\sqrt[3]{٢} + ٢\sqrt[3]{٣}$

$$(٥\sqrt[3]{٢} - ٢\sqrt[3]{٣})(٥\sqrt[3]{٢} + ٢\sqrt[3]{٣}) = ٢٠ - ١٨ = ٢$$

العامل المنسب للمقدار $١ - ٥\sqrt[3]{٣}$ هو $١ + ٥\sqrt[3]{٣}$

$$(١ - ٥\sqrt[3]{٣})(١ + ٥\sqrt[3]{٣}) = ١ - ١٢٥\sqrt[3]{٣} = ٤$$

مثال (٢):

بسّط بحيث يكون المقام كمية نسبية:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+2} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}}$$

الحل:

$$= \frac{1}{\sqrt{3}-2} \times \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1}{1-\sqrt{2}}$$

$$3 = \sqrt{3}-2 + \sqrt{2}-\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}-2}{3-4} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \frac{1+\sqrt{2}}{1-2}$$

مثال (٣): جد ناتج ما يلي:

(أ) $\sqrt{3} \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{4}$ (ب) $\sqrt{5} \times \sqrt{5} - \sqrt{6} \times \sqrt{5}$ (ج) $\sqrt{7} + \sqrt{2} \times 3 - \sqrt{2} \times 5$

الحل:

(أ) $\sqrt{3} \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{4} = \sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{4} = \sqrt{9} + \sqrt{12} = 3 + 2\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{5} \times \sqrt{5} - \sqrt{6} \times \sqrt{5} = \sqrt{25} - \sqrt{30} = 5 - \sqrt{30}$ (ج) $\sqrt{7} + \sqrt{2} \times 3 - \sqrt{2} \times 5 = \sqrt{7} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = \sqrt{7} - 2\sqrt{2}$

مثال (٤): أثبت أن $\sqrt{3} \times \sqrt{4} = \frac{1}{3} \sqrt{6} - \sqrt{12} + \sqrt{48}$

الحل:

الطرف الأيمن $\frac{1}{3} \sqrt{3} \times 2 - \sqrt{3} \times \sqrt{4} + \sqrt{3} \times \sqrt{16} = \frac{1}{3} \sqrt{6} - \sqrt{12} + \sqrt{48}$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{4} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{3} \times \sqrt{4} = \frac{1}{3} \times 9 \sqrt{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{3} \times \sqrt{4} = \frac{1}{3} \times 9 \sqrt{2} \times 2 - \sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{3} \times \sqrt{4}$$

مثال (٥): اختصر لأبسط صورة:

(أ) $\sqrt{48} \times \sqrt{27}$ (ب) $\sqrt{8} \times \sqrt{18}$ (ج) $\frac{\sqrt{12} - \sqrt{20}}{\sqrt{80} - \sqrt{48}}$

الحل:

(أ) $\sqrt{48} \times \sqrt{27} = \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{16} \times \sqrt{3} \times \sqrt{9} = 36$ (ب) $\sqrt{8} \times \sqrt{18} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} \times \sqrt{9} = 12$

(ج) $\frac{16}{32-} = \frac{\sqrt{15} \times 8 - 24 - 40 + \sqrt{15} \times 8}{80 - 48} = \frac{\sqrt{15} \times 8 + \sqrt{15} \times 8 - 64}{80 - 48} = \frac{2\sqrt{15} \times 8 - 64}{80 - 48} = \frac{16\sqrt{15} - 64}{80 - 48} = \frac{16(\sqrt{15} - 4)}{32} = \frac{\sqrt{15} - 4}{2}$

مثال (٦): ضع في صورة جذر أصم $\sqrt[3]{27}$

الحل:

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{27 \times \frac{1}{9}} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{27} \times \frac{1}{3}$$

قاعدة :

$$\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{s} \pm \sqrt{v} \text{ ، حيث } a = s + v \text{ ، } b = s \times v$$

$$s \geq 0 \text{ ، } v \leq s$$

مثال (٧): ضع المقدار $\sqrt{8\sqrt{2} + 6}$ في أبسط صورة

الحل: أفرض أن $\sqrt{8\sqrt{2} + 6} = \sqrt{s} + \sqrt{v}$ ، حيث $s + v = 6$ ، $s \times v = 8$ العدان هما ٢ ، ٤ ،

$$\therefore \sqrt{8\sqrt{2} + 6} = \sqrt{2} + \sqrt{4} = \sqrt{2} + 2$$

مثال (٨): ضع المقدار $\sqrt{12\sqrt{2} - 4}$ في أبسط صورة

$$\sqrt{12\sqrt{2} - 4} = \sqrt{s} - \sqrt{v} = \sqrt{3 \times 4\sqrt{2} - 4} = \sqrt{3} - \sqrt{4}$$

الحل: ضع $\sqrt{12\sqrt{2} - 4} = \sqrt{s} - \sqrt{v}$ ، $s + v = 4$ ، $s \times v = 3$ العدان هما ١ ، ٣ ،

$$\therefore \sqrt{12\sqrt{2} - 4} = \sqrt{3} - \sqrt{1} = \sqrt{3} - 1$$

تمرين (٢-١)

١. عرّف الجذر الأصم.

٢. اكتب في أبسط صورة $\sqrt{5\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 3}$

٣. اكتب في صورة جذر أصم $\sqrt{5\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 3}$ ، $\sqrt{5\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 3}$

٤. اكتب مرافق $\sqrt{5\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 3} - 1$ ثم جد حاصل ضربهما

$$٥. \text{ اختصر } \frac{1}{\sqrt{5\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 3} - 1}$$

$$٦. \text{ جد } \sqrt{5\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 3} - 1$$

٧. حل المعادلة $\sqrt{s} + 5 = 1 - s$ [تلميح ربّع الطرفين]

٨. حل المعادلة $\sqrt{s} - 7 = 3$

٩. إذا كان $s = 3 - \sqrt{3}$ جد s^{-1} في أبسط صورة.

١٠. جد الحل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\sqrt{4 - s} + \sqrt{2 + s} = 3$ ، $1 = 3 + s$

تعريف:

الدالة الأسية هي تطبيق من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ إلى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}^+$ ، تعرف بالعلاقة $d(s) = a^s$ حيث $a > 0$ ، $a \neq 1$ ، $s \in \mathbb{R}$.
أمثلة: $d(s) = 2^s$ ، $d(s) = (\sqrt{5})^s$ ، $d(s) = \left(\frac{1}{2}\right)^s$

من التعريف نستنتج:

- الدالة الأسية هي دالة رياضية، يكون فيها المتغير أساً لعدد ثابت موجب لا يساوي الواحد.
- مجالها جميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}^+$.
- قيم الدالة الأسية موجبة دائماً، ولا يمكن أن تساوي الصفر أو تأخذ قيمة سالبة.
- الدالة الأسية دالة تقابل.
- الدالة $d(s) = 1^s$ دالة ثابتة أم دالة أسية؟

مثال (١): إذا كان $d(s) = 2^s$ جد

$d(-3)$ ، $d(-2)$ ، $d(-1)$ ، $d(0)$ ، $d(1)$ ، $d(2)$ ، $d(3)$

الحل:

$$d(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad ، \quad d(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad ، \quad d(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$d(0) = 2^0 = 1 \quad ، \quad d(1) = 2^1 = 2 \quad ، \quad d(2) = 2^2 = 4 \quad ، \quad d(3) = 2^3 = 8$$

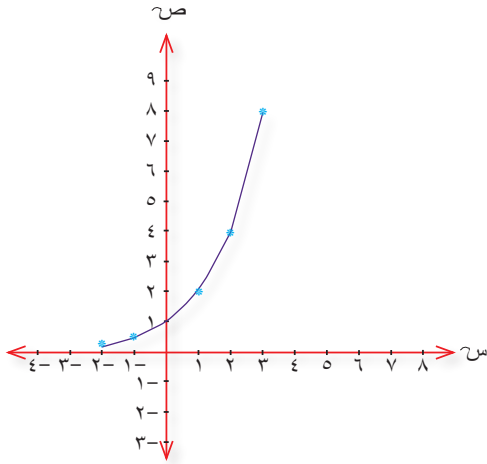
التمثيل البياني للدالة الأسية:

لرسم منحنى الدالة الأسية $d(s) = a^s$ يمكن أن نأخذ بعض قيم المتغير s ثم نوجد قيم s المناظرة ونكوّن جدول لهذه القيم (s ، a^s) ونمثّلها على مستوى المحورين ثم نصل بينها كما في المثال التالي.

مثال (٢): أرسم منحنى الدالة $د(س) = ٢^س$.

الحل: نكوّن جدول لبعض القيم المتناظرة (س ، $٢^س$) كما يلي:

س	٢-	١-	٠	١	٢	٣
$٢^س$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤	٨



لاحظ أنه كلما زادت قيم س فإن $د(س)$ تزداد

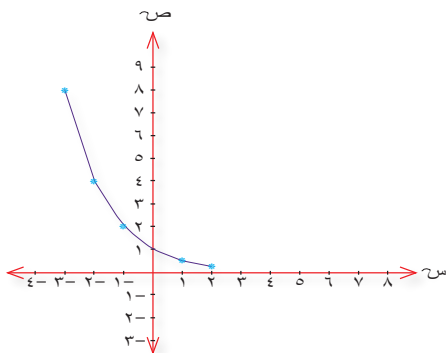
تحقق من فهمك

$د(\frac{1}{2}) = ١,٤$ تقريباً.

مثال (٣): أرسم منحنى الدالة $ق = ٢^{-س}$ حيث $ق = (\frac{1}{2})^س$ لقيم س في الفترة $[-٣, ٢]$

الحل:

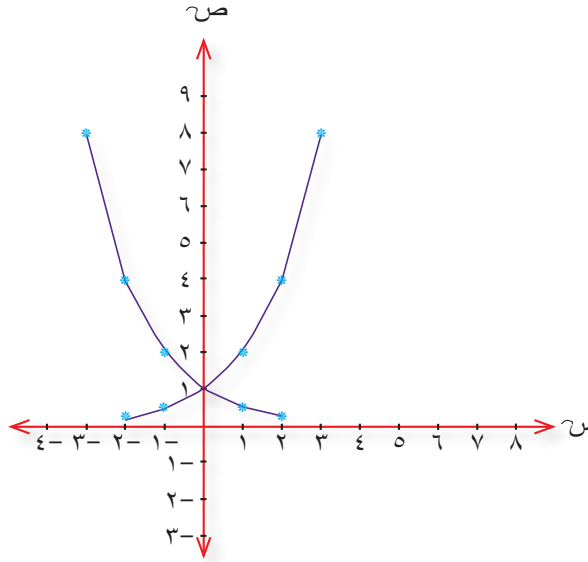
س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢
$ص = (\frac{1}{2})^س$	٨	٤	٢	١	٠,٥	٠,٢٥



تحقق من فهمك $د(\frac{3}{2}) = ٠,٤$ تقريباً.

مثال (٤): أرسم منحنى كل من $٢^س = د(س)$ ، $٢^{-س} = ق(س)$ في مستوى بياني واحد.

الحل: من حل المثالين السابقين، مع العلم بأن: $ق(س) = ٢^{-س}$ ، تعني أن:

$$ق(س) = \left(\frac{1}{2}\right)^س$$


خواص الدالة الأسية:

١. مجال الدالة الأسية هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
٢. مدى الدالة الأسية هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.
٣. الدالة الأسية هي دالة تقابل والمنحنى البياني لأي دالة أسية يمر بالنقطة $(٠, ١)$.
٤. إذا كان الأساس $أ < ١$ تكون دالة $أ^س$ دالة تزايدية على مجموعة الأعداد الحقيقية $ح$.
٥. إذا كان $أ > ١$ تكون الدالة $أ^س$ دالة تناقصية على مجموعة الأعداد الحقيقية.
٦. إذا كان $أ = ١$ فإن $د(س) = ١^س = ١$ وهذه الدالة يمثلها خط مستقيم يوازي المحور السيني ويمر بالنقطة $(٠, ١)$ ولا يدخل ضمن دراسة الدالة الأسية.
٧. منحنى الدالة الأسية يمر بالنقطة $(٠, ١)$ لأنه ولكل $أ \in ح - \{١\}$ نجد قيمة الدالة عند الصفر $د(٠) = ١ = أ^٠$
٨. لا تقطع الدالة الأسية محور السينات لأنه لا يوجد عدد حقيقي س يجعل $أ^س = ٠$ صفر.
٩. إذا كان $د(س) = أ^س$ دالة أسية وكان $س_١, س_٢ \in ح$ فإن:

$$\begin{aligned} (أ) \quad د(س_١ + س_٢) &= د(س_١) \times د(س_٢) \\ (ب) \quad د(س_١ - س_٢) &= \frac{د(س_١)}{د(س_٢)} \end{aligned}$$

تمرین (۴-۱)

١. إذا كان د(س) = ٤ جد قيمة كل من د(٣) ، د(١/٣) ، د(٣/١)
٢. إذا كان د(س) = ٥-س جد قيمة كل من د(١) ، د(-١) ، د(٣/٣)
٣. إذا كانت د(س) = ٣س ، ه(س) = ٩س أثبت أن د(س) . ه(س) = د(٣س)
٤. إذا كانت د(س) = ٢س جد قيمة س التي تحقق
$$\frac{د(٢+س) - د(١+س)}{د(١-س) - د(س)} = د(٣-س)$$
٥. إذا كانت د(س) = أ دالة أسية وكان س_١ ، س_٢ ∃ ح برهن أن
$$\frac{د(س_١)}{د(س_٢)} = \frac{د(س_١ + س_٢)}{د(س_١) \times د(س_٢)}$$
 ، (ب) د(س_١ - س_٢) = د(س_١) - د(س_٢)
٦. ارسم رسماً دقيقاً منحنى الدالة د(س) = ٢^س في الفترة [-٢ ، ٣] ومن الرسم جد د(١/٢) ، د(-٥ ، ٠)
٧. تمثل الدالة: د(ن) = ٥٠٠ × ٢^ن عدد البكتريا في ن ساعة، وضح صحة أو خطأ العبارات التالية مع التعليل:
 - (أ) عند ن = صفر يكون عدد البكتريا ٥٠٠ (ب) تمثل هذه العلاقة نمواً أسيّاً.
 - (ج) الزيادة في عدد البكتريا كل ساعة زيادة ثابتة.
 - (د) إذا كان ن_١ < ن_٢ فإن د(ن_١) ≤ د(ن_٢)
 - (هـ) مدى الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

Exponential Equations

(٥-١) المعادلات الأسية:

تعرّفنا سابقاً على بعض أنواع المعادلات مثل:

(أ) معادلة الدرجة الأولى في مجهول واحد $٢س - ١ = ٥$

(ب) المعادلة التربيعية $٢س + ٦س + ٩ = \text{صفر}$

هناك نوع آخر من المعادلات مثل: $٣س = ٢٧$ ، $\left(\frac{1}{٢}\right)س = \frac{1}{٨}$ ، $٤س = \frac{1}{١٦}$ يوجد فيها المتغير في الأس ويُسمّى مثل هذا النوع بالمعادلات الأسية وحلها يعني إيجاد قيمة المتغير.

وتعتمد هذه المعادلات على القواعد التالية:

القاعدة الأولى:

$$\text{إذا كان } أ^س = أ^ص \text{ فإن } س = ص \text{ بشرط } أ \neq ١, أ > ٠$$

القاعدة الثانية:

$$\text{إذا كان } س^ن = ص^ن \text{ فإن } س = ص \text{ إذا كانت } ن \text{ فردية.}$$

$$\text{إذا كان } س^ن = ص^ن \text{ فإن } س = \pm ص \text{ إذا كانت } ن \text{ زوجية } (ن \neq ٠)$$

القاعدة الثالثة:

$$\text{إذا كان } س^ن = ص^م, س \neq ص \text{ فإن } ن = م = \text{صفر}$$

القاعدة الرابعة:

$$\text{إذا كان } س^ن = ١ \text{ فإن } ن = \text{صفر}, س \neq ١, س < \text{صفر}$$

مثال (١): حل المعادلة $٣٢ = ٤س$

الحل: $(٢٢)س = ٢٢٠$ ، $٢٢٠ = ٢٢٠$ ، $\therefore ٢س = ٢٠$ ، $\therefore ٥ = س$ ، $\therefore س = \frac{٥}{٢}$

مثال (٢): حل المعادلة $\sqrt[٢]{٢ + س} = \sqrt[٢]{٢٧}$

الحل: $\sqrt[٢]{٢ + س} = \sqrt[٢]{٢٧}$ ، $\left(\sqrt[٢]{٢ + س}\right)^٢ = \left(\sqrt[٢]{٢٧}\right)^٢$ ، $\left(\sqrt[٢]{٢ + س}\right)^٢ = \left(\sqrt[٢]{٣٣}\right)^٢$ ، $\left(\sqrt[٢]{٢ + س}\right)^٢ = \left(\sqrt[٢]{٣}\right)^٢$

$$\left(\sqrt[٢]{٢ + س}\right)^٢ = \left(\sqrt[٢]{٣}\right)^٢ \quad \therefore ٣ = ٢ + س \quad \therefore س = ١$$

مثال (٣): حل المعادلة $س^2 - ٣ = ٢$

الحل: $(س^2 - ٣) = ٢$ ، $\frac{1}{٣} = ٢$ ، $(س^2 - ٣) = ٢$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين: $س^2 - ٣ = ٢$

بتكعيب الطرفين $(س^2 - ٣) = ٢$ ، $س^2 - ٣ = ٢$ ، $س^2 - ٣ = ٢$

مثال (٤): حل المعادلة $س^٣ - ٧ = ٨$

الحل: $س^٣ - ٧ = ٨$ ، بتطبيق القاعدة (٣) ، $س^٣ - ٧ = ٨$ ، $س^٣ - ٧ = ٨$

$س^٣ = ١٥$ ، تحقق من فهمك

حل آخر $س^٣ - ٧ = ٨$ ، بقسمة الطرفين على $س^٣ - ٧$ أو $س^٣ - ٧$

$$\frac{س^٣ - ٧}{س^٣ - ٧} = \frac{٨}{٨} \Rightarrow \frac{س^٣ - ٧}{س^٣ - ٧} = ١$$

بتطبيق القاعدة (٤) $س^٣ - ٧ = ٨$ ، $س^٣ = ١٥$

مثال (٥): حل المعادلة $س^٥ - ٥ = ١٠٠$

الحل: باستخراج العامل المشترك في الطرف الأيمن وهو $س^٥$

$$س^٥ - ٥ = ١٠٠ \Rightarrow س^٥ - ٥ = ١٠٠$$

$$س^٥ - ٥ = ١٠٠ \Rightarrow س^٥ - ٥ = ١٠٠$$

مثال (٦): جد مجموعة حل المعادلة $س^٣ - ٣ = ٩$

الحل: نحول المعادلة إلى معادلة من الدرجة الثانية

$$س^٣ - ٣ = ٩ \Rightarrow س^٣ - ٣ = ٩$$

$$س^٣ - ٣ = ٩ \Rightarrow س^٣ - ٣ = ٩$$

$$س^٣ - ٣ = ٩ \Rightarrow س^٣ - ٣ = ٩$$

$$س^٣ - ٣ = ٩ \Rightarrow س^٣ - ٣ = ٩$$

$$س^٣ - ٣ = ٩ \Rightarrow س^٣ - ٣ = ٩$$

$$س^٣ - ٣ = ٩ \Rightarrow س^٣ - ٣ = ٩$$

تحقق من فهمك بوضع $س^٣ = ١٢$

تمرين (١-٥)

حل المعادلات الأسية التالية وتحقق من صحة الحل:

$$١. ٨ = ٢^{\text{س}} \quad ٢. ٨ = \left(\frac{1}{٢}\right)^{\text{س}}$$

$$٣. ٨ = \sqrt[٥]{٢^{\text{س}}} \quad ٤. \frac{1}{٨} = \frac{٣}{٤}^{\text{س}}$$

$$٥. ١٠٠ = ١٠^{\text{س}} \quad ٦. ٤ = \left(\frac{1}{٢}\right)^{٢-\text{س}}$$

$$٧. ١١ = ٨^{٢-\text{س}} \quad ٨. ١ = ٦^{\text{س}} - ٥^{\text{س}} + ٦$$

$$٩. ٦ = ٣^{\text{س}} - ٣^{١-\text{س}} \quad ١٠. ١٤ = \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢}^{\text{س}} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢}^{\text{س}} + \frac{١}{٢}^{\text{س}}$$

$$١١. ٩ = ٣^{\text{س}} - ٤ \times ٣^{٢+\text{س}} + ٢٤٣ \quad ١٢. ٤٩ = ٥٠ \times ٧^{\text{س}} + ٤٩$$

$$١٣. ٨١ = ٣^{١+\text{س}} - ٤ \times ٣^{٢+\text{س}} + ٨١$$

$$١٤. ٦٤ = ٢^{١+\text{س}} - ٣ \times ٢^{٣+\text{س}} + ٦٤$$

$$١٥. ٦ = \frac{1}{٣}^{\text{س}} - ٥^{\text{س}} + ٦$$

مراجعة المجلس العلمي

سبق أن عرفنا الدالة الأسية $d(s) = a^s$ حيث $a > 0$ ، $a \neq 1$ وسبق أن عرفنا كذلك كيفية عرضها بصورة لوغاريتمية مكافئة لها وهي $\log_a s = s$ حيث $s = d(s)$

من التعريف يمكننا التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية أو التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية.

ابجديات الصورة اللوغاريتمية :

مثال (١): اكتب كلاً مما يأتي بالصورة اللوغاريتمية :

الحل: (أ) لپو ۸ = ۳ (ب) لپو ۱ = ۸ (ج) لپو ۳ = ۱

(أ) لو ٣٢ = ٥ (ب) لو ٣ = ٣ (ج) لو ١٢٥ = ٣

الحل: (أ) $52 = 32$ (ب) $\sqrt[3]{23} = 3$ (ج) $5 = \frac{1}{120}$

مثال (٣): جد قيمة كل مما يأتي:

(أ) لو ۱۰۰۰ (ب) لو $\frac{۱}{۴}$ (ج) لو ۱ (د) لو ۷

الحل: (أ) بما أن $1000 = 10^3$ إذن $1000 = 10^3$

(ب) بما أن $2 = 2^1$ إذن $2 = 2^1$

(ج) بما أن $1 = 10^0$ إذن $1 = 10^0$

(د) بما أن $7 = 7^1$ إذن $7 = 7^1$

مثال (٤): جد قيمة كل من :

(أ) 8 لو $\frac{1}{4}$ (ب) 125 لو $\frac{1}{25}$ (ج) 9 لو $\frac{1}{3}$

الحل:

(أ) أفرض أن 8 لو $\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow 8 = 4^x \Leftrightarrow 2^3 = 2^{2x} \Leftrightarrow 3 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ $\therefore 8$ لو $\frac{3}{2}$ ، $\therefore 125$ لو $\frac{1}{25}$ ، $\therefore 9$ لو $\frac{2}{3}$

(ب) أفرض أن 125 لو $\frac{1}{25}$ $\Leftrightarrow 125 = 25^x \Leftrightarrow 5^3 = 5^{2x} \Leftrightarrow 3 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ ، $\therefore 9$ لو $\frac{2}{3}$ ، $\therefore 125$ لو $\frac{3}{2}$

$\therefore 9$ لو $\frac{2}{3}$ ، $\therefore 125$ لو $\frac{3}{2}$

(ج) أفرض 8 لو $\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow 8 = 4^x \Leftrightarrow 2^3 = 2^{2x} \Leftrightarrow 3 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ $\therefore 8$ لو $\frac{3}{2}$ ، $\therefore 125$ لو $\frac{3}{2}$ ، $\therefore 9$ لو $\frac{2}{3}$

$\therefore 8$ لو $\frac{3}{2}$ ، $\therefore 125$ لو $\frac{3}{2}$ ، $\therefore 9$ لو $\frac{2}{3}$ ، $\therefore 125$ لو $\frac{3}{2}$ ، $\therefore 9$ لو $\frac{2}{3}$

تمرين (٦-١)

١. اكتب كل مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية :

(أ) $64 = 2^6$ (ب) $81 = 3^4$ (ج) $\frac{1}{3} = 3^{-1}$

(د) $10 = 1000^{\frac{1}{3}}$ (هـ) $3375 = 15^3$ (و) $2 = 4^{\frac{1}{2}}$

٢. اكتب كل مما يأتي على الصورة الأسية:

(أ) $81 = 3^4$ (ب) $2 = 2^1$ (ج) $4 = 2^2$

(د) $10 = 10^1$ (هـ) $1 = 1^0$ (و) $2 = 2^1$

٣. جد قيمة كل مما يأتي:

(أ) 243 لو $\frac{1}{3}$ (ب) 256 لو $\frac{1}{4}$ (ج) 8 لو $\frac{1}{2}$

(د) 5 لو $\frac{1}{5}$ (هـ) 27 لو $\frac{1}{3}$ (و) 2 لو $\frac{1}{2}$

ذكرنا أن من خواص الدالة الأسية د(س) = أ^س حيث أ > ٠، حيث أ > ١، س ∈ ℝ،
إنها دالة من نوع التقابل من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية
الموجبة لذا فإن لهذه الدالة دالة عكسية تسمى الدالة اللوغاريتمية .

تعريف:

إذا كان أ > ٠، أ ≠ ١، فإن الدالة د: ℝ⁺ → ℝ⁺ حيث د(س) = أ^س أو
ص = لو_أ س تسمى دالة لوغاريتمية .

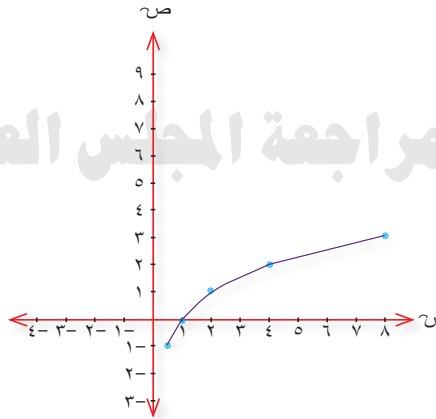
التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية:

أولاً: رسم المنحنى البياني للدالة ص = لو_أ س ، أ > ١

مثال (١): ارسم المنحنى ص = لو_٢ س

الحل: نكون الجدول

س	١/٢	١	٢	٤	٨
ص = لو _٢ س	-١	٠	١	٢	٣



نلاحظ من المنحنى أن الدالة متصلة ومتباينة ومتزايدة وتقطع المحور السيني عند

س = ١ أي يمر بالنقطة (١، ٠)

* الدالة المتصلة تعني إذا كان منحناها يُرسم دون رفع القلم عن الورقة أي لا توجد فجوات أو قفزات أو انقطاعات .

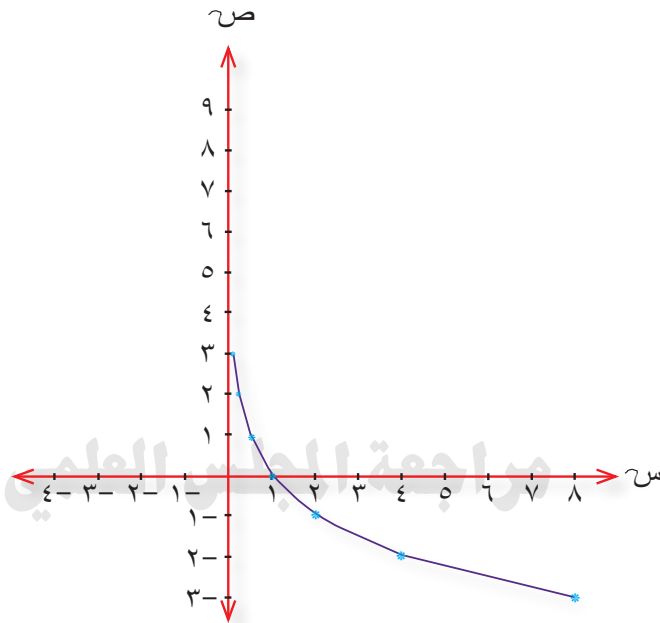
* الدالة المتباينة هي التي يتحقق فيها شروط التطبيق واحد لواحد (كل قيمة مختلفة من المحور السيني تقابلها قيمة مختلفة من المحور الصادي) .

ثانياً: رسم المنحنى $ص = لوس$ ، $١ > ٠$ ،

مثال (٢): ارسم المنحنى $ص = لوس$

الحل:

٨	٤	٢	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	س
٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣	ص = $لوس$



نلاحظ من المنحنى أن الدالة متصلة ومتباينة ومتناقصة وتقطع المحور السيني عند النقطة $(٠, ١)$.

تمرين (٧-١)

١. ارسم المنحنيات $v = l_p s$ ، $v = 2^s$ ، $v = s$ في مستوى احداثي واحد.

(أ) ما نقطة تقاطع منحنى $v = l_p s$ مع محور السينات.

(ب) ما نقطة تقاطع المنحنى $v = 2^s$ مع محور الصادات.

(ج) أي المنحنيات يمر بنقطة الأصل.

(د) أي المنحنيات ينمو أسرع عندما تكون قيم s كبيرة؟ وضح من الرسم.

(هـ) في أي جزء من المستوى يكون منحنى الدالة اللوغاريتمية غير معرف؟ ولماذا؟

(و) ما العلاقة بين منحنى $v = l_p s$ و $v = 2^s$ ، من خلال الرسم.

(ز) كيف يمكن استخدام المستقيم $v = s$ لإظهار العلاقة بين الدالة اللوغاريتمية والدالة الأسية؟

(ح) استنتج قاعدة عامة تربط بين الدوال الأسية واللوغاريتمية من الرسم

٢. ارسم منحنى الدالة $v = l_p s$.

٣. ارسم منحنى الدالة $v = l_p s$

٤. إذا كانت العلاقة بين شدة التيار الكهربائي t والزمن n تعطى بالعلاقة $l_p t = n$ ارسم منحنى هذه الدالة ومن الرسم جد شدة التيار بعد زمن قدره $1 \frac{1}{3}$ ثانية.

(أ) الخصائص الأساسية للوغاريتمات:

إذا كان $a > 0$ ، $a \neq 1$ ، x عدد حقيقي فإن الخصائص الآتية صحيحة:

١. $\log_a 1 = 0$
٢. $\log_a a = 1$
٣. $\log_a a^x = x$
٤. $a^{\log_a x} = x$ حيث $x > 0$

مثال (١):

مستخدماً الخصائص الأساسية للوغاريتمات جد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

- (أ) $\log_{125} 5$ (ب) $\log_{10} 0.001$ (ج) $\log_{12} 12$ (د) $\log_{10} 5$

الحل:

(أ) $\log_{125} 5 = \log_5 5 = 1$ ، (ب) $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

(ج) $\log_{12} 12 = \log_{12} 12^1 = 1$ ، (د) $\log_{10} 5$ غير معرف في مجموعة الأعداد الحقيقية
(ص = لو س معرفة عند $s > 0$)

(ب) خصائص أخرى للوغاريتمات

خاصية (١)

إذا كانت s ، v ، a أعداد حقيقية موجبة ، $a \neq 1$
فإن $\log_a s + \log_a v = \log_a (s \cdot v)$

لإثبات هذه الخاصية افترض أن $a^m = s$ ، $a^n = v$

وباستخدام تعريف اللوغاريتمات $\log_a s = m$ ، $\log_a v = n$

$\therefore a^m \times a^n = a^{m+n}$ ، $\therefore \log_a (s \cdot v) = m+n$ ، $\therefore \log_a s + \log_a v = \log_a (s \cdot v)$

من الخاصية الأساسية للوغريثمات $\log_a^m + \log_a^n = \log_a^{m+n}$ ، $\therefore \log_a^m + \log_a^n = \log_a^{m+n}$

مثال (٢): إذا كان $\log 3 = 0,7925$ جد بالتقريب قيمة $\log 192$

الحل: لو_٤ = ١٩٢ = (٣ × ٦٤) لو_٤ = (٣ × ٤) لو_٤ = ٣ + ٤ لو_٤ = ٣

$$3,7920 = 0,7920 + 3$$

تحقق من فهمك

استعمل لو ٢ = ٠,٥ لإيجاد قيمة لو ٣٢

خاصية (٢):

إذا كانت s ، v ، a أعداد حقيقية موجبة، حيث $a \neq 1$

$$\text{فإن } \log_a \frac{v}{s} = \frac{\log_a v}{\log_a s} - \frac{\log_a s}{\log_a s}$$

لإثبات هذه الخاصية افترض أن $u = s$ ، $u = v$ ، $\therefore$ لوس $u = m$ ،

لَوْ ص = ن

$\frac{أ م}{أن} = \frac{س}{ص}$ ، $\frac{أ م^{-ن}}{ص} = \frac{س}{ص}$ ، ∴ $\frac{لو أ}{ص} = \frac{س}{ص}$ = لو أ^{م-ن}

$$\text{لو}^{\text{س}}_{\text{أ ص}} = \text{م} - \text{ن} \quad , \quad \therefore \text{لو}^{\text{س}}_{\text{أ ص}} = \text{لوس}^{\text{س}}_{\text{أ}} - \text{لوص}^{\text{س}}_{\text{أ}}$$

مثال (٣): استعمل لو $\frac{5}{6} \approx 0,8\bar{3}$ لتقريب قيمة لو $\frac{7,2}{6}$

الحل:

$${}^{\circ}\text{لو} = 7,2 \text{ لو} = \left(\frac{72}{10}\right) \text{ لو} = \left(\frac{36}{5}\right) \text{ لو} = {}^{\circ}\text{لو} - 36 \text{ لو} = {}^{\circ}\text{لو} - 26 \text{ لو} = 5 \text{ لو}$$

$$1,1018 \approx 0,8982 - 2 \approx$$

تحقق من فهمك

استعمل لـ $2 \approx 0,63$ لتقريب قيمة لـ $4,5$

خاصية (٣):

لأي عدد حقيقي m وأي عددين موجبين s ، a حيث $a \neq 1$
 فإن $a^{s \cdot m} = (a^s)^m$

لإثبات الخاصية افترض أن $لوس = ص$ ، $∴ س = أ$ ^ص
 $س^م = (أ^ص)^م = أ^ص^م$ ، $لوس^م = لو^ص^م$ ^ص
 $∴ لوس^م = م ص$ (من الخاصية الأساسية للوغاريتمات)
 $∴ لو^ص^م = م لوس$ ^أ

مثال (٤): إذا كان $\rho = 0.3219$ فقرّب قيمة ρ لـ ٢٥

الحل:

$$4,6438 \approx (2,3219)^2 = 5 \text{ لو}^2 = 5 \text{ لو} = 25 \text{ لو}$$

تحقق من فهمك

إذا كان $لو_3 = 1,7712$ فقرب قيمة $لو_3$ إلى ٤٩

مثال (٥): احسب قيمة $\sqrt[5]{64}$ لو

الحل: لو_٤^١ = √6٤ = ٨ لو_٤^٢ = ٦٤^١/_٥ = ٨ لو_٤^٣ = (٨)^١/_٥ = ٨^١/_٥ = ٤^٣/_٥ = ٤^٣/_٥ = ٤^٣/_٥ = ٤^٣/_٥

تحقق من فهمك:

احسب قيمة

١. لو $\sqrt[3]{36}$ ٢. لو $\sqrt[6]{49}$

مثال (٦): اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يلي بالصورة المطوّلة

۱. لو ۱۲ س^۵ ص^۲ ۲. لو $\frac{۱-س}{\sqrt[۵]{۳-۲س}}$

الحل:

١. لو_٢ ١٢ س° ص⁻ = لو_٢ ١٢ + لو_٢ ٥ - لو_٢ ٢ ص

$$۲. \text{ لئو } \frac{۱-س}{۳} = \text{ لئو } (۱-س) - \text{ لئو } \sqrt[۳]{۳-۲س} =$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2 - 3} - \frac{1}{s} \quad \text{لو } (s - 1) - \text{لو } (s^2 - 3) = \frac{1}{s}$$

مثال (٧): اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يلي بالصورة المختصرة:

(أ) $4 \log_3 s - \frac{1}{3} \log_3 (s + 6)$ (ب) $0,5 \log_3 (s + 2) + \log_3 6 + \log_3 2$ س

الحل: (أ) $4 \log_3 s - \frac{1}{3} \log_3 (s + 6) = \log_3 (s + 6) - \log_3 s = \log_3 \frac{(s + 6)^{\frac{1}{3}}}{s}$

$$= \log_3 s - \log_3 \sqrt[3]{s + 6} = \log_3 \frac{s}{\sqrt[3]{s + 6}} = \log_3 \frac{s^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{s + 6}}{s + 6}$$

(ب) $0,5 \log_3 (s + 2) + \log_3 6 + \log_3 2 = \log_3 (s + 2)^{\frac{1}{2}} + \log_3 12 = \log_3 \sqrt{s + 2} + \log_3 12$

$$= \log_3 \sqrt{s + 2} + \log_3 12 = \log_3 \sqrt{s + 2} + \log_3 12 = \log_3 \sqrt{s + 2} + \log_3 12$$

تحقق من فهمك

(أ) $\log_3 6 - \log_3 2$ ب ج (ب) $5 \log_3 (s + 1) + \log_3 3$ (ج) $\log_3 (s + 1) + \log_3 3$

تمرين (٨-١)

١. جد قيمة كل مما يأتي:

أ. $\log_{13} 169$ ب. $\log_2 \frac{1}{128}$ ج. $\log_6 1$ د. $\log_{10} 10$

هـ. $\log_{27} 3$ و. $\log_{32} 2$ ز. $\log_{12} 512$ ح. $\log_{16} 216$

٢. استعمل $\log 3 \approx 0,4771$ ، $\log 5 \approx 0,6990$ لتقريب قيمة كل مما يأتي:

(أ) $\log 15$ (ب) $\log \frac{5}{3}$ (ج) $\log 0,6$

٣. أثبت أن $\log_{10} \frac{170}{7} - \log_{10} \frac{18}{35} + \log_{10} \frac{72}{34} = 2$

٤. إذا علمت أن $\log 7 = 0,8451$ ، $\log 2 = 0,3010$ جد قيمة $\log 28$

٥. أثبت أن $\frac{3}{2} = \frac{\log 3 - \log 8}{\log 4 - \log 3}$

٦. إذا علمت أن $\log 2 = 0,3010$ ، $\log 3 = 0,4771$ جد قيمة كل من:

(أ) $\log 6$ (ب) $\log \frac{5}{6}$ (ج) $\log 0,3$ (د) $\log 0,02$ (هـ) $\log \frac{27}{64}$

٧. يبيّن الجدول أدناه الهزات الأرضية القوية التي ضربت بعض البلدان، وقوة كل منها على مقياس ريختر إذا علمت أن مقدار أو قوة الزلزال على المقياس م تعطي بالعلاقة :
 $M = 1 + \log S$ حيث س تمثل سعة الاهتزاز الزلزالي أو شدة الموجات الزلزالية المقاسة فأجب عما يأتي:

السنة	المكان	الدرجة على مقياس ريختر
١٩٣٩	تركيا	٨
١٩٦٣	يوغسلافيا	٦
١٩٧٠	البيرو	٧,٨
٢٠٠٤	مراكش	٦,٤
٢٠١٠	هايتي	٧

- (أ) أي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل ١٠ أمثال الأخرى؟ وأي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل ١٠٠ مثل شدة الأخرى؟
- (ب) كم درجة على مقياس ريختر تسجل هزة أرضية إذا كانت شدتها تعادل ١٠٠٠ ضعف شدة هزة يوغسلافيا ١٩٦٣م.

هي معادلات تحتوي على لوغاريتمات لمتغيرات حيث تحتوي على لوغاريتم واحد أو أكثر. ويمكن استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة على حل المعادلات اللوغاريتمية أي بتحويلها إلى الصورة الأسية .

مثال (١): حل المعادلة $\log_{36} s = \frac{3}{2}$ ، ثم تحقق من صحة حلك

الحل: $\log_{36} s = \frac{3}{2}$ (المعادلة الأصلية) ، $s = 36^{\frac{3}{2}}$ (تعريف اللوغاريتم)

$$s = 36^{\frac{3}{2}} = (36^{\frac{1}{2}})^3 = 6^3 = 216$$

التحقق: عوض عن $s = 216$ في المعادلة الأصلية

$$\log_{36} 216 = \log_{36} (6 \times 36) = \log_{36} 6 + \log_{36} 36 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

مثال (٢): حل المعادلة $\log_6 s + \log_6 (s-9) = 2$

الحل: $\log_6 s + \log_6 (s-9) = 2$ المعادلة الأصلية

$$\log_6 s + \log_6 (s-9) = 2 \quad \text{خاصية الضرب في اللوغاريتمات}$$

$$\log_6 (s(s-9)) = 2 \quad \text{تعريف اللوغاريتمات}$$

$$s(s-9) = 6^2 = 36 \quad \text{بسط}$$

$$s^2 - 9s = 36 \quad \text{حل}$$

$$s^2 - 9s - 36 = 0 \quad \text{أو } s^2 - 12s + 3 = 0$$

$$s = 12 \quad \text{أو } s = -3 \quad \text{حل المعادلة}$$

$$\log_6 s + \log_6 (s-9) = 2 \quad \text{التحقق: } \log_6 (-3) + \log_6 (-3-9) = \log_6 (-3) + \log_6 (-12)$$

$$= \log_6 (-3 \times -12) = \log_6 36 = 2$$

وبما أن $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرفين فإن $s = -3$ حل مرفوض وبذلك يكون الحل هو $s = 12$

مثال (٣): يعطي ارتفاع شدة الصوت بالصيغة $I = 10^{\frac{S}{10}}$ حيث S هي شدة

الصوت و S هي شدة صوت المرجعية وتساوي 10^{-12} واط/متر^٢ احسب شدة صوت منبه إذا كان ارتفاع شدة صوته 80 ديسيبل.

الحل: ع = ١٠ ليو $\frac{\text{ش}}{١٠}$ (العلاقة الأساسية لمستوى شدة الصوت بالديسيبل)

$$٨٠ = ١٠ \text{ ليو } \frac{\text{ش}}{١٠} \quad \text{نقسم الطرفين على } ١٠$$

$$٨ = \text{ليو } \frac{\text{ش}}{١٠} \quad ، \quad ١٠ = \frac{\text{ش}}{١٠} \quad \therefore \text{ش} = ١٠ \times ١٠ = ١٠٠ \text{ واط/متر}^٢$$

تمرين (٩-١)

حل كلاً من المعادلات اللوغاريتمية التالية ثم تحقق من صحة حلك:

$$١. \text{ليو} \sqrt{s} = ٢ \quad ٢. \text{ليو} \frac{1}{٢٧} = s \quad ٣. \text{ليو} s = \frac{٤}{٣}$$

$$٤. \text{ليو} s = \frac{1}{٦٤} \quad ٥. \text{ليو} \sqrt[٣]{٢٧} = s \quad ٦. \text{ليو} s = \frac{٣}{٤}$$

$$٧. \text{ليو} s = ٠,١ \quad ٨. \text{ليو} ٢٥ = ٢s \quad ٩. \text{ليو} \frac{1}{٢} = s$$

$$١٠. ٢ \text{ ليو} s = \text{ليو} ٢٧ + \text{ليو} ٣ \quad ١١. \text{ليو}(s) + \text{ليو}(s + ٥) = ٢$$

$$١٢. \text{ليو}(s - ٤) = \text{ليو} ٣s \quad ١٣. ٥ \text{ ليو} s = \text{ليو} ٣٢$$

$$١٤. \text{ليو} ٤٨ - \text{ليو} s = \text{ليو} ٦ \quad ١٥. \text{ليو} ٤s + \text{ليو} ٥ = \text{ليو} ٤٠$$

$$١٦. \text{ليو}(s - ٣) + \text{ليو}(s - ٢) = \text{ليو}(٢٤ + ٢s)$$

$$١٧. \text{ليو} s = \frac{1}{٣} \text{ ليو} ٢٧ + \text{ليو} ٣٦ \quad ١٨. ٣ \text{ ليو} ٨ - \frac{1}{٢} \text{ ليو} ٣٦ = \text{ليو} s$$

هي لوغاريتمات أساسها ١٠ على الصورة $\log_{10}$ و نظراً لكثرة استخدامها فقد اتفق عالمياً على كتابتها اختصاراً دون كتابة الأساس هكذا $\log$ وتسمى اللوغاريتمات العشرية أو العادية.

$$\log_{10} 10 = 1 \quad \log_{10} 1 = 0$$

ويمكن حساب اللوغاريتمات العشرية باستخدام الآلة الحاسبة. تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log$ كونه أمراً أساسياً ويستعمل المفتاح (Log) لإيجاد قيمته.

مثال (١): استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$(أ) \log 5 \quad (ب) \log 0.3$$

الحل:

(أ) اضغط على المفتاح (Log) ثم العدد ٥ نجد أن: $\log 5 = 0.6990$

$$\log 5 = 0.6990$$

(ب) اضغط على المفتاح (Log) ثم العدد ٠,٣ نجد أن: $\log 0.3 = -0.5229$

$$\log 0.3 = -0.5229$$

تحقق من فهمك:

$$(أ) \log 7 \quad (ب) \log 0.5$$

مثال (٢): جد العدد الذي لوغاريتمه ١,٠٨٩٩

الحل: أضغط على المفاتيح (SHIFT) ثم المفتاح (Log) ثم العدد ١,٠٨٩٩

$$\text{SHIFT} \log \rightarrow 10^x \quad 1.0899 \rightarrow 12.29985524$$

نجد على الآلة الحاسبة العدد ١٢,٢٩٩٨٥٥٢٤ وهو العدد الذي لوغاريتمه ١,٠٨٩٩

هو تقريباً ١٢,٣٠

مثال (٣): إذا كان $\log x = 1.0845$ جد قيمة x

الحل: أضغط على المفاتيح (SHIFT) ثم المفتاح (Log) ثم العدد ١,٠٨٤٥

$$\text{SHIFT} \log \rightarrow 10^x \quad -1.0845 \rightarrow 0.0823189$$

يظهر العدد ٠,٠٨٢٣١٨٩ $\therefore x = 0.0823$

مثال (٤): حل المعادلة $٧ = ٣^٧$

الحل: لو $٣ = ٧$ $\Leftrightarrow$ س لو $٣ = ٧$

$\Leftrightarrow$ باستخدام الآلة الحاسبة $\frac{٧}{٣} =$ س $\therefore$

Log

(7)

÷

Log

(3)

يظهر العدد ١,٧٧١٢٤٣٧٤٩ ، $\therefore$ س = ١,٧٧١٢
ملاحظة:

تختلف الخطوات من آلة حاسبة إلى أخرى حسب نظام الآلة.
ترتبط اللوغاريتمات العشرية ارتباطاً وثيقاً بقوى العدد ١٠ تذكر أن اللوغاريتم هو أس،
فمثلاً في المعادلة $٧ = ٣^٧$ ، ص هو الأس الذي يُرفع إليه العدد ١٠ للحصول
على قيمة س

لو $٣ = ٧$ $\Leftrightarrow$ س $١٠ = ٧$ ، لو $١٠ = ٧$ $\Leftrightarrow$ ص $١٠ = ٧$ $\Leftrightarrow$ صفر

لو $١٠ = ٧$ $\Leftrightarrow$ ١ $١٠ = ٧$ ، لو $١٠ = ٧$ $\Leftrightarrow$ ن $١٠ = ٧$ $\Leftrightarrow$ ن

تمرين (١٠-١)

- مستخدم الآلة الحاسبة جد قيمة كل مما يأتي مقرباً لأربعة منازل عشرية:
(أ) لو ٥,١ (ب) لو ٢١ (ج) لو ٠,٤ (هـ) لو ٠,٠٤
(و) لو ٨,٢ (ز) لو ٤٠٠٠٠ (س) لو ٠,٠٠٦٢
- جد الأعداد المقابلة لكل من اللوغاريتمات التالية:
(أ) ٢,٧٥٤ (ب) - ٠,٢٨٧
- جد قيمة س في كل مما يأتي مقرباً لأربعة منازل عشرية:
(أ) لو س = ١,٢٥٥٦ (ب) لو س = ٣
(ج) لو س = ٠,٠٦٢١١ (د) لو س = - ٢,٢٤

$$\text{لأي أعداد موجبة } s, a, b \text{ حيث } a \neq 1, b \neq 1$$

$$\frac{\log_s a}{\log_a a} = \log_s a$$

لإثبات صيغة تغير الأساس أفرض أن $s = \log_a a$
 تعريف اللوغاريتمية
 بأخذ اللوغاريتم للطرفين
 خاصية لوغاريتمية القوة
 $\therefore \log_s a = \frac{\log_a a}{\log_a s}$
 $\log_s a = \frac{\log_a a}{\log_a s}$

مثال (١): اكتب $\log_{10} 20$ بدلالة اللوغاريتم العشري ثم جد قيمته مقرباً إلى أربعة أرقام عشرية

$$\log_{10} 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 10} = \log_{10} 20$$

$$\log_{10} 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 10} = \log_{10} 20$$

مثال (٢): البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تُسمّى خوارزميات، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية، ويعطي الزمن اللازم بالثواني ر لتحليل خوارزمية مكونة من ن خطوة بالصيغة $R = \log_2 N$ مستعملاً صيغة تغيير الأساس حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من ٢٤٠ خطوة.

$$R = \log_2 N$$

$$R = \log_2 240$$

$$R = \frac{\log_{10} 240}{\log_{10} 2} = \log_2 240$$

الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من ٢٤٠ خطوة يساوي ٧,٩ ثوانٍ تقريباً
تحقق من فهمك :

حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من ١٦٠ خطوة.

تمرين (١١-١)

١. اكتب كلاً مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم جد قيمته مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (أ) لو ٨ (ب) لو ٧ (ج) لو ١٦ (ج) لو ٥ (د) لو ٢٢
٢. اشترت إحدى شركات الشحن سيارة شحن (شاحنة) جديدة بسعر ١٦٨٠٠٠٠٠٠٠ جنيه سوداني، إذا افترضنا أن: $n = \log_{(1-p)} \frac{q}{s}$ حيث
 - ن $\equiv$ عدد السنوات منذ الشراء ،
 - ق $\equiv$ السعر الحالي
 - س $\equiv$ سعر الشراء ،
 - م $\equiv$ المعدل السنوي لانخفاض السعر
 (أ) إذا كان السعر الحالي ١٢٠٠٠٠٠٠٠ جنيه سوداني وانخفض سعرها بمعدل ١٥٪ سنوياً فكم عدد السنوات التي مرت على شرائها لأقرب سنة.
 (ب) إذا كان السعر الحالي ١٠٢٠٠٠٠٠٠٠ جنيه سوداني وانخفض سعرها بمعدل ١٠٪ سنوياً فما عدد السنوات التي مرت منذ شرائها لأقرب سنة.
 (ج) أنشيء جدولاً يوضح انخفاض السعر سنة بسنة بمعدل ١٥٪ سنوياً كما يلي:

السنة (ن)	قيمة الشاحنة بالجنيه السوداني
صفر	١٦٨٠٠٠٠٠٠٠
١٦	

- هل يصل سعر الشاحنة إلى الصفر ؟ وضح إجابتك.
٣. استعمل خصائص اللوغاريتمات برهن أن: $\log_a s = \log_a s \div \log_a b$

الأسس الكسرية $\frac{1}{n} \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$ (أ $\exists \neg$ - {٠} ، ن $\exists$ ط ، ن < ١)

$\frac{1}{n} \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$ (أ $\exists \neg$ ، أ $\neq$ ٠ ، م ، ن $\exists$ ص ، م < ٠)

$\frac{1}{n} \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$ (أ $\exists \neg$)

مرافق $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ هو $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ ، ومرافق $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ هو $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

الدالة الأسية: د(س) = a^s (أ < ٠ ، أ $\neq$ ١ ، س $\exists \neg$)

إذا كان $a^s = a^t$ فإن س = ت (أ $\neq$ ١)

إذا كان س = ت فإن س = ت (ن فردية) ، س = ت فإن س = ت $\pm$ ص (ن زوجية)

إذا كان س = ت فإن س $\neq$ ص فإن ن = م = صفر

إذا كان س = ١ فإن ن = صفر ، س $\neq$ ١ ، س < صفر

لو ص = س $\leftrightarrow$ ص = a^s

الدالة اللوغاريتمية د(س) = $\log_a s$ (أ $\exists \neg$ - {٠})

الخصائص الأساسية للوغاريتمات:

أ. إذا كان أ < ٠ ، أ $\neq$ ١ ، س عدد حقيقي فإن الخصائص الآتية صحيحة:

١. لو ١ = صفر ٢. لو أ = ١ ٣. لو a^s = س

لوس

٤. أ $a^s =$ حيث س < ٠

ب. لو س ص = لو س + لو ص ، لو $\frac{s}{v} =$ لو س - لو ص

ج. لو س = $\frac{\log s}{\log a}$ (س ، أ ، ب $\exists \neg$ ، أ $\neq$ ١ ، ب $\neq$ ١)

تمارين (١٢-١)

١. اختصر

$$(أ) \frac{س^3}{ص^2} (ب) لو^٢ + لو^٤ (ج) (س^-٢ ص^٦)^{\frac{1}{3}} (د) \left(\frac{٩}{١٦}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$(هـ) لو^٣ ٢٤٣ (و) لو^٩ - لو^٣ (ز) \frac{س^٢ ٢ \times س^٢}{س^٥} (ح) \frac{١ - لو^٥}{لو^٨}$$

٢. جد :

$$(أ) ٨ س^٢ (٤س)^{-٢} (ب) \sqrt[3]{م} \times \sqrt[3]{م}$$

$$(ج) (\sqrt[3]{٧} - \sqrt[3]{٨}) (\sqrt[3]{٧} + \sqrt[3]{٨}) (د) لو^٥ ب^٢ + لو^٢ ج^٢ - لو ب^٢ ج$$

$$(هـ) لو ص + لو \frac{١}{ص} (و) لو^٢ ٠,٢٥ (ز) لو^١٦ - لو^٢٧$$

٣. مستخدماً خواص الأسس و اللوغاريثمات جد الآتي:

$$(أ) إذا كان لو ٧ = ٠,٨٤٥١ جد قيمة لو ٤٩ ؟$$

$$(ب) إذا كان لو ٢ = ٠,٣٠١٠ ، لو ٧ = ٠,٨٤٥١ جد قيمة لو ٢٨ ؟$$

$$(ج) إذا كان لو أ = ٢ جد قيمة لو ب ؟$$

$$(د) إذا كان ٨ = س^٤ جد قيمة (٢٥)س$$

$$(هـ) إذا كان د(س) = ٤س^٤ جد د\left(\frac{١}{٢}\right) ، د(٠) ، د(-١)$$

٤. حل المعادلات الآتية:

$$(أ) لو س - ١ = ٥ (ب) ٣٦ = ٢ - س^٣ - س^٢ (ج) لو \sqrt[٣]{س} = ٢$$

$$(د) ٥ = ٢^{-س} + ٢^{١+س} (هـ) ٣ - س = ٢ - س^٢ = ٧ - س (و) ١ = \left(\frac{٢}{٥}\right)^{١+س}$$

$$(ز) س^{-٢} = \frac{٢٥}{٩} (س) لو (١ + س) = لو ٤ (ش) ٣^{-س} = \frac{١}{٣٦٩}$$

$$٥. اجعل المقدار \frac{١}{١ + \sqrt[٣]{٣}} خالياً من الجذر في المقام.$$

$$٦. اختصر: (أ) \frac{\sqrt[3]{١٢} - \sqrt[3]{٢٠}}{\sqrt[3]{٨٠} - \sqrt[3]{٤٨}} (ب) \frac{١}{٢ - \sqrt[3]{٥}}$$

$$٧. اكتب في صورة جذر أصم \frac{١}{٢} \sqrt[3]{٢٧}$$

$$٨. جد قيمة \sqrt[3]{٣٢} + \sqrt[3]{٦}$$

$$٩. حوّل إلى الصورة الجذرية \sqrt[٥]{٦}$$

$$١٠. حل المعادلة \sqrt[٥]{٣} = ٧ - س^٢$$

الوحدة الثانية

الهندسة التحليلية (الإحداثية)

Analytical Geometry (Coordinate Geometry)

أهداف الوحدة:

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١. يُعرّف الخط المستقيم.
٢. يُعرّف معادلة الخط المستقيم.
٣. يتعرّف على كلٍ من معادلتَي المحورين السيني و الصادي.
٤. يتعرّف على معادلات الخطوط المستقيمة الموازية لأحد المحورين.
٥. يجد معادلة الخط المستقيم بصيغة النقطتين.
٦. يطبّق معادلة الخط المستقيم بصيغة الميل والنقطة.
٧. يجد معادلة الخط المستقيم بصيغة الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي.
٨. يجد معادلة الخط المستقيم بصيغة المقطعين.
٩. يجد معادلة الخط المستقيم بصيغة طول العمود النازل عليه من نقطة الأصل و زاويته.
١٠. يحسب الجزأين المقطوعين من المحورين و ميل الخط المستقيم من الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم.
١١. يحسب طول العمود من نقطة معلومة على مستقيم معلوم.
١٢. يطبّق الصيغ المختلفة لمعادلات الخط المستقيم على المسائل الحياتية .

لماذا ندرس الهندسة التحليلية (الإحداثية) ؟

لأن الهندسة التحليلية (الإحداثية) تُعتبر إحدى الفروع الرئيسية للرياضيات لما لها من أهمية بالغة عند دراسة معظم العلوم الرياضية والتطبيقات الفيزيائية والعلوم التقنية ولقد ساعدت على دراسة الفضاء و خواصه الهندسية في العصر الحديث كما ترتبط بكل ما هو جديد، حيث أنها تُعتبر الأساس في تفسير الصور في علم الكمبيوتر. و قد ابتكر العلماء النظام الإحداثي المكوّن من محورين متعامدين و متقاطعين (محور السينات ومحور الصادات) والذي بواسطته يمكننا التعبير عن كل نقطة في المستوى ببُعدين حقيقيين (س ، ص) و باستخدام النظام الإحداثي يمكننا إثبات صحة خواص الهندسة الإقليدية معبرين عن المستقيمات والمنحنيات بمعادلات جبرية بإعتبارها معبراً عن مسارات لنقاط عامة تتحرك بشروط تحكم العلاقة بين (س، ص) و لقد يسرت الهندسة التحليلية (الإحداثية) الكثير من المعالجات في فروع الرياضيات المختلفة ، كما كانت و ستظل من عوامل تطورها و التعامل بينها.

مراجعة المجلس العلمي

(١-٢) المعارف السابقة المكتسبة : Previously Acquired Knowledge

في دراستنا للهندسة التحليلية (الإحداثية) في الصف الأول الثانوي :

- تعلمنا نظام الإحداثيات على الخط المستقيم و وجدنا البعد بين النقطتين أ و ب :

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

• تعلمنا إيجاد إحداثي منتصف القطعة المستقيمة أ ب

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \text{إحداثي منتصف أ ب}$$

- تعلمنا كيفية إيجاد إحداثي نقطة التقسيم من الداخل بنسبة ن_١ : ن_٢ ، إذا كانت أ (س_١ ، ص_١) ، ب (س_٢ ، ص_٢) وكانت ج تقسم أ ب من الداخل بنسبة ن_١ : ن_٢ فإن إحداثي ج هما :

$$\left(\frac{x_1 n_2 + x_2 n_1}{n_1 + n_2}, \frac{y_1 n_2 + y_2 n_1}{n_1 + n_2} \right)$$

- تعلمنا إيجاد إحداثي نقطة التقسيم من الخارج بنسبة ن_١ : ن_٢ ، إذا كانت أ (س_١ ، ص_١) ، ب (س_٢ ، ص_٢) وكانت ج تقسم أ ب من الخارج بنسبة ن_١ : ن_٢ فإن إحداثي ج هما :

$$\left(\frac{x_1 n_2 - x_2 n_1}{n_2 - n_1}, \frac{y_1 n_2 - y_2 n_1}{n_2 - n_1} \right)$$

- تعرّفنا على إيجاد ميل الخط المستقيم ل الذي يصنع زاوية قياسها هـ مع الإتجاه الموجب للمحور السيني حيث يُعطى كما يلي :

م الخط المستقيم ل = ظا هـ .

- تعرّفنا على إيجاد ميل الخط المستقيم ل المار بالنقطتين أ (س_١ ، ص_١) و ب (س_٢ ، ص_٢) حيث يُعطى كما يلي :

$$m = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

• تعرّفنا على شرط التوازي :

إذا كان l_1 و l_2 مستقيمان متوازيان ميلاهما m_1 ، m_2 فإن : $m_1 = m_2$

• تعرّفنا على شرط التعامد :

إذا كان l_1 و l_2 مستقيمان متعامدان ميلاهما m_1 ، m_2 فإن : $m_1 \times m_2 = -1$

• تعرّفنا سابقا أن النقاط أ (s_1 ، v_1) ، ب (s_2 ، v_2) ، ج (s_3 ، v_3) تقع على استقامة واحدة إذا كان ميل $\overline{AB} = \text{ميل } \overline{BC}$

• تعرّفنا على النسب المثلثية (الدوال المثلثية) لبعض الزوايا .

تمرين (٢-١)

١. جد البعد بين النقطتين أ (٥، ٧) و ب (٢، ٣) و من ثم جد نقطة تصريف $\overline{AB}$

٢. جد إحداثيي نقطة تقسيم القطعة المستقيمة أ (١، ٢) و ب (٤، ٨) من الداخل بنسبة ١:٢

٣. جد إحداثيي نقطة تقسيم القطعة المستقيمة أ (٢، ٣) و ب (٦، ٧) من الخارج بنسبة ٣:١

٤. جد ميل الخط المستقيم الذي يصنع زاوية 45° مع المحور السيني الموجب .

٥. حدد ما إذا كان المستقيمان الماران بالنقطتين أ (١، ٢) ، ب (٣، ٤) و النقطتين

ج (٢، ١) ، د (٤، ٣) متوازيين أم لا ؟.

٦. حدد ما إذا كان المستقيمان الماران بالنقطتين أ (١، ١) ، ب (٢، ٣) و النقطتين

ج (٣، ٢) ، د (١، ٤) متعامدين أم لا ؟.

٧. اختبر ما إذا كانت النقاط أ (١ ، ٤) ، ب (٠ ، ٢) ، ج (٣- ، ٤-) تقع

على استقامة واحدة أم لا؟

مراجعة المجلس العلمي

(٢-٢) مفاهيم أساسية لمعادلات الخط المستقيم :

Basic Concepts of the Equations of a Straight Line :

تعريف :

- الخط المستقيم هو مجموعة من النقاط التي تقع على استقامة واحدة وتمتد في اتجاهين متعاكسين دون نهاية و يمكن تمثيله بمعادلة رياضية (معادلة الخط المستقيم).
- معادلة الخط المستقيم هي علاقة تربط بين الإحداثيين الصادي والسيني لجميع النقاط الواقعة على الخط المستقيم.
- أي أن معادلة الخط المستقيم هي الصفة المميزة لإحداثيات جميع النقاط الواقعة عليه.

عليه يمكننا تصنيف معادلات الخط المستقيم بصيغها المختلفة على النحو التالي :

١. معادلتا المحورين : أنظر إلى الشكل (١)

أ- معادلة المحور السيني :

∴ معادلة الخط المستقيم هي الصفة

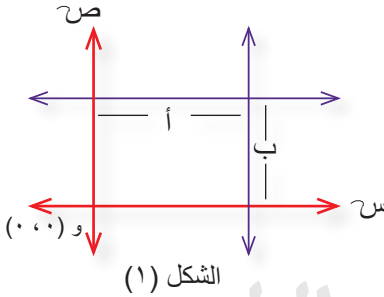
المميزة لإحداثيات جميع النقاط

الواقعة على الخط المستقيم عليه نجد

أن جميع النقاط الواقعة على المحور

السيني إحداثيتها الصادي يساوي الصفر

∴ معادلة المحور السيني هي : $y = 0$



ب. معادلة المحور الصادي : بذات المفهوم نجد أن جميع النقاط الواقعة على المحور

الصادي إحداثيتها السيني يساوي الصفر فإن معادلة المحور الصادي هي $x = 0$

٢. معادلتا الخطوط المستقيمة الموازية لأحد المحورين :

من الشكل (١) نجد أن : معادلة الخط المستقيم الموازي للمحور السيني و يبعد عنه

مسافة قدرها ب هي : $y = b$

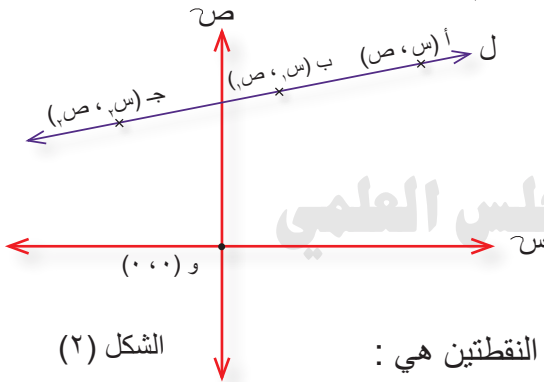
ومعادلة الخط المستقيم الموازي للمحور الصادي و يبعد عنه مسافة قدرها أ هي :

$x = a$

(٢-٣) معادلات الخطوط المستقيمة المائلة : معادلة الخط المستقيم بصيغة النقطتين

ب(س_١ ، ص_١) ، ج(س_٢ ، ص_٢) :

Equation of a Straight Line in Two-Point Form :



أنظر إلي الشكل (٢) حيث المستقيم ل يمر

بالنقطتين ب(س_١ ، ص_١) ، ج(س_٢ ، ص_٢)

والنقطة أ(س ، ص) $\exists$

عليه بما أنّ النقاط أ ، ب ، ج

تقع على استقامة واحدة فإن:

ميل أ ب = ميل ج ب

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

وعليه فإن معادلة الخط المستقيم بصيغة النقطتين هي :

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

مثال (١): اكتب معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٧) ، (٣ ، ٠) و من ثم أثبت أن النقطة (٤ ، ٣) لا تنتمي إلى هذا الخط المستقيم .

الحل: (س_١ ، ص_١) = (١ ، ٧) ، (س_٢ ، ص_٢) = (٣ ، ٠)
معادلة الخط المستقيم بصيغة النقطتين هي :

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \quad \therefore \quad \frac{ص - 7}{س - 1} = \frac{0 - 7}{3 - 1} \quad \therefore \quad \frac{ص - 7}{س - 1} = \frac{-7}{2}$$

بالضرب التبادلي : $ص - 7 = -\frac{7}{2}(س - 1)$

$\therefore$ معادلة الخط المستقيم هي : $ص - 7 = -\frac{7}{2}(س - 1)$

لكي نثبت أن النقطة (٤ ، ٣) لا تنتمي إلى الخط المستقيم نعوض س = ٣

ص = ٤ في معادلة المستقيم فإذا كان ناتج التعويض لا يساوي الصفر فإن النقطة لا

تنتمي إلى الخط المستقيم عليه :

$٣ \times ٢ - ٤ \times ٧ = -١٠ \neq ٠$ $\therefore$ النقطة (٤ ، ٣) لا تنتمي إلى الخط المستقيم.

مثال (٢): مدير مبيعات في شركة لألواح الطاقة الشمسية يريد تحديد العلاقة الخطية بين عدد الساعات التي يعملها الموظف وعدد ألواح الطاقة الشمسية التي يبيعها و بعد جمع البيانات وجد أن الموظف يبيع ٥٠ لوح طاقة شمسية بعد العمل لمدة ساعتين و يبيع ٨٠ لوح طاقة شمسية بعد العمل لمدة ٥ ساعات جد معادلة الخط المستقيم لعدد الساعات التي يعملها الموظف و عدد ألواح الطاقة الشمسية المباعة و من ثم حدد بعد كم من الزمن يبيع الموظف ٣٠٠ لوح طاقة شمسية؟.

الحل: $(س_١، ص_١) = (٥٠، ٢)$ ، $(س_٢، ص_٢) = (٨٠، ٥)$

معادلة الخط المستقيم بصيغة النقطتين هي : $\frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢} = \frac{ص - ص_٢}{س - س_٢}$

$$\frac{٣٠}{٣} = \frac{٥٠ - ص}{٢ - ٥} ، \quad \frac{٥٠ - ٨٠}{٢ - ٥} = \frac{٥٠ - ص}{٢ - ٥}$$

∴ المعادلة هي : $١٠س - ص = ٣٠$

∴ معادلة الخط المستقيم التي تمثل العلاقة بين عدد الساعات التي يعملها الموظف

(س) وعدد ألواح الطاقة الشمسية التي يبيعها (ص) هي : $١٠س - ص = ٣٠$

عليه لكي يبيع الموظف ٣٠٠ لوح طاقة شمسية نعوض في المعادلة الناتجة

$١٠س - ص = ٣٠$ عن $ص = ٣٠٠ - ١٠س$ نحصل على : $١٠س - ٣٠٠ = ٣٠$

$١٠س = ٣٣٠$ ∴ $س = ٣٣$ ساعة

∴ يبيع الموظف ٣٠٠ لوح طاقة شمسية بعد ٣٣ ساعة.

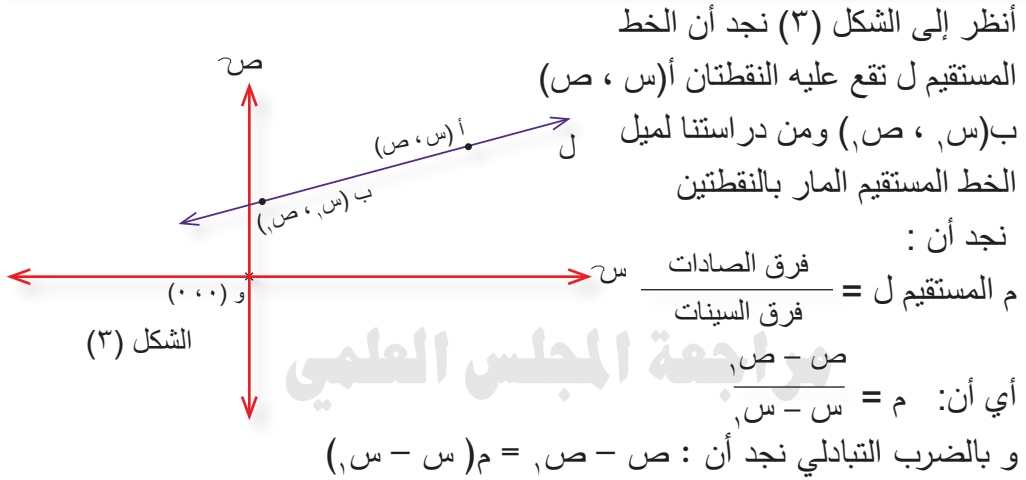
تمرين (٢-٢)

١. اكتب معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(-٢, ٣)$ ، $(٠, ٥)$.
٢. جد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-٢, ٥)$ ونقطة تنصيف القطعة المستقيمة التي نهايتها النقطتان $(٤, -١)$ ، $(٢, -٣)$.
٣. جد معادلة الخط المستقيم المار بنقطة الأصل و النقطة $(-٧, ٣)$.
٤. لتكن لدينا النقطتان $(٤, -٢)$ ، ب $(٢, ٢)$ جد معادلة الخط المستقيم الذي ينصف $\overline{أب}$ ويمر بالنقطة $(-٢, ٤)$.
٥. مسؤول مبيعات في شركة لبيع الأجهزة الإلكترونية يريد تحديد العلاقة بين عدد الأجهزة الإلكترونية المباعة والتكلفة الإجمالية للعميل فلاحظ عندما يبيع ٥ أجهزة إلكترونية تكون التكلفة الإجمالية ١٥ مليون جنيه وعندما يبيع ١٠ أجهزة إلكترونية تكون التكلفة الإجمالية ٢٥ مليون جنيه. اكتب معادلة الخط المستقيم التي تمثل التكلفة الإجمالية للعميل (ص) بناءً على عدد الأجهزة الإلكترونية المباعة (س) و من ثم حدد عدد الأجهزة الإلكترونية المباعة عندما تكون التكلفة الإجمالية ٦٥ مليون جنيه.

مراجعة المجلس العلمي

(٢ - ٤) معادلة الخط المستقيم بصيغة الميل م والنقطة (س_١ ، ص_١) :

Equation of a Straight Line in Point-Slope Form :



وعليه فإن معادلة الخط المستقيم بصيغة الميل م والنقطة هي :

$$\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$$

مثال (١) : اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله -٤ و المار بالنقطة (٢ ، -٣).

الحل : م = -٤ ، (س_١ ، ص_١) = (٢ ، -٣)

معادلة الخط المستقيم بصيغة الميل م والنقطة هي : ص - ص_١ = م(س - س_١)
 بالتعويض المباشر : ص - (-٣) = (-٤)(س - ٢)

$$\text{ص} + ٣ = -٤\text{س} + ٨$$

∴ المعادلة هي : ٤س + ص = ٥

مثال (٢) : شركة لتأجير السيارات تقدم خدمة تأجير السيارات بأسعار مناسبة حيث أن تكلفة تأجير السيارة هي ٥٠ ألف جنيه في اليوم بالإضافة إلى ٠,٢٥ ألف جنيه لكل كيلومتر تقطعه السيارة. جد التكلفة الإجمالية لتأجير السيارة ليوم واحد باستخدام صيغة الميل والنقطة و إذا قطعت السيارة مسافة ١٠٠ كيلومتر كم تكون التكلفة الإجمالية لإيجار السيارة ليوم واحد ؟

الحل : معادلة المستقيم بصيغة الميل م والنقطة هي : ص - ص_١ = م(س - س_١)

حيث س ≡ المسافة المقطوعة بالسيارة.

ص $\equiv$ التكلفة الإجمالية لتأجير السيارة.

م $\equiv$ التكلفة الإضافية لكل كيلومتر (٠,٢٥ ألف جنيه) .

(س, ص) $\equiv$ التكلفة الأساسية لتأجير السيارة لمدة يوم واحد

(٠ كيلومتر ، ٥٠ ألف جنيه).

بالتعويض المباشر : ص - ٥٠ = ٢٥ , (س - ٠)

∴ التكلفة الإجمالية لتأجير السيارة ليوم واحد باستخدام صيغة الميل والنقطة هي :

$$\text{ص} = ٢٥ + ٥٠ \times \text{س}$$

∴ إذا قطعت مسافة ١٠٠ كيلومتر بالسيارة فإن التكلفة الإجمالية لإيجار السيارة لمدة يوم

واحد هي : ص = ٢٥ + ١٠٠ × ٥٠ = ٧٥ ألف جنيه.

تمرين (٢-٢)

١. جد معادلة الخط المستقيم الذي ميله ٢- ويمر بالنقطة (٣ ، ٤).

٢. جد معادلة الخط المستقيم الذي يوازي المستقيم الذي ميله $\frac{1}{٣}$ ويمر بالنقطة (٤ ، ٥).

٣. جد معادلة الخط المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥° ويمر بالنقطة (٢ ، -٣).

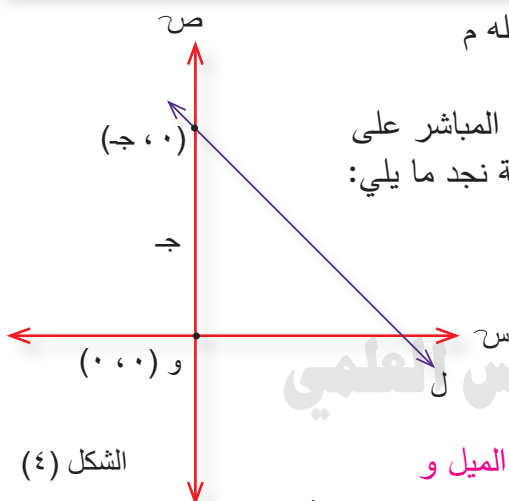
٤. جد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢- ، ١) وعمودياً على المستقيم الذي ميله -٤.

٥. ميكانيكي سيارات يتقاضى ٢٠ ألف جنيه في الساعة بالإضافة الي ١٥ ألف جنيه

رسوم خدمة. اكتب التكلفة الإجمالية لإصلاح السيارات باستخدام معادلة الخط

المستقيم و إذا عمل الميكانيكي ١٠ ساعات كم تكون التكلفة الإجمالية ؟

(٢ - ٥) معادلة الخط المستقيم بصيغة الميل و الجزء المقطوع من المحور الصادي: Equation of a Straight Line in Slope-Intercept Form:



أنظر إلي الشكل (٤) نجد أن المستقيم ل ميله م ويقطع من المحور الصادي جزءاً قدره ج أي أنه يمر بالنقطة (٠ ، ج) عليه بالتطبيق المباشر على معادلة الخط المستقيم بصيغة الميل و النقطة نجد ما يلي:

$$ص - ص_1 = م (س - س_1)$$

$$\text{حيث } (س_1 ، ص_1) = (٠ ، ج)$$

$$ص - ج = م (س - ٠)$$

$$ص - ج = م س$$

$$ص = م س + ج$$

وعليه فإن معادلة الخط المستقيم بصيغة الميل و

الجزء المقطوع من المحور الصادي هي : $ص = م س + ج$

حيث م $\equiv$ ميل الخط المستقيم ، ج $\equiv$ الجزء المقطوع من المحور الصادي.

مثال (١): جد معادلة الخط المستقيم الذي ميله ٣ و يقطع من المحور الصادي جزءاً قدره ٨ وحدات .

$$\text{الحل : } م = ٣ ، ج = ٨$$

معادلة الخط المستقيم بصيغة الميل و الجزء المقطوع من المحور الصادي هي :

$$ص = م س + ج$$

$$\text{بالتعويض المباشر : } ص = ٣ س + ٨$$

$$\therefore \text{ معادلة الخط المستقيم هي : } ص = ٣ س + ٨$$

مثال (٢): اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله - ٢ و يمر بالنقطة (١ ، ٤) مستخدماً صيغة الميل و الجزء المقطوع من المحور الصادي .

$$\text{الحل : } (س ، ص) = (١ ، ٤) ، م = -٢ ، ج = ؟$$

$$\text{لإيجاد قيمة ج نعوض في : } ص = م س + ج$$

$$٤ = -٢ + ج$$

$$٤ = -٢ + ج \Rightarrow ج = ٦$$

$$\text{عليه بالتعويض في : } ص = م س + ج$$

$$ص = -٢ س + ٦$$

$$\therefore \text{ معادلة الخط المستقيم هي : } ص = -٢ س + ٦$$

مثال (٢): مسافر بطائرة واجهته تكلفة إضافية لزيادة وزن عفشه حيث كانت شركة الطيران تحسب التكلفة الإضافية حسب الوزن الزائد عن الحد المسموح به على النحو التالي : ٥ دولارات لكل كيلوجرام والرسوم الثابتة ٢٠ دولار جد معادلة الخط المستقيم التي تمثل التكلفة الإجمالية مقارنةً بالوزن الزائد و كم تكون التكلفة الإجمالية إذا كان الوزن الزائد ٣٠ كيلوجرام ؟

الحل : حيث الميل $m = ٥$ دولارات و الجزء المقطوع من المحور الصادي $c = ٢٠$ دولار معادلة الخط المستقيم بصيغة الميل و الجزء المقطوع من المحور الصادي هي :

$$ص = م س + ج$$

بالتعويض المباشر : $ص = ٥ س + ٢٠$

∴ التكلفة الإجمالية بمعادلة الخط المستقيم هي : $ص = ٥ س + ٢٠$

عندما يكون الوزن الزائد ٣٠ كيلوجرام أي أن $س = ٣٠$ كيلوجرام نعوض في معادلة التكلفة الإجمالية

$$ص = ٥ س + ٢٠ \Rightarrow ص = ٥ \times ٣٠ + ٢٠ \Rightarrow ص = ١٧٠$$

∴ إذا كان الوزن الزائد ٣٠ كيلوجرام فإن التكلفة الإجمالية تساوي ١٧٠ دولاراً.

تمرين (٢ - ٤)

١. جد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٢}{٣}$ ويمر بالنقطة $(٠, ٢ -)$.

٢. جد معادلة الخط المستقيم الذي ميله ٢ ويقطع من المحور الصادي جزءاً قدره -٤.

٣. جد الميل والمقطع الصادي لكل من المستقيمات التالية :

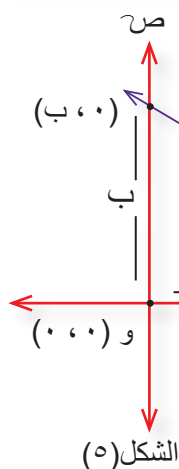
أ. $ص = -٣ س + \frac{٤}{٥}$ ب. $ص = ٧ س$ ج. $ص = -٩$

٤. أعد كتابة المعادلة $ص = ٣ - ٢ س$ بصيغة الميل والمقطع الصادي.

٥. شركة لتأجير السيارات تطلب ١٢ ألف جنيه رسوم عقد ايجار و ١,٥ ألف جنيه رسوم إضافية لكل كيلو متر تقطعه السيارة اكتب معادلة الخط المستقيم التي تمثل التكلفة الإجمالية للرحلة. وإذا كانت التكلفة الإجمالية للرحلة ٣٠٦ ألف جنيه جد عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة .

(٢ - ٦) معادلة الخط المستقيم بصيغة المقطعين :

Equation of a Straight Line in Intercept Form:



أنظر إلى الشكل (٥) نجد أن المستقيم ل
يقطع من المحور السيني جزءاً قدره أ أي
أنه يمر بالنقطة (أ ، ٠) و يقطع من المحور
الصادي جزءاً قدره ب أي أنه يمر
بالنقطة (٠ ، ب) عليه فإن المستقيم ل
يمر بالنقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

وبالتعويض في معادلة الخط المستقيم بصيغة النقطتين :

$$\frac{ص - ص_1}{ص_2 - ص_1} = \frac{س - س_1}{س_2 - س_1}$$

$$\frac{ص}{أ} = \frac{س}{ب} \Leftrightarrow \frac{٠ - ب}{أ - ٠} = \frac{٠ - ص}{س - أ}$$

بالضرب التبادلي نحصل على : - أ ص = ب س - أ ب $\Leftrightarrow$ ب س + أ ص = أ ب

وبقسمة الطرفين على أ ب نحصل : $١ = \frac{ص}{ب} + \frac{س}{أ}$

وعليه فإن معادلة الخط المستقيم في صيغة المقطعين هي :

$$١ = \frac{ص}{ب} + \frac{س}{أ}$$

مثال (١) : اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يقطع من المحور السيني جزءاً طوله ٤ وحدات و من المحور الصادي جزءاً طوله ٧ وحدات.

الحل : أ = ٤ ، ب = ٧

معادلة الخط المستقيم بصيغة المقطعين هي : $١ = \frac{ص}{ب} + \frac{س}{أ}$
بالتعويض المباشر : $١ = \frac{ص}{٧} + \frac{س}{٤}$

بضرب الطرفين $\times ٢٨$ نحصل على : $٢٨ = ٤ ص + ٧ س$

$\therefore$ معادلة الخط المستقيم هي : $٠ = ٢٨ - ٤ ص - ٧ س$

و هي معادلة على الصيغة أ س + ب ص + ج = ٠ حيث أ ، ب ، ج ثوابت و أن أ ، ب ليس كلاهما صفراً و هي معادلة من الدرجة الأولى في المتغيرين س ، ص .
و تسمى المعادلة أ س + ب ص + ج = ٠ بالصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم .

ملاحظة مهمة :

يمكن تحويل الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم أ س + ب ص + ج = ٠ إلي أي من صيغ معادلات الخط المستقيم التي درسناها على النحو التالي :

١ . تحويل الصيغة أ س + ب ص + ج = ٠ إلي الصيغة : ص = م س + ج كما يلي :

$$أ س + ب ص + ج = ٠ \Leftrightarrow ب ص = -أ س - ج \quad \Rightarrow \quad ص = \frac{-أ س - ج}{ب}$$

وبقسمة الطرفين على ب نحصل على $ص = \frac{-أ}{ب} س - \frac{ج}{ب}$ (١)
وعليه بمقارنة الصيغة (١) مع الصيغة ص = م س + ج نجد أن :

$$\text{ميل الخط المستقيم من معادلته} = م = \frac{-أ}{ب} = \frac{\text{معامل ص}}{\text{معامل س}}$$

$$\text{المقطع الصادي} = \frac{-ج}{ب} = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}$$

أي أنه يمكننا إيجاد ميل الخط المستقيم والجزء المقطوع من المحور الصادي من الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم أ س + ب ص + ج = ٠

٢ . تحويل الصيغة أ س + ب ص + ج = ٠ إلي الصيغة : $١ = \frac{ص}{ب} + \frac{س}{أ}$ كما يلي :

$$أ س + ب ص + ج = ٠ \Leftrightarrow أ س = -ب ص - ج \quad \Rightarrow \quad س = \frac{-ب ص - ج}{أ}$$

وبقسمة الطرفين على - ج نحصل على :

$$(٢) \quad ١ = \frac{ص}{\frac{-ب ص - ج}{أ}} + \frac{س}{\frac{-ب ص - ج}{أ}} \Leftrightarrow ١ = \frac{ب ص}{-ج} + \frac{أ س}{-ج}$$

وعليه بمقارنة الصيغة (٢) مع الصيغة $١ = \frac{ص}{ب} + \frac{س}{أ}$ نجد أن :

$$\text{الجزء المقطوع من المحور السيني} = \frac{-ج}{أ} = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}}$$

$$\text{الجزء المقطوع من المحور الصادي} = \frac{-ج}{ب} = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}$$

مثال (٢): حول المعادلة $س^2 + ص^3 - ١٢ = ٠$ إلى صيغة المقطعين ثم جد الجزأين المقطوعين من المحورين.

الحل: $١٢ = ٠ = ص^3 + س^2 \Leftrightarrow ١٢ = ص^3 + س^2$

وبقسمة الطرفين على ١٢ نحصل على: $١ = \frac{ص}{٤} + \frac{س}{٦}$

$\therefore$ المقطع السيني = ٦ ، المقطع الصادي = ٤

ملاحظة مهمة:

يمكننا إيجاد المقطع السيني بوضع $ص = ٠$ في الصيغة $أس + ب ص + ج = ٠$ وإيجاد المقطع الصادي بوضع $س = ٠$ في الصيغة $أس + ب ص + ج = ٠$

مثال (٣): جد الميل والجزأين المقطوعين من المحورين للمستقيم الذي معادلته هي: $٥س - ٦ص + ١٣ = ٠$

الحل: $١٣ = ج$ ، $٦ = -ب$ ، $٥ = أ$

ميل الخط المستقيم من معادلته $= م = \frac{أ-}{ب} = \frac{-معامل س}{-معامل ص} = \frac{٥-}{٦-} = \frac{٥}{٦}$

الجزء المقطوع من المحور السيني $= \frac{ج-}{أ} = \frac{-الحد المطلق}{معامل س} = \frac{١٣-}{٥} = \frac{١٣}{٥}$

الجزء المقطوع من المحور الصادي $= \frac{ج-}{ب} = \frac{-الحد المطلق}{معامل ص} = \frac{١٣-}{٦-} = \frac{١٣}{٦}$

مثال (٤): يعرض محل لبيع الهواتف نوعين من الهواتف . يُباع النوع الأول بسعر ٢٠٠ ألف جنيه ، ويباع النوع الثاني بسعر ٣٠٠ ألف جنيه . إذا أراد المحل تحقيق إيرادات ٢,٤ مليون جنيه من بيع النوعين معاً . جد ما يلي :

١. معادلة الخط المستقيم التي تمثل العلاقة بين عدد الهواتف المباعة من النوعين .
٢. اكتب معادلة المستقيم بصيغة المقطعين .
٣. المقطع السيني و المقطع الصادي .
٤. إذا باع المحل ٣ هواتف من النوع الأول فكم هاتفاً من النوع الثاني يجب أن يبيع لتحقيق الإيراد المطلوب.

الحل :

أفرض أن : عدد الهواتف من النوع الأول (س) ، عدد الهواتف من النوع الثاني (ص)
١. المعادلة هي : $2400000 = 300000 \text{ ص} + 200000 \text{ س}$

$$\Leftrightarrow 24 = 3 \text{ ص} + 2 \text{ س}$$

٢. في صورة المقطعين : بقسمة كل المعادلة على ٢٤ نحصل على $\frac{\text{ص}}{8} + \frac{\text{س}}{12} = 1$

٣. المقطع السيني = ١٢ ، المقطع الصادي = ٨

٤. إذا باع المحل ٣ هواتف من النوع الأول نعوض س = ٣ في صيغة المقطعين

$$\frac{\text{ص}}{8} + \frac{3}{12} = 1 \Leftrightarrow \text{ص} = 6$$

∴ عدد الهواتف من النوع الثاني التي يجب بيعها لتحقيق الإيراد المطلوب هو ٦ هواتف.

تمرين (٢-٥)

١. جد معادلة الخط المستقيم الذي يقطع من المحور السيني جزءاً طوله ١٠ وحدات ومن المحور الصادي جزءاً طوله ٣ وحدات.

٢. جد الميل والجزأين المقطوعين من المحورين فيما يلي :

أ. ل : ٥س + ٦ص - ٧ = ٠ ، ب. ل : ٢ص = ٩ -

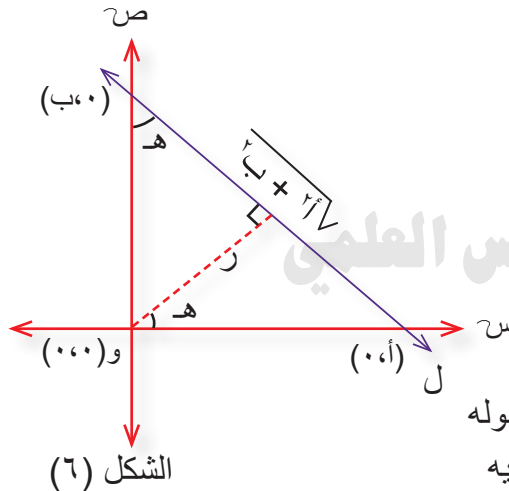
ج. ل : ٥ص - ٣س - ١١ = ٠ ، د. ل : ٦ + ص = $\frac{1}{4}$ (س - ٣)

٣. معرض ثلاثيات يعرض نوعين من الثلاثيات، النوع الأول يباع بسعر مليون جنيه والنوع الثاني يباع بسعر ٢ مليون جنيه إذا كان المعرض يريد تحقيق إيرادات بقيمة ١٤ مليون جنيه، فإذا باع المعرض ثلاثيتين من النوع الأول فكم عدد الثلاثيات التي يجب بيعها من النوع الثاني ؟

(٢ - ٧) معادلة الخط المستقيم إذا علم طول العمود النازل عليه من نقطة الأصل و

زاوية ميل هذا العمود :

Equation of a Straight Line given the Length of the Perpendicular from the Origin and its Angle of Inclination



أنظر إلي الشكل (٦) نجد أن ر يمثل طول

العمود النازل من نقطة الأصل

على المستقيم ل و أن هـ تمثل زاوية

ميل هذا العمود أي الزاوية من

المحور السيني الي العمود النازل

من نقطة الأصل على المستقيم ل.

بالنظر إلي الشكل (٦) كذلك نلاحظ أن

المستقيم ل قطع من المحور السيني جزءاً طوله

أ و من المحور الصادي جزءاً طوله ب. عليه

$$\text{نجد أن : جتا هـ} = \frac{ر}{أ} \leftarrow \frac{ر}{ب} = \text{أ} = \frac{ر}{\text{جتا هـ}}$$

$$\text{جا هـ} = \frac{ر}{ب} \leftarrow \frac{ر}{أ} = \text{ب} = \frac{ر}{\text{جا هـ}}$$

بتعويض قيمتي أ ، ب في معادلة الخط المستقيم في صيغة المقطعين :

$$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١ \text{ نحصل على :}$$

$$\frac{س}{\frac{ر}{\text{جتا هـ}}} + \frac{ص}{\frac{ر}{\text{جا هـ}}} = ١$$

$$١ = \frac{س \text{ جتا هـ}}{ر} + \frac{ص \text{ جا هـ}}{ر}$$

بضرب الطرفين × ر نحصل على : س جتا هـ + ص جا هـ = ر

وعليه فإن معادلة الخط المستقيم بصيغة العمود النازل عليه من نقطة الأصل وزاوية ميله هي :

$$س \text{ جتا هـ} + ص \text{ جا هـ} = ر$$

حيث طول العمود ر موجباً وأن مجموع مربعي معاملي س و ص يساوي الوحدة أي

$$\text{أن : جتا}^٢ \text{ هـ} + \text{جا}^٢ \text{ هـ} = ١$$

ملاحظة مهمة :

لتحويل معادلة الخط المستقيم في صيغتها العامة أس + ب ص + ج = ٠ إلى الصيغة العمودية س جتا هـ + ص جا هـ = ر نتبع الخطوات التالية :

$$\therefore \text{أس} + \text{ب ص} + \text{ج} = ٠ \Leftrightarrow \text{أس} + \text{ب ص} = -\text{ج}$$

بقسمة الطرفين على $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ نحصل على :

$$(١) \quad \frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} \text{س} + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} \text{ص} = \frac{-\text{ج}}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$$

وبمقارنة المعادلة (١) بالمعادلة : س جتا هـ + ص جا هـ = ر

$$\text{نجد أن : جتا هـ} = \frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}, \text{جا هـ} = \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}, \text{ر} = \frac{-\text{ج}}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} \quad (+)$$

مثال (١) : إذا كان طول العمود النازل من نقطة الأصل على مستقيم ما يساوي ٦ وحدات وأن زاوية ميل هذا العمود مع المحور السيني تساوي ٣٠° اكتب معادلة المستقيم.

الحل : ر = ٦ وحدات ، هـ = ٣٠°

معادلة الخط المستقيم في الصيغة العمودية هي : س جتا هـ + ص جا هـ = ر

بالتعويض المباشر : س جتا ٣٠° + ص جا ٣٠° = ٦

$$\text{س} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \text{ص} \times \frac{1}{2} = ٦$$

بضرب الطرفين $\times ٢$ نحصل على :

$$\sqrt{3} \text{س} + \text{ص} = ١٢$$

$\therefore$ معادلة الخط المستقيم هي : $\sqrt{3} \text{س} + \text{ص} = ١٢$

مثال (٢) : اكتب معادلة الخط المستقيم س $\sqrt{3}$ + ص ١ = ٠ في الصيغة العمودية.

الحل : أ = ١ ، ب = $\sqrt{3}$

$$\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2} = \sqrt{1 + 3} = ٢$$

س $\sqrt{3}$ + ص = ٠ بقسمة الطرفين على ٢ نحصل على :

$$\frac{1}{2} \text{س} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ص} = ٠ \quad (٠ < \text{ر}) \text{ نضرب في } ١ - \Leftrightarrow \frac{1}{2} \text{س} - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ص} = ٣$$

و بالمقارنة مع : س جتا هـ + ص جا هـ = ر نجد أن :

$$\text{جتا هـ} = \frac{1}{2}, \text{جا هـ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \text{هـ} = ٢٤٠^\circ \text{ تقع في الربع الثالث, ر} = ٣$$

$\therefore$ معادلة الخط المستقيم في الصيغة العمودية هي :

$$\text{س جتا } ٢٤٠^\circ + \text{ص جا } ٢٤٠^\circ = ٣$$

مثال (٢) : المجال الكهربائي المنتظم يُمثّل بخطوط مستقيمة متوازية. وإذا كان طول العمود النازل من نقطة الأصل على أحد هذه الخطوط يساوي ٥ وحدات وزاويته ٣٠° مع المحور السيني، اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمثّل أحد خطوط المجال الكهربائي في الصيغة العمودية.

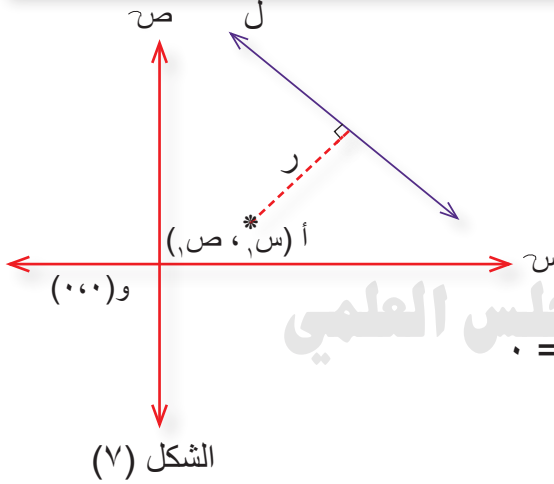
الحل : طول العمود $r = ٥$ وحدات ، زاوية ميل العمود مع المحور السيني $هـ = ٣٠^\circ$
معادلة الخط المستقيم في الصيغة العمودية هي : $س جتا هـ + ص جا هـ = ر$ بالتعويض المباشر نحصل على : $س جتا ٣٠^\circ + ص جا ٣٠^\circ = ٥$
∴ معادلة الخط المستقيم الذي يمثّل أحد خطوط المجال الكهربائي في الصيغة العمودية هي : $س جتا ٣٠^\circ + ص جا ٣٠^\circ = ٥$

تمارين (٢-٦)

- اكتب معادلة الخط المستقيم في الصيغة العمودية إذا علمت أن $ر$ يمثّل طول العمود النازل من نقطة الأصل و أن $هـ$ تمثّل زاوية ميل هذا العمود فيما يلي :
 أ. $ر = ٧$ ، $هـ = ٤٥^\circ$ ب. $ر = ١١$ ، $هـ = ١٢٠^\circ$
 ج. $ر = ٩$ ، $هـ = ٢١٠^\circ$ د. $ر = ٨$ ، $هـ = ٣١٥^\circ$
- اكتب المعادلات التالية في الصيغة العمودية :
 أ. $٣\sqrt{٦} س + ٣ ص + ٩ = ٠$ ب. $س - ٢ ص = ٦$
 ج. $٣ س - ٤ ص + ١٥ = ٠$ د. $٣\sqrt{٦} س + ص - ٢ = ٠$
- يريد مهندس معماري تصميم حائط مستقيم علي بُعد عمودي ٤ أمتار من نقطة الأصل بحيث يصنع العمود النازل من نقطة الأصل على الحائط زاوية قياسها ٦٠° مع المحور السيني الموجب جد معادلة الخط المستقيم الذي يمثّل الحائط.

(٢ - ٨) طول العمود النازل من نقطة معلومة على مستقيم معلوم :

The Length of the Perpendicular from a Given Point to a Given Straight Line



أنظر إلي الشكل (٧)

إذا كانت النقطة أ(س, ص) ،

لا تنتمي للمستقيم ل الذي معادلته

هي : أ س + ب ص + ج = ٠

فإن طول العمود ر النازل من

النقطة المعلومة أ(س, ص) إلي

المستقيم المعلوم أ س + ب ص + ج = ٠

يُعطى بالعلاقة :

$$r = \frac{|أس + ب ص + ج|}{\sqrt{ب^2 + أ^2}}$$

حيث أ $\equiv$ معامل س في المعادلة أ س + ب ص + ج = ٠

ب $\equiv$ معامل ص في المعادلة أ س + ب ص + ج = ٠

ج $\equiv$ الحد المطلق في المعادلة أ س + ب ص + ج = ٠

(س, ص) $\equiv$ إحداثيا النقطة المعلومة

مثال (١) : جد طول العمود النازل من النقطة (٤ - ، ٥) إلي المستقيم :

$$٣س - ٤ ص + ٨ = ٠$$

الحل : أ = ٣ ، ب = - ٤ ، ج = ٨ ، (س, ص) = (٤ - ، ٥)

طول العمود ر = $\frac{|أس + ب ص + ج|}{\sqrt{ب^2 + أ^2}}$ وبالتعويض المباشر نحصل على :

$$٨ = \frac{٤٠}{\sqrt{٢٥}} = ر \leftarrow ر = \frac{|٨ + (٥ - \times -٤) + ٤ \times ٣|}{\sqrt{٢(٤ -)^2 + ٣^2}}$$

∴ طول العمود = ٨ وحدات

مثال (٢): إذا كان طول العمود النازل من النقطة (٣، ١) إلى المستقيم :

$$٣س - ٤ص + هـ = ٠ \text{ يساوي وحدتان جد قيمة هـ؟}$$

الحل: أ = ٣ ، ب = ٤ - ، ج = هـ ، (س، ص) = (٣، ١) ، ر = ٢
 طول العمود ر = $\frac{|أس + بص + ج|}{\sqrt{٢ب + ٢أ}}$ وبالتعويض المباشر نحصل على :

$$٥ = هـ \Leftarrow ١٠ = ٤ص + هـ \Leftarrow \frac{|٥ + ١٠|}{\sqrt{٢٥}} = ٢ \Leftarrow \frac{|٥ + ١ \times (٤ -) + ٣ \times ٣|}{\sqrt{٢(٤ -) + ٢ \times ٣}} = ٢$$

∴ قيمة هـ = ٥ (أيضاً هـ = ١٥ سوف تدرسها في الوحدة التالية)

مثال (٣): أثبت أن المستقيمين : ٣س - ٤ص - ١٢ = ٠ ،

$$٦س - ٨ص + ٢١ = ٠ \text{ متوازيين ثم جد البعد بينهما.}$$

$$\text{الحل:} ∴ ل : ٣س - ٤ص - ١٢ = ٠ \Leftarrow \frac{٣}{٤} = \frac{٣-}{٤-} = \frac{أ-}{ب-} = م_١ \Leftarrow ٠ = ١٢ - ٤ص - ٣س$$

$$∴ ل : ٦س - ٨ص + ٢١ = ٠ \Leftarrow \frac{٦}{٨} = \frac{٦-}{٨-} = \frac{أ-}{ب-} = م_٢ \Leftarrow ٠ = ٢١ - ٨ص - ٦س$$

∴ م = م (شرط توازي)

∴ المستقيمان متوازيان.

لإيجاد البعد بين المستقيمين المتوازيين يمكننا أخذ نقطة إختيارية على أحد المستقيمين

$$\text{وليكن ل : } ٣س - ٤ص - ١٢ = ٠$$

$$\text{بوضع س = ٠} \Leftarrow ٣ = ٤ص \Leftarrow (٣، ٠) = (س، ص)$$

عليه نجد بعد النقطة (٣، ٠) عن المستقيم ل : ٦س - ٨ص + ٢١ = ٠

$$\Leftarrow أ = ٦ ، ب = ٨ - ، ج = ٢١ ، (س، ص) = (٣، ٠) ، ر = ؟$$

$$\text{طول العمود ر} = \frac{|أس + بص + ج|}{\sqrt{٢ب + ٢أ}} \text{ بالتعويض المباشر نحصل على :}$$

$$\frac{٩}{٢} = ر \Leftarrow \frac{٤٥}{١٠} = ر \Leftarrow \frac{|٤٥|}{\sqrt{٢(٨-) + ٢٦}} = ر \Leftarrow \frac{|٢١ + (٣- \times ٨-) + (٠ \times ٦)|}{\sqrt{٢(٨-) + ٢٦}} = ر$$

∴ البعد بين المستقيمين يساوي $\frac{٩}{٢}$ وحدة.

مثال (٤): يريد مهندس معماري تصميم حائط مستقيم في غرفة، وكان الحائط ممثلاً في مخطط هندسي بالمعادلة: $٤س - ٥ص + ٢ = ٠$ تم وضع ركيزة انشائية في موضع النقطة $(٣، ١)$ في المخطط. احسب المسافة العمودية بين الركيزة والحائط **الحل:** $أ = ٤$ ، $ب = ٥$ ، $ج = ٢$ ، $(س، ص) = (٣، ١) = (٣، ١ - ٤)$

طول العمود $ر = \frac{|أس + ب ص + ج|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$ وبالتعويض المباشر نحصل على :

$$ر = \frac{|٢ + (١ - ٥) + (٣ \times ٤)|}{\sqrt{٤^2 + ٥^2}} = ر \Leftarrow ر = \frac{١٩}{\sqrt{٤١}} = \frac{١٩١}{\sqrt{٤١٠}}$$

∴ المسافة العمودية بين الركيزة والحائط $= \frac{١٩}{\sqrt{٤١}}$ وحدة.

تمرين (٢-٧)

١. جد بعد النقطة $(٥، ١)$ عن المستقيم الذي معادلة $٣س - ٤ص = ٤$

٢. جد بعد النقطة $(٠، ٠)$ عن المستقيم $\frac{ص}{٢} + \frac{س}{٣} = ١$

٣. جد بعد النقطة $(٣، -٤)$ عن المستقيم $٢(س + ٦) = ٥(ص - ٢)$

٤. جد بعد النقطة $(أ، ب)$ عن المستقيم $\frac{ص}{ب} + \frac{س}{أ} = ١$

٥. جد بعد نقطة الأصل عن المستقيم الذي معادلته: $١٢س + ٥ص - ٢٦ = ٠$

٦. جد بعد النقطة $ب(٠، ٢)$ عن المستقيم المار بالنقطتين $أ(١، -١)$ ، $ب(٣، ٥)$.

٧. جد البعد بين المستقيمين المتوازيين :

$$ل_١ : س + ٢ص = ٣$$

$$ل_٢ : ٤ص + ٢س = ٦$$

١. معادلة المحور السيني : $v = 0$
٢. معادلة المحور الصادي : $s = 0$
٣. معادلة الخط المستقيم الموازي للمحور السيني ويبعد عنه مسافة قدرها b هي :
 $v = b$.
٤. معادلة الخط المستقيم الموازي للمحور الصادي ويبعد عنه مسافة قدرها a هي :
 $s = a$.
٥. معادلة الخط المستقيم بصيغة النقطتين هي : $\frac{v - v_1}{s - s_1} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1}$
٦. معادلة الخط المستقيم بصيغة الميل والنقطة هي : $v - v_1 = m(s - s_1)$.
٧. معادلة الخط المستقيم بصيغة الميل و الجزء المقطوع من المحور الصادي هي :
 $v = ms + j$.
٨. معادلة الخط المستقيم في صيغة المقطعين هي : $1 = \frac{v}{b} + \frac{s}{a}$
٩. معادلة الخط المستقيم بصيغة العمود النازل عليه من نقطة الأصل وزاوية ميله هي :
 $s \text{ جتا } \theta + v \text{ جا } \theta = r$.
١٠. من معادلة الخط المستقيم $as + bv + c = 0$:
 أ. الميل $= \frac{-a}{b} = \frac{\text{معامل } s}{\text{معامل } v}$
 ب. الجزء المقطوع من المحور السيني $= \frac{-c}{b} = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } s}$
 ج. الجزء المقطوع من المحور الصادي $= \frac{-c}{a} = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } v}$
١١. طول العمود النازل من نقطة معلومة على مستقيم معلوم :

$$r = \frac{|as_1 + bs_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تمارين (٢-٨)

١. جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٢،٣) و (٤،٧).
٢. اكتب معادلة المستقيم الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة (١،٤).
٣. جد معادلة المستقيم الذي ميله ٣ والجزء المقطوع من المحور الصادي هو ٩ وحدات .
٤. اكتب معادلة المستقيم الموازي للمستقيم $ص = ٢س + ١$ و يمر بالنقطة (٣،٢).
٥. جد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم $ص + س = ٢$ و يمر بالنقطة (١،٠).
٦. جد طول العمود المرسوم من النقطة (١،٢) إلى المستقيم $٣س + ٤ص = ٥$.
٧. جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٥،٢) و يوازي محور الصادات.
٨. جد الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي للمستقيم $٢س - ٣ص = ٦$.
٩. جد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٢،٣) و (٤،٥) ويمر بالنقطة (١،١).
١٠. اكتب معادلة المستقيم الموازي للمستقيم $ص + س = ٣$ و يمر بمنتصف القطعة المستقيمة المارة بالنقطتين (١،٢) و (٣،٤).
١١. جد المقطعين السيني والصادي للمستقيم $٤س - ٢ص = ٨$ واكتب معادلته في الصورة العمودية.
١٢. احسب البعد بين المستقيمين المتوازيين $ص + س = ١$ و $٣ + ص = ٠$.
١٣. اكتب معادلة المستقيم الذي مقطعه السيني ٢ وحدة ومقطعه الصادي ٣ وحدات ثم حوّلها في الصورة العمودية.

مراجعة المجلس العلمي

الوحدة الثالثة

المتباينات والبرمجة الخطية

Inequalities and Linear Programming

أهداف الوحدة:

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١. يعرف معادلة القيمة المطلقة رياضياً ويمثلها بيانياً .
٢. يتعرف خواص القيمة المطلقة.
٣. يحل معادلة القيمة المطلقة.
٤. يحل متباينة القيمة المطلقة.
٥. يعرف المتباينة الخطية بمتغيرين ويمثلها بيانياً.
٦. يحل نظام المتباينات بمتغيرين ويحدد منطقة الحلول الممكنة.
٧. يحل مسائل البرمجة الخطية.
٨. يطبق المتباينات والبرمجة الخطية على مسائل حياتية.

لماذا ندرس المتباينات ؟

- لأن أهمية المتباينات تكمن في استخدامها في التعبير عن العلاقات التي تتضمن قيماً محدودة وهو أمر ضروري في العديد من المواقف الحياتية والعلمية مثل:
١. تحديد الحد الأدنى أو الأقصى لعمر شخص للحصول على وظيفة معينة
 ٢. تحديد حدود الميزانية المتاحة لمشروع معين (المبلغ الأقصى الذي يمكن إنفاقه)
 ٣. مقارنة التكاليف والأسعار.
 ٤. تحديد نطاقات التشغيل للمكونات الكهربائية في الأجهزة الالكترونية.
 ٥. تساعد في تحليل البيانات وتحديد النطاق الذي تقع فيه القيم مما يساعد في اتخاذ قرارات صحيحة وعلمية.

١-٣) المعارف السابقة المكتسبة : Previously Acquired knowledge

في دراستنا للمتباينات بالصف الثاني المتوسط تعرّفنا أنّ المتباينة هي جملة رياضية تحوي أحد رموز التباين $>$ ، $<$ ، $\geq$ ، $\leq$ ، وأنّ مجموعة حلها هي مجموعة الأعداد التي تجعل الجملة صحيحة ، كما تعرّفنا أيضاً على الخواص التالية للتباين :

١/ إذا كان $س > ص$ ، $أ \in ح$ ، فإنّ $س + أ > ص + أ$ أي أنّ إضافة عدد حقيقي لطرفي المتباينة لا يغيّر رمز المتباينة وكذلك مع الطرح.

٢/ إذا كان :

س $>$ ص ، أ عدد حقيقي موجب فإنّ $أ س > أ ص$

س $>$ ص ، أ عدد حقيقي سالب فإنّ $أ س < أ ص$

رمز المتباينة يظل كما هو عند ضرب الطرفين في العدد الموجب ولكنه ينعكس عند الضرب في العدد السالب.

٣/ إذا كان أ ، ب $\in ح$ وكان :

$$أ > ب \text{ فإن } : \frac{1}{أ} < \frac{1}{ب} \quad أ < ب \text{ فإن } : \frac{1}{أ} > \frac{1}{ب}$$

تمرين (٣ - ١)

١/ عبّر رمزياً عن المتباينات الآتية :

أ. زمن حل الامتحان لا يزيد عن ساعتين .

ب. ناتج جمع عدد وثلاثة أمثاله يزيد عن مثليه .

ج. للحصول على خصم على المشتريات يجب أن تتجاوز مشترواتك ٢٠٠٠٠ جنيه.

٢/ حل المتباينات الآتية ومثّل الحل هندسياً :

أ. $٢ س + ٣ > ١٥$ ب. $١ - ٣ س \geq ٢٢$ ج. $٧ س + ١٢ < ٦ س + ٨$

د. $١ > ٨ - ٢ س$ هـ. $٣ س + ١٠ \geq ٦ س + ٤$ و. $٢ س + ٢٨ > ٤$

٣/ مثلث قائم الزاوية مساحته لا تقل عن ٣٦ سم^٢ إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة يساوي ٦ سم ، فما أقل قيمة صحيحة يأخذها طول الضلع الآخر للزاوية القائمة ؟

٤/ عُمر تلميذ يزيد عن عُمر أخيه بثمانى سنوات فإذا كان مجموع عُمرهما أقل من ٣٠ سنة ، فما أكبر قيمة صحيحة يمكن أن يأخذها عُمر التلميذ ؟

القيمة المطلقة :

نعلم من دراستنا السابقة أنَّ القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي غير سالبة ، تتمثل بُعد العدد عن الصفر .

يمكننا تعريف القيمة المطلقة رياضياً كالآتي :

$$|s| = \begin{cases} s & \text{إذا كان } s \geq 0 \\ -s & \text{إذا كان } s < 0 \end{cases}$$

مثلاً : $5 = |5|$ ، $5 = |-5|$ ، $0 = |0|$ ، $3 = |3|$ فإنَّ قيمة $s = 3$ أو $s = -3$

بعض خواص القيمة المطلقة :

إذا كان a ، $b \in \mathbb{R}$ فإنَّ :

$$(1) |a| = |-a|$$

$$(2) |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$(3) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{بشرط } b \neq 0$$

$$(4) |a| + |b| \geq |a + b|$$

لتحقيق الخاصية (٤) :

$$(أ) 8 = |8| = |3 + 5|$$

$$8 = 3 + 5 = |3| + |5|$$

$$(ب) 2 = |2| = |3 - 5|$$

$$|3 - 5| = |3 - 5|$$

$$8 = 3 + 5 = |3| + |5| =$$

$$|3 - 5| \geq |3 - 5|$$

تحقق من الخواص ٢ ، ٣

التمثيل البياني لمعادلة القيمة المطلقة :

معادلة القيمة المطلقة هي المعادلة التي يكون فيها المتغير واقعاً داخل رمز القيمة المطلقة.

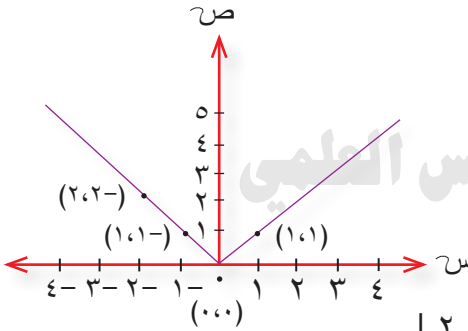
(أ) لتمثيل المعادلة $|س| = ص$ بيانياً

نحدد القيمة التي تجعل دالة القيمة المطلقة تساوي صفر (تُسمّى صفر الدالة)

$$س = ٠$$

$$س > ٠$$

$$س \leq ٠$$



ص	س
١	١ -
٢	٢ -

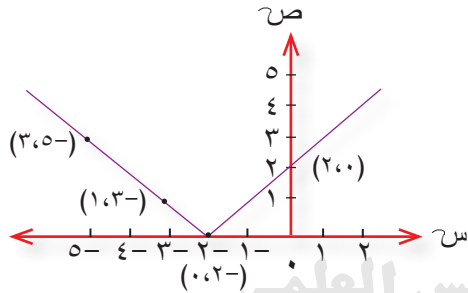
ص	س
٠	٠
١	١

(ب) لتمثيل المعادلة : $|س + ٢| = ص$

النقطة $س = -٢$ هي صفر الدالة $|س + ٢|$

$$س > -٢$$

$$س \leq -٢$$



ص	س
١	٣ -
٣	٥ -

ص	س
٢ -	٠
٠	٢

حل معادلة القيمة المطلقة

مثال (١): حل المعادلتين الآتيتين جبرياً وهندسياً :

(أ) $|س - ٢| = ٣$ (ب) $|س + ٣| = ٧$

الحل : (أ) جبرياً : من تعريف القيمة المطلقة نجد أن :

$$س - ٢ = ٣ \quad \text{أو} \quad س - ٢ = -٣$$

$$\therefore س = ٥ \quad \text{أو} \quad س = -١$$

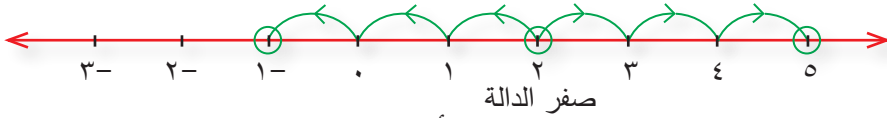
يكون الحل $س = ٥$ أو $س = -١$

هندسياً :

$$\text{نجد صفر الدالة} \Leftrightarrow \text{س} - 2 = 0$$

$$\therefore \text{س} = 2$$

من نقطة صفر الدالة على الخط العددي (س = 2) نتحرك 3 وحدات على اليمين واليسار فيكون :



$$\text{فيكون الحل س} = 2 \text{ أو س} = -1$$

(ب) القيمة المطلقة عدد حقيقي غير سالب .

الطرف الأيسر عدد سالب $\Leftrightarrow$ لا توجد قيمة تحقق المعادلة ويكون الحل $\emptyset$

مثال (٢) : حل المعادلة : $| \text{س} + 3 | = | \text{س} - 8 |$

الحل : من تعريف القيمة المطلقة نجد أن :

$$(1) \quad \text{س} + 3 = \text{س} - 8$$

$$(2) \quad \text{س} + 3 = -(\text{س} - 8) \Rightarrow \text{س} + 3 = -\text{س} + 8$$

المعادلة (١) : حلها $\emptyset$ (لماذا)

$$\text{المعادلة (٢) : } \text{س} + 3 = -\text{س} + 8 \Rightarrow 2\text{س} = 5 \Rightarrow \text{س} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \text{الحل : } \text{س} = \frac{5}{2}$$

مثال (٣) : توقع الارصاد الجوي ارتفاع درجة الحرارة في يوم ما الى 32°م بزيادة أو نقصان 2°م . ما المدى المتوقع لدرجات الحرارة في ذلك اليوم .

الحل : نفرض أن درجة الحرارة $^\circ \text{س}$

$$\text{المدى يمثل بالمعادلة : } 2 = | 32 - \text{س} |$$

$$\text{أقل قيمة : } \text{س} - 32 = 2 \Rightarrow \text{س} = 34^\circ \text{م}$$

$$\text{س} = 32 + 2 = 34^\circ \text{م}$$

$$\text{أكبر قيمة : } \text{س} - 32 = -2 \Rightarrow \text{س} = 30^\circ \text{م}$$

$$\text{س} = 32 - 2 = 30^\circ \text{م}$$

مدى درجات الحرارة في ذلك اليوم من 30°م إلى 34°م

تمرين (٢ - ٣)

(١) حل كلاً من المعادلتين التاليتين جبرياً وهندسياً :

أ/ $2 = |3 + س|$

ب/ $10 = |2 + س|$

(٢) حل المعادلات التالية :

أ/ $10 = |س| + 3 + 4$

ب/ $16 = 12 + \left| \frac{4}{س} \right|$ ، $س \neq 0$

ج/ $0 = |1 + س| + 5$

د/ $|س - 3| = |5 + س|$

(٣) مستوى السُّكر في الانسان يكون طبيعياً إذا كان قياسه ٧٨ ملجم / دسل بزيادة أو نقصان ١٢ ملجم / دسل ، جد الحدين الأعلى والأدنى لمستوى السُّكر الطبيعي في جسم الانسان ؟

مراجعة المجلس العلمي

Absolute Value Inequality

(٢ - ٣) متباينة القيمة المطلقة :

هي المتباينة التي يكون فيها المتغير واقعاً داخل رمز القيمة المطلقة .

متباينة القيمة المطلقة ($>$ ، $\geq$) :

المتباينة $|س| > أ$ تعني أن المسافة بين س والصفر أقل من أ



إذن $س < -أ$ و $س > أ$ وتكون مجموعة حلها هي $\{س : -أ < س < أ\}$ ويمكن كتابتها في صورة فترة $(-أ، أ)$.

وعند حل متباينة القيمة المطلقة هناك حالتين يجب أن تؤخذ في الاعتبار:

الحالة الأولى: المقدار داخل القيمة المطلقة موجباً .

الحالة الثانية: المقدار داخل القيمة المطلقة سالباً .

مثال (١):

حل المتباينة $|س + ٢| \geq ٤$ ومثل مجموعة الحل بيانياً.

الحل :

الحالة الأولى : $س + ٢$ موجبة و الحالة الثانية : $س + ٢$ سالبة

$$س + ٢ \geq ٤ \quad \text{و} \quad - (س + ٢) \geq ٤$$

$$س \geq ٢ \quad \text{و} \quad س \leq -٦$$

$$س \geq ٢ \quad \text{و} \quad س \leq -٦$$

$$\therefore س \geq ٢ \quad \text{و} \quad س \leq -٦$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي: $\{س : س \geq ٢ \text{ و } س \leq -٦\}$ و على صورة فترة تكتب $[-٦، ٢]$



متباينة القيمة المطلقة ($<$ ، $\leq$):

المتباينة $|س| < أ$ تعني أن المسافة بين س والصفر أكبر من أ



إذن $س < أ$ أو $س > -أ$ وتكون مجموعة حلها هي $\{س: س < أ \vee س > -أ\}$ ويمكن كتابتها في صورة فترة $(-أ, أ) \cup (-\infty, -أ) \cup (أ, \infty)$ ومثل مجموعة الحل بيانياً.

الحل: الحالة الأولى: $س - ٤ \leq ٥$ أو الحالة الثانية: $س - ٤ \geq ٥$

$$\begin{aligned} س - ٤ &\leq ٥ & س - ٤ &\geq ٥ \\ س &\leq ٩ & س &\geq ٩ \end{aligned}$$

$$\therefore س \leq ٩ \text{ أو } س \geq ٩$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي: $\{س: س \leq ٩ \vee س \geq ٩\}$

وعلى صورة فترة تكتب $[-٩, ٩] \cup (-\infty, -٩) \cup (٩, \infty)$



كتابة المتباينة في صورة القيمة المطلقة :

لكتابة المتباينة $b \geq s \geq a$ في صورة القيمة المطلقة:
نوجد متوسط الطرفين $\frac{a+b}{2}$

نطرح متوسط الطرفين من المتباينة :

$$b - \frac{a+b}{2} \geq s - \frac{a+b}{2} \geq a - \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{2b - a - b}{2} \geq s - \frac{a+b}{2} \geq \frac{2a - a - b}{2}$$

$$\frac{b - a}{2} \geq s - \frac{a+b}{2} \geq \frac{a - b}{2}$$

$$-\frac{a - b}{2} \geq s - \frac{a+b}{2} \geq \frac{b - a}{2}$$

$$\therefore \left| s - \frac{a+b}{2} \right| \geq \frac{b - a}{2}$$

مثال (٢): اكتب المتباينة التالية في صورة القيمة المطلقة :

$$8 \geq 3s + 2 \geq 14$$

$$\text{الحل: متوسط الطرفين } 11 = \frac{22}{2} = \frac{14 + 8}{2}$$

نطرح ١١ من كل الأطراف في المتباينة :

$$8 - 11 \geq 3s + 2 - 11 \geq 14 - 11$$

$$-3 \geq 3s - 9 \geq 3$$

$$3 \geq |3s - 9|$$

مثال (٤): مصنع لقطع الغيار الاسطوانية ، يعتمد معيار جودة الإنتاج أن يكون قطر

قطع الغيار قريباً من ١٠ سم بحد أقصى ٠,٥ سم . عبّر رياضياً عن المعيار ومن ثم

جد الحد المسموح به لقطر قطع الغيار حسب المعيار ؟

الحل: نفرض أن قطر قطعة الغيار s سم

الشرط (المعيار) $|s - 10| \geq 0,5$

$$(10+) \quad 0,5 \geq s - 10 \geq 0,5$$

$$9,5 \geq s \geq 10,5$$

تمرين (٢-٢)

١- جد مجموعة حل المتباينات التالية ومثل الحل بيانياً :

أ/ $| ٢ - ٥ | + ٣ > ١١$

ب/ $| ٧ - س | < ٨$

ج/ $| \frac{١}{٢} - س | > ١$

د/ $| ٢ - ٢ س | \geq ٦$

ه/ $| س + ٢ | \leq ٣$

٢- اكتب المتباينتين التاليتين في صورة القيمة المطلقة :

أ/ $٨ - س \geq ٦ - ٤ س \geq ٢$

ب/ $| ٣ س - ٥ | > ٧$ ، $| ٣ س - ٥ | < ١$

٣- إذا كانت درجات الطلاب في اختبار ما تتراوح بين ٤٠ ، ٩٠ درجة فاكتب متباينة قيمة مطلقة تعبر عن مدى الدرجات ؟

مراجعة المجلس العلمي

Linear Inequality In Two Variables : المتباينة الخطية بمتغيرين : (٣-٤)

تُسمَّى المتباينة في متغيرين خطية إذا كان كلاهما من الدرجة الأولى ولا تحوى حاصل ضربهما .
المتباينات : $٢س + ص > ٧$ ، $٥س < ٣ - ٢ص$ خطية

بينما المتباينات : $ص > ١ + ٢س$ ، $\frac{١}{ص} < ٣ + ص$ ليست خطية (لماذا)

حل المتباينة الخطية بمتغيرين هو مجموعة كل الأزواج المرتبة (س ، ص) التي تحقق المتباينة ، و تمثل هندسياً بمنطقة على المستوى الإحداثي تُسمَّى منطقة الحلول الممكنة.
مثال : هل النقطة (٢ ، ٣) تمثل حل (تقع في منطقة الحلول الممكنة) للمتباينة

$٣س - ص < ٦$
الحل : بتعويض $س = ٢$ ، $ص = ٣$ في المتباينة ينتج :

$$٦ < ٣ - ٢ \times ٣$$

$$٦ < ٣ \quad (\text{جملة غير صحيحة})$$

∴ النقطة (٢ ، ٣) لا تمثل حل للمتباينة

لاحظ أنَّ النقطة (٢ ، ٣) تمثل حل للمتباينة (لماذا) ؟

تمثيل المتباينة الخطية بمتغيرين بيانياً :

لتمثيل المتباينة أس + ب ص + ج ≥ ٠

أولاً : نرسم المستقيم أس + ب ص + ج = ٠ ويُسمَّى بالمستقيم الحدودي لأنه يقسم المستوى الى جزأين أحدهما منطقة الحلول الممكنة .

قد يكون المستقيم الحدودي جزءاً من منطقة الحلول الممكنة إذا تضمنت المتباينة الرمز ≥ أو ≤ عندئذ يرسم المستقيم الحدودي متصلاً وقد لا يكون المستقيم الحدودي جزءاً من منطقة الحلول الممكنة إذا تضمنت المتباينة الرمز > أو < وعندئذ يرسم المستقيم الحدودي بخطوط منقطعة.

ثانياً : لتحديد أي المنطقتين على جانبي المستقيم الحدودي هي منطقة الحلول الممكنة، نختار نقطة (س_١ ، ص_١) لا تقع على المستقيم الحدودي ثم نعوض إحداثيات النقطة في المتباينة ، إذا كانت (س_١ ، ص_١) تحقق المتباينة (ينتج عن التعويض جملة صحيحة) نظل الجزء من المستوى الإحداثي الذي تقع فيه النقطة وإلا نظل الجزء الآخر من المستوى الإحداثي الذي لا تقع فيه تلك النقطة.

مثال (١): أرسم المنطقة التي تمثل حل المتباينات التالية.

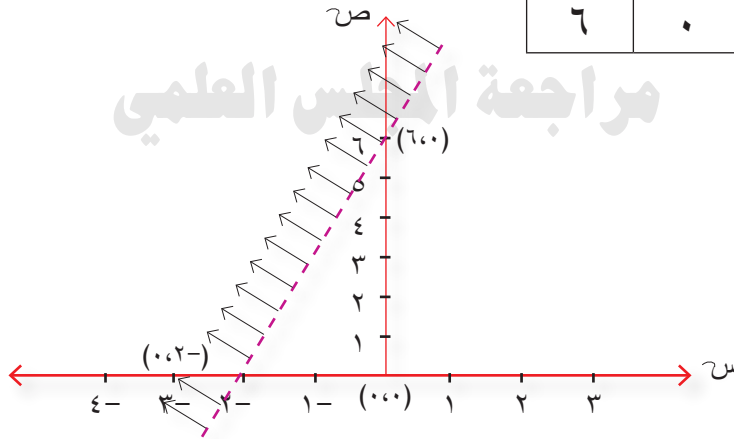
أ/ $ص < ٣ + ٦$

ب/ $ص \geq ٢$

الحل :

أ/ نرسم المستقيم $ص = ٣ + ٦$

٠	٢ -	س
٦	٠	ص



لتحديد منطقة الحلول الممكنة نختار النقطة $(٠, ٠)$ (لا تقع على المستقيم)

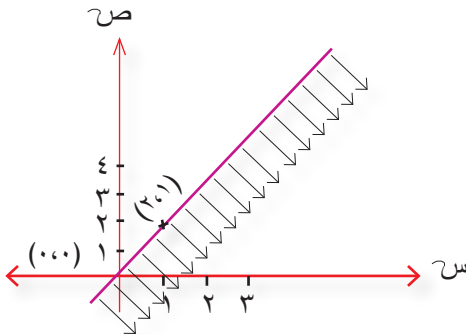
بتعويض الاحداثيات في المتباينة

ينتج $٠ < ٦$ (جملة غير صحيحة)

منطقة الحلول هي المنطقة التي لا تقع فيها النقطة $(٠, ٠)$

ب/ نرسم المستقيم $ص = ٢$

١	٠	س
٢	٠	ص



لتحديد منطقة الحلول الممكنة نأخذ النقطة

$(٠, ٢)$ مثلاً ويكون ناتج التعويض $٤ \geq ٠$

(جملة صحيحة). منطقة الحلول الممكنة هي

المنطقة التي تقع فيها النقطة $(٠, ٢)$

مثال (٢) : إذا علمت أن نجّاراً يريد شراء كمية من خشب الزان و المهوقني لا يزيد ثمنها عن ٧٢٠٠٠٠ جنيه. فإذا كان ثمن الوحدة من خشب الزان ٤٠٠٠٠ جنيه ومن خشب المهوقني ٦٠٠٠٠ جنيه. اكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل كمية الخشب التي يمكن للنجّار شراؤها من كل نوع ، ثم مثّلها وبيّن منطقة الحلول الممكنة.

الحل : نفرض أن النجّار اشترى س وحدة من خشب الزان

نفرض أن النجّار اشترى ص وحدة من خشب المهوقني

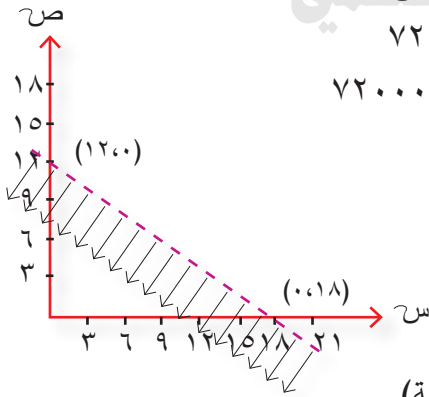
ثمن س وحدة من خشب الزان = ٤٠٠٠٠ س جنيه

ثمن ص وحدة من خشب المهوقني = ٦٠٠٠٠ ص جنيه

جملة ما يدفعه النجّار : ٤٠٠٠٠ س + ٦٠٠٠٠ ص

المتباينة : ٤٠٠٠٠ س + ٦٠٠٠٠ ص $\geq$ ٧٢٠٠٠٠

نرسم المستقيم ٤٠٠٠٠ س + ٦٠٠٠٠ ص = ٧٢٠٠٠٠

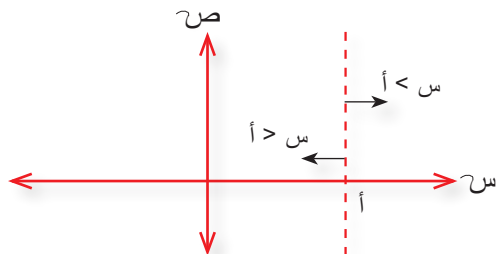
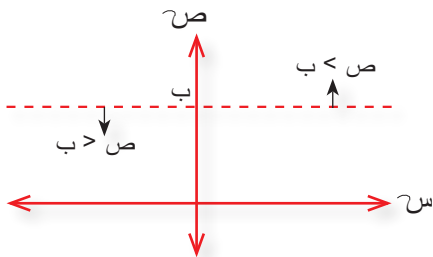
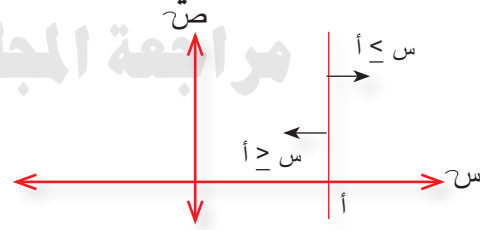
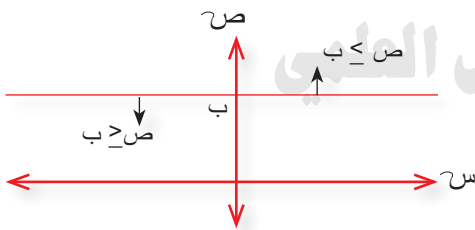


س	١٨	٠
ص	٠	١٢

لتحديد منطقة الحلول نأخذ النقطة (٠،٠)

نتائج التعويض : ٧٢٠٠٠٠ $\geq$ ٠ (جملة صحيحة)

تمثيل المتباينة الخطية في متغير واحد بيانياً :



تمرين (٢ - ٤)

(١) حدّد ما إذا كان كل زوج مرتب مما يأتي ممثلاً حلاً للمتباينة : $-٢ \text{ س} + ٣ \text{ ص} > ٣$
أ. $(١, ٤)$ ب. $(٢, ١)$ ج. $(١, ٠)$

(٢) مثّل منطقة حل كلاً من المتباينات التالية بيانياً :

أ. $٣ \text{ س} + ٤ \text{ ص} \leq ١٢$ ب. $٢ \text{ س} - ٣ \text{ ص} < ٣$

ج. $٢ \text{ ص} - ٢ \text{ س} < ٢$ د. $٤ \text{ ص} \leq ٤$

هـ. $٢ > \text{س}$ و. $٦ \geq |٣ \text{ س}|$

(٣) إذا علمت أن طالب يقضي ١٢٠ دقيقة على الأكثر لإنهاء الواجب في مادتي الرياضيات والفيزياء.

اكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثّل عدد الدقائق التي يمكن أن يقضيها في حل واجب المادتين ثم مثّلها في المستوى الاحداثي و بيّن منطقة الحل.

مراجعة المجلس العلمي

(٣ - ٥) حل نظام المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً:

Solving a System of Linear Inequalities in Two Variables Graphically

يشتمل نظام المتباينات الخطية على متباينتين أو أكثر. منطقة الحلول الممكنة للنظام هي المنطقة المشتركة بين حلول كل متباينات النظام ، يكون حل النظام بإيجاد الأزواج المرتبة التي تحقق جميع المتباينات معاً.

مثال (١) :

أرسم منطقة حل كل من النظامين التاليين :

أ. $2 \leq 3 - 2x + 6 \leq 0$ ،
 ب. $5 > \frac{5}{2}x + 0$ ،

الحل :

أ / أولاً : نرسم المستقيم $2 = 3 - 2x + 6$ ونحدد منطقة الحل.

لتحديد منطقة الحل نأخذ النقطة $(0, 0)$

ناتج التعويض $2 \geq 0$ (جملة صحيحة)

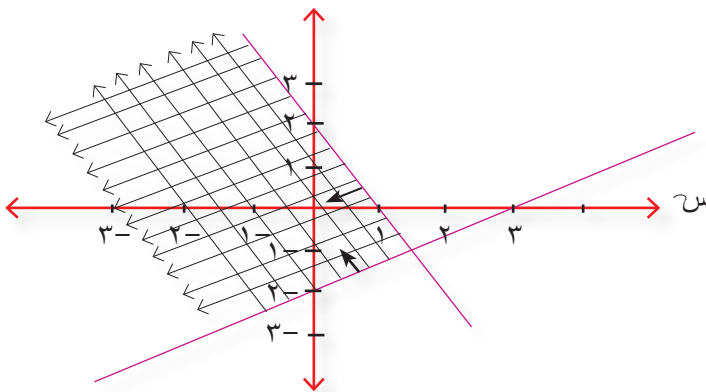
س	١	٠
ص	٠	٢

ثانياً : نرسم المستقيم $0 = 3 - 2x + 6$

س	٣	٠
ص	٠	٢-

نحدد منطقة الحل بأخذ النقطة $(0, 0) \Leftrightarrow$ ناتج التعويض $0 \leq 6$ (جملة صحيحة).

ثم نظل المنطقة المشتركة و هي منطقة مفتوحة



ب / أولاً : نرسم ص = |س| بتعيين ثلاث نقاط .

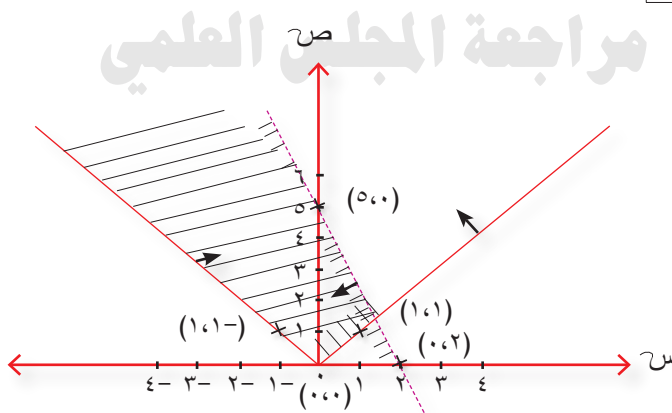
لتحديد منطقة الحل نأخذ النقطة (٢ ، ٠)
ويكون ناتج التعويض $٢ \leq ٠$ (جملة صحيحة)

س	١ -	٠	١
ص	١	٠	١

ثانياً : نرسم المستقيم : ، ص + $\frac{٥}{٢}$ س = ٥

لتحديد منطقة الحل نأخذ النقطة (٠ ، ٠)
ناتج التعويض $٥ > ٠$ (جملة صحيحة) ثم نظل المنطقة المشتركة

س	٢	٠
ص	٥	٠



مثال (٢) : أرسم منطقة حل النظام التالي :

$$\text{ص} - \frac{١}{٤} \text{س} \geq ٦ + ٤ \quad , \quad \text{ص} - ٢ \text{س} \leq ٨ -$$

$$٤ \text{ ص} + ١٦ \text{ س} + ٣٢ \leq ٠$$

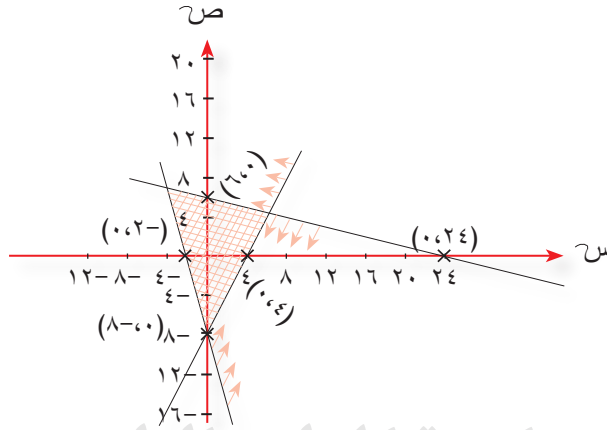
الحل : أولاً نرسم المستقيمت : ص = $\frac{١}{٤}$ س + ٦ + ٤

س	٢٤	٠
ص	٠	٦

$$\text{ص} - ٢ \text{س} = ٨ - \quad , \quad ٤ \text{ ص} + ١٦ \text{ س} + ٣٢ = ٠$$

س	٢ -	٠
ص	٠	٨ -

س	٤	٠
ص	٠	٨ -



نختار النقطة (٠ ، ٠) لتحديد منطقة الحلول الممكنة

ناتج التعويض في المتباينات

$$\text{ص} \geq \frac{1}{4} \text{س} + 6 \Leftrightarrow 0 \leq 6 \quad (\text{جملة صحيحة})$$

$$\text{ص} - 2 \leq 8 \Leftrightarrow 0 \leq 8 \quad (\text{جملة صحيحة})$$

$$4 \text{ ص} + 16 \text{ س} + 32 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 32 \quad (\text{جملة صحيحة})$$

منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المظللة.

مثال (٣): حدّد لاعب كرة قدم ٢٥ ساعة كحد أقصى للتدريب على مهارات اللياقة البدنية ، استلام وتمرير الكرة ، والتحكم في الكرة ، فوضع جدولاً زمنياً لذلك. فخصص ساعتين للياقة البدنية وخصص من ٧ إلى ١٤ ساعة لاستلام وتمرير الكرة أما التحكم بالكرة فخصص له من ٨ إلى ١٢ ساعة.

اكتب نظام المتباينات الذي يُمثّل هذا التدريب ومثّله بيانياً ثم حدّد منطقة الحلول الممكنة ؟

الحل: نفرض أن الزمن المخصص لاستلام الكرة وتمريرها س

نفرض أن الزمن المخصص للتحكم في الكرة ص

النظام : س ≤ 0 ، ص ≤ 0 (عدم السالبية لأن الزمن دائماً بالموجب)

استلام وتمرير الكرة : ٧ $\leq$ س $\leq$ ١٤ ، التحكم في الكرة ٨ $\leq$ ص $\leq$ ١٢

الزمن الكلي : س + ص + ٢ $\geq$ ٢٥ $\Leftrightarrow$ س + ص $\geq$ ٢٣

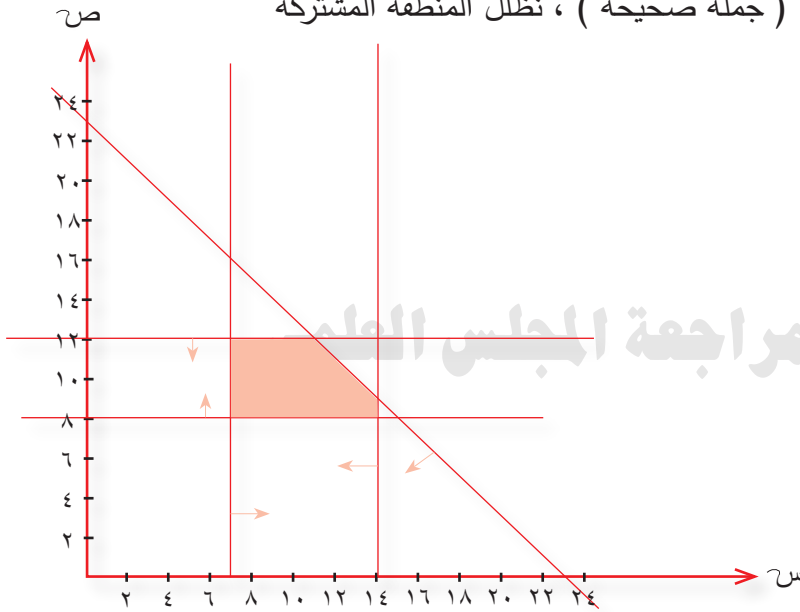
نرسم المستقيمات : س = ٧ ، س = ١٤ ، ص = ٨ ، ص = ١٢

س + ص = ٢٣

نحدد منطقة الحل بتعويض نقطة الأصل في المتباينة س + ص $\geq$ ٢٣

س	٢٣	٠
ص	٠	٢٣

٠ ≥ ٢٣ (جملة صحيحة) ، نظل المنطقة المشتركة



تمرين (٣ - ٥)

١. أرسم منطقة حل كل من الأنظمة التالية :

- أ/ $٢س - ص \geq ٣$ ، $س + ١ < ص$
- ب/ $س - ٢ص \leq ٤$ ، $٢ \leq س \leq ١$ ، $٣ \leq ص$
- ج/ $٢س - ص \geq ٤$ ، $|س| \geq ٣$ ، $|ص| \geq ٣$
- د/ $س + ص \leq ٢$ ، $٣ص > ٢س + ٦$ ، $٦ > س + ٢$
٢. يعمل لدى مصنع صغير للملابس الجاهزة عاملان وينتج هذا المصنع نوعين من الملابس. لأجل صنع قطعة واحدة من النوع الأول يعمل العامل الأول ساعة ويعمل العامل الثاني ساعتان ونصف الساعة ولإنتاج القطعة من النوع الثاني يلزم أن يعمل العامل الأول ٤ ساعات والثاني ساعتين ، فإذا كان العامل الأول لا يعمل أكثر من ٨ ساعات و العامل الثاني لا يعمل أكثر من ١٠ ساعات يومياً. كَوِّن متباينات النظام وظلل منطقة الحل الممكنة.

(٢ - ٦) تطبيقات على التمثيل البياني للمتباينة الخطية بمتغيرين : البرمجة الخطية : Linear Programming

تقوم معظم الأعمال وبصورة خاصة الصناعية منها على تخطيط مسبق والهدف من ذلك تسهيل العمل و تخفيض التكاليف والحصول على أكبر الأرباح وغير ذلك من الأهداف ، تنفيذ هذا التخطيط يسمى برمجة خطية .

تقوم البرمجة الخطية على تمثيل الهدف إن كان زيادة انتاج أو إنقاص التكاليف أو زيادة الأرباح أو غيره بمعادلات ذات متغيرات تسمى دالة الهدف ، يمثل واقع العمل وشروطه بمتباينات القيود (النظام) وسيقتصر تناولنا على تمثيل متباينات القيود بمتباينات خطية بمتغيرين.

كما أن معادلة دالة الهدف ستكون على الشكل : $ك = أ س + ب ص$

لحل مسألة برمجة خطية نحل نظام متباينات القيود فننتوصل إلى منطقة الحلول الممكنة للنظام وقد وجد أن أكبر أو أصغر قيمة لمعادلة دالة الهدف تكون عند أحد رؤوس المضلع الذي يحيط بمنطقة الحلول الممكنة فمثلاً النظام :

$$س + ص \geq 3 , س - ص \leq 3 , ص \leq 0 , 1 - س \geq 2$$

و المطلوب أكبر قيمة وأصغر قيمة لدالة الهدف :

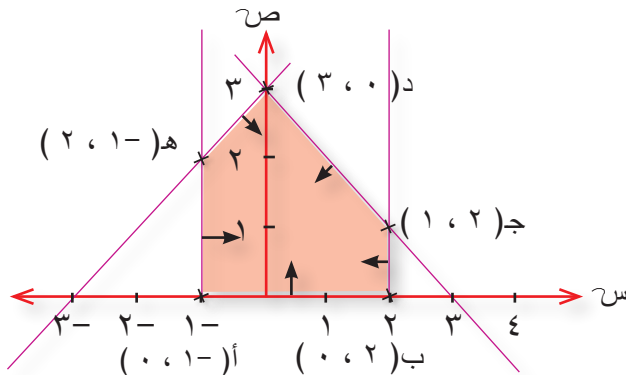
$$ك = 2 س - ص$$

أولاً : نرسم المستقيمات : $س + ص = 3$ ، $س - ص = 3$ ،

٠	٣ -	س
٣	٠	ص

٠	٣	س
٣	٠	ص

ص = ٠ ، س = ١ - ، س = ٢ ثم نحدد منطقة الحل بأخذ النقطة (٠ ، ٠)



منطقة الحلول الممكنة هي المضلع أ ب ج د هـ (المظلل)
إحداثيات رؤوسه هي :

أ (٠ ، ١) ، ب (٠ ، ٢) ، ج (١ ، ٢) ، د (٣ ، ٠) ، هـ (٢ ، ١ -)
ثانياً: لإيجاد أكبر وأصغر قيمة للدالة : ك = ٢ س - ص نعوض إحداثيات النقاط التي تحيط بمنطقة الحلول الممكنة أ ب ج د هـ ينتج :

$$\text{قيمة الدالة عند أ} = ٢ -$$

$$\text{قيمة الدالة عند ب} = ٤$$

$$\text{قيمة الدالة عند ج} = ٣$$

$$\text{قيمة الدالة عند د} = ٣ -$$

$$\text{قيمة الدالة عند هـ} = ٤ -$$

$$\text{أكبر قيمة عند ب (٠ ، ٢) وتساوى ٤}$$

$$\text{أصغر قيمة عند هـ (٢ ، ١ -) وتساوى ٤ -}$$

مثال (١): جمعية طوعية ترغب في عمل سوق خيري لبيع منتجاتها من قمصان رجالية وفساتين نسائية نسبة للزمن المتاح لإقامة السوق الخيري لا يستطيعون تجهيز أكثر من ١٥٠ قميص رجالي ، ١٢٠ فستان نسائي . علماً بأن جملة التبرعات التي حصلوا عليها من الأقمشة كافية لتجهيز ٢٠٠ قطعة من النوعين . فإذا كان القميص الرجالي يباع بسعر ١٠٠٠٠ جنيه والفستان النسائي يباع بسعر ١٥٠٠٠ جنيه ، كم عدد القمصان والفساتين التي يصنعونها ليحصلوا على أكبر دخل ممكن من المبيعات ؟

الحل : نفرض انهم صنعوا س قميص رجالي و ص فستان نسائي

$$\text{عدم السالبة} \quad س \geq ٠ , \quad ص \geq ٠$$

عدم السالبة (المتغيرات غالباً ما تمثل عدد منتجات ، كمية مواد ، ساعات عمل ، تكلفة ، مساحة أو زمن و هذه الكميات لا يمكن أن تكون سالبة)

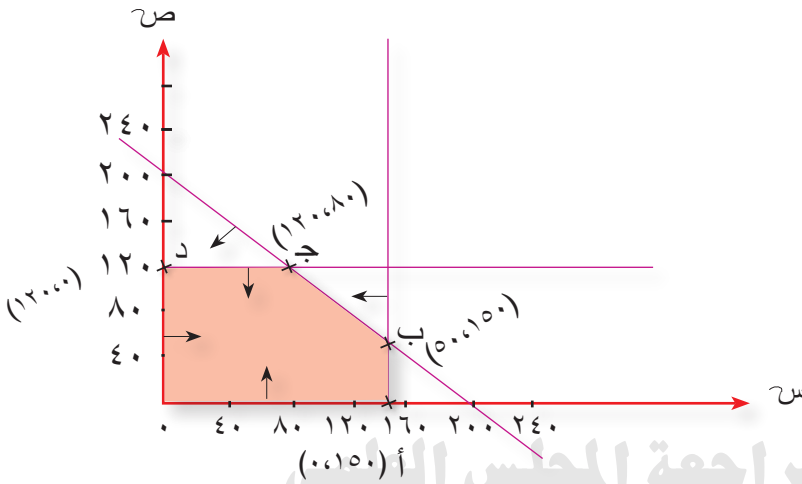
$$\text{القيود} \quad س \geq ١٥٠ , \quad ص \geq ١٢٠ , \quad س + ص \geq ٢٠٠$$

$$\text{دالة الهدف : } ١٠٠٠٠ س + ١٥٠٠٠ ص \text{ (أكبر ما يمكن)}$$

$$\text{نرسم أولاً المستقيمات : } س = ١٥٠ , \quad ص = ١٢٠ ,$$

$$س + ص = ٢٠٠$$

نحدد منطقة الحل بأخذ النقطة (٠ ، ٠) ناتج التعويض $٢٠٠ \geq ٠$ (جملة صحيحة)



رؤوس المضلع الذي يحيط بالمنطقة المظللة (منطقة الحلول الممكنة) :

أ (٠ ، ١٥٠) ، ب (٥٠ ، ١٥٠) ، ج (١٢٠ ، ٨٠) ، د (١٢٠ ، ٠)

قيمة دالة الهدف عند أ = ١٥٠٠٠٠٠

قيمة دالة الهدف عند ب = ٢٢٥٠٠٠٠

قيمة دالة الهدف عند ج = ٢٦٠٠٠٠٠

قيمة دالة الهدف عند د = ١٨٠٠٠٠٠

أكبر قيمة ٢٦٠٠٠٠٠ عند النقطة ج (١٢٠ ، ٨٠)

يصنعوا ٨٠ قميص رجالي و ١٢٠ فستان نسائي

مثال (٢) : يحتاج كيميائي الى ١٠ ، ١٢ ، ١٢ وحدة من المواد الكيميائية أ ، ب ، ج على الترتيب وهي متوفرة في نوعين سائل و بودرة . السائل يحتوى على ١ ، ٢ ، ٥ وحدة في كل زجاجة لكل مادة على الترتيب ، البودرة تحتوى على ١ ، ٢ ، ٤ وحدة على الترتيب في كل علبة لكل مادة . فإذا كان ثمن زجاجة السائل ٩٠٠٠ جنيه و ثمن علبة البودرة ٦٠٠٠ جنيه كم يشتري من كل نوع ليكون ما يدفعه أقل ما يمكن ؟

الحل : نفرض أنه يشتري س زجاجة سائل

نفرض أنه يشتري ص علبة بودرة

عدم السالبية : $س \geq ٠$ ، $ص \geq ٠$

القيود : $٥س + ص \leq ١٠$ ، $٢س + ٢ص \leq ١٢$

$س + ٤ص \leq ١٢$

دالة الهدف : ك = ٩٠٠٠ س + ٦٠٠٠ ص (أقل ما يمكن)

لتمثيل النظام نرسم المستقيمات :

$$٥ س + ص = ١٠ , ٢ س + ٢ ص = ١٢ , ٤ ص + ص = ١٢$$

٠	١٢	س
٣	٠	ص

٠	٦	س
٦	٠	ص

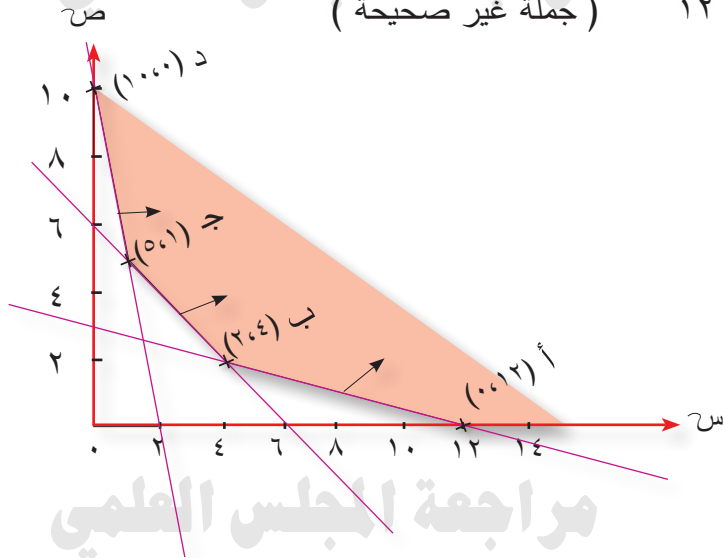
٠	٢	س
١٠	٠	ص

نحدد منطقة الحل بتعويض نقطة الأصل (٠ ، ٠) في القيود (المتباينات)

$$١٠ \leq ٠ \quad (\text{جملة غير صحيحة})$$

$$١٢ \leq ٠ \quad (\text{جملة غير صحيحة})$$

$$١٢ \leq ٠ \quad (\text{جملة غير صحيحة})$$



رؤوس منطقة الحل المظللة : أ (٠ ، ١٢) ، ب (٢ ، ٤) ، ج (٥ ، ١) ، د (١٠ ، ٠)

$$\text{قيمة ك عند أ} = ١٠٨٠٠٠ , \quad \text{قيمة ك عند ب} = ٤٨٠٠٠$$

$$\text{قيمة ك عند ج} = ٣٩٠٠٠ , \quad \text{قيمة ك عند د} = ٦٠٠٠٠$$

أقل قيمة ٣٩٠٠٠ عند ج (٥ ، ١)

يشترى زجاجة واحدة سائل و ٥ علب بودرة

مثال : (٢) : يقوم مصنع بتصنيع حقائب يد وحقائب سفر وفقاً للجدول الآتي :

تكاليف تصنيع الوحدة	الجلد المستخدم للوحدة	ثمن بيع الوحدة	
حقائب يد	٤٠٠٠ جنيه	٤ قدم ^٢	١٠٠٠٠ جنيه
حقائب سفر	٣٠٠٠ جنيه	٦ قدم ^٢	١٢٠٠٠ جنيه

فإذا كانت أقصى تكلفة ٣٦٠٠٠ جنيه وأقصى كمية الجلد المستخدم ٤٨ قدم^٢ يومياً.

أ- كَوِّن متباينات القيود للإنتاج والتكلفة المالية وكمية الجلد ومثلها بيانياً.

ب- جد الانتاج من كل نوع الذي يحقق أكبر دخل يومي.

ج- إذا كان ثمن القدم المربع من الجلد ١٠٠٠ جنيه. أحسب الربح الأقصى للمصنع ؟

الحل : أ- نفرض أن المصنع ينتج س حقيبة يد و ص حقيبة سفر يومياً

عدم السالبة : $س \geq ٠$ ، $ص \geq ٠$

القيود: $٤٠٠٠ س + ٣٠٠٠ ص \geq ٣٦٠٠٠$ ، $٤ س + ٦ ص \geq ٤٨$

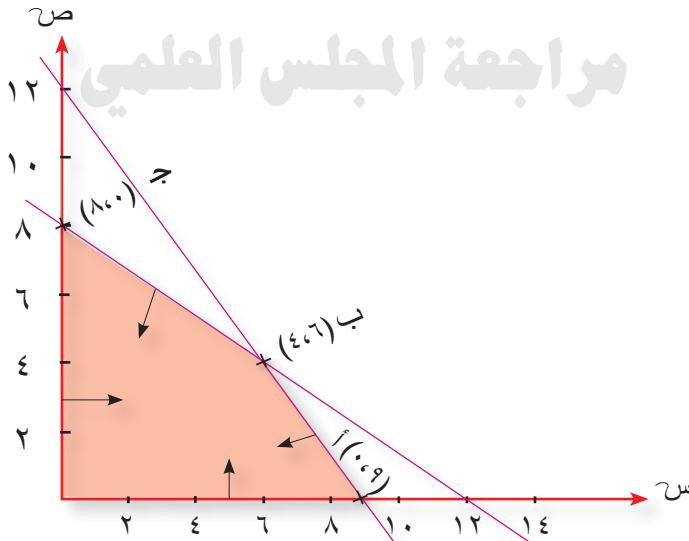
دالة الهدف: $١٠٠٠٠ س + ١٢٠٠٠ ص$ (أكبر ما يمكن)

نرسم المستقيمات :

$$٤٠٠٠ س + ٣٠٠٠ ص = ٣٦٠٠٠ ، ٤ س + ٦ ص = ٤٨$$

س	١٢	٠
ص	٠	٨

س	٩	٠
ص	٠	١٢



رؤوس منطقة الحلول الممكنة (المظللة)

أ (٠ ، ٩) ، ب (٤ ، ٦) ، ج (٨ ، ٠)

قيمة الدالة عند أ = ٩٠٠٠٠

قيمة الدالة عند ب = ١٠٨٠٠٠

قيمة الدالة عند ج = ٩٦٠٠٠

ب- أكبر قيمة عند ب (٤ ، ٦)

∴ يصنع ٦ حقائب يد و ٤ حقائب سفر

ج- تكلفة تصنيع الحقائب = $٣٠٠٠ \times ٤ + ٤٠٠٠ \times ٦$

$$= ١٢٠٠٠ + ٢٤٠٠٠$$

$$= ٣٦٠٠٠$$

تكلفه الجلد المستخدم = $١٠٠٠ \times (٦ \times ٤ + ٤ \times ٦)$

$$= ١٠٠٠ \times ٤٨$$

$$= ٤٨٠٠٠$$

التكلفة الكلية = $٤٨٠٠٠ + ٣٦٠٠٠ = ٨٤٠٠٠$ جنيه

الدخل الكلي = ١٠٨٠٠٠

الربح الأقصى = $١٠٨٠٠٠ - ٨٤٠٠٠ = ٢٤٠٠٠$

تمارين (٢ - ٦)

١. جد أكبر وأصغر قيمة للدالة $s + v$ بحيث :

$$s \leq ٢ ، v \leq ٣ ، s + ٢v \geq ١٥$$

٢. جد أكبر وأصغر قيمة للدالة : $٢v - s$ بحيث :

$$s \leq ٠ ، v \leq ٠ ، s \geq ٦ ، v \geq ٤ ، s + v \geq ٩$$

٣. صانع أحذية يصنع أحذية رجالية وأحذية نسائية يربح في كل حذاء رجالي مبلغ

٥٠٠٠ جنيه وفي كل حذاء نسائي ٧٠٠٠ جنيه . يستغرق صنع حذاء الرجل ٦ ساعات،

صنع حذاء المرأة ٧ ساعات فإذا كانت ساعات عمله الأسبوعي ٤٢ ساعة فما عدد

الأحذية التي يصنعها من كل نوع خلال الأسبوع ليكون ربحه أكبر ما يمكن ؟

٤. صاحب مصنع يريد شراء نوعين من الماكينات. الماكينة (أ) تحتاج إلى ثلاثة أمتار مربعة من أرض المصنع وسعرها ٢ مليون جنيه ، الماكينة من النوع (ب) تحتاج إلى مترين من أرض المصنع وسعرها ٤ مليون جنيه ، الأرض المخصصة من المصنع لتركيب الماكينات لا تزيد مساحتها عن ٤٠ متر مربع والمبلغ الذي رصده صاحب المصنع لشراء الماكينات لا يزيد عن ٤٠ مليون جنيه إذا كانت الماكينة من النوع (أ) تنتج ١٠٠ وحدة في الساعة والماكينة من النوع (ب) تنتج ١٥٠ وحدة في الساعة . كم ماكينة يشتريها صاحب المصنع من كل نوع ليكون الانتاج أكبر ما يمكن ؟

٥. أراد أحمد أن يشتري بما لا يزيد عن ١٨٠٠٠٠ جنيه كتباً أدبية وعلمية لمكتبته الخاصة. فإذا كان ثمن الكتاب الأدبي ٢٠٠٠٠ جنيه ، و ثمن الكتاب العلمي ٣٠٠٠٠ جنيه. أراد أحمد أن يشتري ٣ كتب أدبية على الأقل وكتابين علميين على الأقل. بكم طريقة يمكن أن يشتري أحمد الكتب وما أكبر عدد يمكن شراؤه من هذه الكتب . وإذا أراد أحمد أن يدفع ١٨٠٠٠٠ جنيه بالضبط فما عدد الكتب العلمية والأدبية التي يشتريها ؟

٦. شركة تمتلك مستودعين من البضائع الجاهزة في منطقتين مختلفتين حيث تلبي طلبات العملاء في كل منطقة من المستودع الأقرب للعميل. فإذا كانت متوسط تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المستودع الأول ٢٠٠٠٠ جنيه ومن المستودع الثاني ١٠٠٠٠ جنيه ، علماً بأن تحميل الوحدة من المستودع الأول يستغرق ساعة ونصف الساعة ومن المستودع الثاني يستغرق ساعة واحدة وأن ساعات العمل في المستودعين ٣٠ ساعة يومياً ، فإذا علمت أن الشركة تستطيع أن تُسير ٣ شاحنات يومياً على الأقل : شاحنة واحدة من المستودع الأول وشاحنتين من المستودع الثاني بحمولة ١٢ وحدة لكل شاحنة وأن معدل طلب العملاء اليومي لا يقل عن ٨ وحدات من المستودع الأول و ٦ وحدات من المستودع الثاني .

جد الحل الأمثل للشركة بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن ؟

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{صفر} \\ \text{س} - \end{array} \right\} \text{إذا كان} \left. \begin{array}{l} \text{س} < 0 \\ \text{س} = 0 \\ \text{س} > 0 \end{array} \right\} = | \text{س} |$$

٢/ إذا كان أ ، ب $\in \mathbb{R}$ فإن :

$$(أ) \quad | \text{أ} - \text{ب} | = | \text{أ} | \quad (ب) \quad | \text{أ} \cdot \text{ب} | = | \text{أ} | \cdot | \text{ب} |$$

$$(ج) \quad \left| \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \right| = \frac{| \text{أ} |}{| \text{ب} |} \quad \text{بشرط } \text{ب} \neq 0$$

$$(د) \quad | \text{أ} + \text{ب} | \geq | \text{أ} | + | \text{ب} |$$

$$٣/ \quad | \text{س} | \geq \text{أ} \iff -\text{أ} \leq \text{س} \leq \text{أ}$$

$$| \text{س} | \leq \text{أ} \iff \text{س} \leq \text{أ} \text{ أو } \text{س} \geq -\text{أ}$$

٤/ أ. المتباينة بمتغيرين تُسمى خطية إذا كان كلاهما من الدرجة الأولى ولا تحوى حاصل ضربيهما.
ب. مجموعة حل المتباينة الخطية بمتغيرين أزواج مرتبة تحقق المتباينة وتُسمى منطقة الحلول الممكنة.

ج. لتمثيل المتباينة : $\text{أس} + \text{بص} + \text{ج} \geq 0$ يرسم المستقيم الحدودي $\text{أس} + \text{بص} + \text{ج} = 0$ وهو يقسم المستوى إلى جزأين أحدهما منطقة الحلول الممكنة.
د. يمثل المستقيم الحدودي بخط متصل إذا تضمنت المتباينة الرمز $\geq$ أو $\leq$ ويرسم بخطوط منقطعة إذا تضمنت المتباينة الرمز $>$ أو $<$.

هـ . تحدّد منطقة الحلول الممكنة باختيار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي وتعويض إحداثياتها في المتباينة ، إذا كان الناتج جملة صحيحة تكون المنطقة التي تقع فيها النقطة هي منطقة الحلول الممكنة. أما إذا كان الناتج جملة غير صحيحة فتكون منطقة الحل هي المنطقة الأخرى.

٥/ يشتمل نظام المتباينات الخطية على متباينتين أو أكثر ، منطقة الحلول الممكنة للنظام هي المنطقة المشتركة بين حلول كل متباينات النظام.

٦/ لحل مسألة البرمجة الخطية ، نحل نظام متباينات القيود ونتوصل إلى منطقة الحلول الممكنة للنظام ، ثم نجد أكبر و أصغر قيمة لدالة الهدف عند أحد رؤوس المضلع الذي يحيط منطقة الحلول الممكنة .

تمارين (٢-٧)

$$١/ \text{ حل المعادلة } \frac{1}{2} = \frac{|س - ٣|}{|س - ١٥|}$$

$$٢/ \text{ حل المتباينة ومثل الحل بيانياً : } \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right| س > ١$$

٣/ حل المتباينة $٧ - ٣ \geq ٢ - س \geq ٥$ واكتب الحل في صورة القيمة المطلقة.

٤/ حل ثم مثل بيانياً كل من الآتي :

$$(أ) |س - ٥| \leq ٦$$

$$(ب) |س - ٣| \geq ٥$$

٥/ أ) اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تعبر عن : عدد يبعد عن النقطة ١٠ مسافة لا تزيد عن ٣.

ب) الزمن القياسي لوصول عداء نهاية سباق ٥٠٠ متر لا يختلف عن ٢٠ ثانية بأكثر من ٥ ثوان

(١) اكتب المتباينة المناسبة.

(٢) جد مجموعة الحل

$$٦/ \text{ جد أكبر قيمة للدالة : } ك = ٣س + ٢ص \text{ بحيث :}$$

$$٢س + ٤ص \geq ٢٤ , ٤س + ٢ص \geq ٢٤ , س \leq ٠ , ص \leq ٠$$

٧/ قررت إحدى المدارس الابتدائية تقديم وجبة خفيفة لتلاميذها تتكوّن من صنفين من الغذاء . إذا كان التلميذ يحتاج الى ٥ وحدات على الأقل من فيتامين B وثمان وحدات على الأقل من فيتامين D . إذا كانت الوحدة من الصنف الأول تحوى وحدة واحدة من فيتامين B و وحدتين من فيتامين D وأن الوحدة من الصنف الثاني تحوى وحدة واحدة من فيتامين B ووحدة واحدة من فيتامين D ، فإذا كان سعر الوحدة من الصنف الأول ٢٠٠٠ جنيه ومن الصنف الثاني ١٥٠٠ جنيه ، فكم عدد الوحدات من الصنفين تقدمها المدرسة في الوجبة بحيث تتضمن الحد الأدنى من الفيتامينات للتلميذ وتكون أرخص ما يمكن ؟

الوحدة الرابعة

الإحصاء Statistics

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :-

١. يتعرف مقاييس النزعة المركزية .
٢. يحسب قيمة الوسط الحسابي لبيانات موضوعة في جدول تكراري .
٣. يجدّ الوسط الحسابي لبيانات في جدول تكراري ذي فئات منتظمة .
٤. ينشئ جدول تكراري متجمّع صاعد .
٥. يجدّ قيمة الوسيط لبيانات موضوعة في جدول تكراري .
٦. يحسب قيمة الوسيط لبيانات في جدول تكراري ذي فئات منتظمة .
٧. يجدّ المنوال لبيانات موضوعة في جدول تكراري .
٨. يستنتج المنوال لبيانات في جدول تكراري ذي فئات منتظمة .
٩. يقارن بين إيجابيات وسلبيات كل من مقاييس النزعة المركزية .
١٠. يبيّن استخدامات مقاييس النزعة المركزية في تطبيقات حياتية .

لماذا ندرس الإحصاء ؟

يدخل الإحصاء في مجال الاقتصاد والتجارة والصناعة والطب وفي جميع مجالات الحياة تقريباً ، ويرتبط بجمع البيانات وتنظيمها وعرضها بطريقة تسهل مقارنتها ، كما يهتم علم الإحصاء بتحليل البيانات وتفسيرها للتوصل إلى نتائج تساعد على التوقعات واتخاذ القرارات السليمة . وتعتبر مقاييس النزعة المركزية من المقاييس المهمة في الإحصاء ؛ إذ تحدد القيمة التي تتمركز حولها القيم وتعتبر ممثلاً لهذه القيم ، وأكثر مقاييس النزعة المركزية شيوعاً هي الوسط الحسابي والوسيط والمنوال ، وهي ما سنقوم بدراسته في هذه الوحدة .

(١-٤) المعارف السابقة المكتسبة: Previously Acquired Knowledge

درسنا في الصف الأول المتوسط طرق عرض البيانات بالجدول التكرارية وتمثيلها بالأعمدة والقطاعات الدائرية ، كما درسنا في الصف الثالث المتوسط كيف تُنشئ جداول تكرارية ذات فئات من بيانات معطاة . ولعلك تتذكر أن :

- طول الفئة = حدها الأعلى - حدها الأدنى ،
- مركز الفئة = (حدها الأعلى + حدها الأدنى) مقسوماً على ٢ ،
- و يساوي أيضاً (نصف طول الفئة + حدها الأدنى) .

مثال (١) ادرس الجدول التكراري التالي ثم أجب عن الأسئلة :

٢٤ - ٢٠	-١٦	-١٢	-٨	-٤	الفئة
٢	٦	١٧	١٢	٨	التكرار

- أ. ما الحد الأعلى للفئة الأولى ؟
 - ب. ما الحد الأدنى للفئة الثانية ؟
 - ج. ما طول كل فئة من فئات الجدول ؟
 - د. جد قيمة مركز الفئة الثالثة .
- الحل :** أ. الحد الأعلى للفئة الأولى هو ٨ . ب. الحد الأدنى للفئة الثانية هو ٨
- ج. حيث أن أطوال الفئات متساوية ، فإن طول الفئة = ٤ (لماذا؟)
- د. مركز الفئة الثالثة = $١٢ + ٢ = ١٤$ (احسب قيمته بالطريقة الثانية)
- درسنا في الصف الثالث المتوسط أيضاً كيفية حساب قيمة كل من الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال من مفردات وتسمى هذه القيم **مقاييس النزعة المركزية** لأنها تمثل مركز تتجمع حوله معظم قيم البيانات ؛ وبالتالي يمكن أن تكون ممثلة لجميع هذه القيم. نستطيع تلخيص مقاييس النزعة المركزية التي درسناها في الجدول التالي :

مقاييس النزعة المركزية	
المقياس	التعريف
الوسط الحسابي	مجموع القيم مقسوماً على عددها
الوسيط	القيمة التي تتوسط القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً وإذا توسّطت قيمتين فنوجد الوسط الحسابي لهما
المنوال	القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها

حيث أن الوسط الحسابي يساوي مجموع القيم على عددها ؛ فإذا رمزنا للوسط الحسابي بالرمز $\bar{S}$ (يقراً س شرطة) و رمزنا للقيم بالرموز $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ و رمزنا لعددها بالرمز n فإن :

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n}{n} = \frac{\sum_{r=1}^n S_r}{n}$$

$\sum$ يرمز للمجموع ويقراً (سيجما) ، S تعبر عن القيم $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ و n هو عدد هذه القيم.

مثال (٢) البيانات التالية تمثل عدد أرغفة الخبز التي تستهلكها أسرة أسبوعياً :

٩ ، ١١ ، ٨ ، ١٢ ، ٨ ، ١٦ ، ١٤

جد كلا من الوسط والوسيط والمنوال لاستهلاك الأسرة من أرغفة الخبز يومياً .

الحل :

أ. الوسط الحسابي $= \frac{9 + 11 + 8 + 12 + 8 + 16 + 14}{7} = 11$

الوسط الحسابي لاستهلاك الأسرة = ١١ رغيفاً في اليوم (لماذا ؟)

ب. لإيجاد الوسيط نرتب البيانات تصاعدياً : ٨ ، ٨ ، ٩ ، ١١ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦

ونجد أن قيمة الوسيط = ١١ ، وهي القيمة التي توسّطت القيم بعد ترتيبها تصاعدياً .

ج. المنوال = ٨ (لماذا ؟) ، ما متوسط استهلاك أسرتك من الخبز ؟

مثال (٢) إذا كان الوسط الحسابي لدرجات ٦ طالبات هو ٧٢ درجة والوسط الحسابي

لدرجات ٤ طلاب هو ٦٥ درجة ، جد الوسط الحسابي لدرجات الطلاب والطالبات معاً.

الحل : مجموع درجات الطالبات $= 72 \times 6 = 432$

مجموع درجات الطلاب $= 65 \times 4 = 260$

مجموع درجات الطلاب والطالبات معاً = $432 + 260 = 692$

حيث أن عدد الطلاب والطالبات = 10

فإن الوسط الحسابي لدرجات الطلاب والطالبات معاً = $692 \div 10 = 69,2$

تنبيه: من الأخطاء الشائعة جمع الوسطين الحسابيين وقسمتهما على 2 . (لماذا ؟)

تمرين (٤-١)

١. من بيانات الجدول التالي :

الفئة	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	٥٥ - ٦٥
التكرار	٧٨	١١٢	٩٦	٨٨	١٢٣

أ. جد كلاً من الحد الأدنى والحد الأعلى للفئة الرابعة . ما طول هذه الفئة؟

ب. احسب مركز الفئة الثالثة ؟ ج. ما الفئة التي تكررنا يساوي ١١٢؟

٢. إذا كان إنتاج ٧ أشجار نخيل من التمر بالربع كما يلي :

٢٧ ، ٤١ ، ٣٤ ، ٣٧ ، ٢٤ ، ٤٥ ، ٣٥

احسب من إنتاج أشجار النخيل كلاً من :

أ. الوسط الحسابي ب. الوسيط ج. المنوال .

٣. إذا كان مجموع درجات ٨ طلاب و ٤ طالبات هو ١٦٨ درجة ، وكان الوسط الحسابي

لدرجات الطلاب ١٥ درجة ، فما الوسط الحسابي لدرجات الطالبات ؟

٤. فيما يلي ٧ قيم : ٣٨ ، ٥٣ ، ٤٠ ، ٣٥ ، ٣٨ ، ٥٠ ، ٦١ . أجب عن الآتي :

أ. جدّ كلاً من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لهذه القيم .

ب. أضف قيمة واحدة لهذه القيم بحيث لا يتغير الوسيط .

ج. أضف قيمة للقيم الأصلية بحيث يكبر الوسط الحسابي ولا يتغير المنوال .

(٤-٢) الوسط الحسابي من الجداول التكرارية:

Arithmetic Mean from Frequency Tables

مثال (١): في أحد البنوك تم رصد الزمن الذي يقضيه كل موظف في إنجاز خدمة للعميل ، ثم أنشئ الجدول التكراري التالي (حيث رمزنا للزمن بالرمز س وللموظف بالرمز ك) :

الزمن بالدقائق (س)	٢	٣	٤	٥	٦
عدد الموظفين (ك)	٧	٨	٦	٥	٤

احسب الوسط الحسابي للزمن الذي يقضيه الموظف في خدمة العميل (ويدخل ذلك ضمن جودة خدمة العميل بالبنك).

الحل : الوسط الحسابي = مجموع الزمن الكلي مقسوماً على عدد الموظفين
(كيف نوجد مجموع الزمن الكلي ؟)

لاحظ أن زمن السبعة موظفين يساوي $2 \times 7 = 14$ دقيقة

(هل تستطيع حساب مجموع الزمن الكلي لجميع الموظفين ؟)

إذا رجعنا للجدول سنجد أنه لحساب الزمن الكلي فإننا نقوم بضرب عدد الموظفين في كل مرة بالزمن الذي يقضوه في خدمة العميل ؛ أي حاصل ضرب س × ك في كل مرة وحاصل جمع هذه النواتج هو مجموع الزمن الكلي للموظفين .

(كيف نوجد الوسط الحسابي إذن ؟ نرجع لتعريف الوسط الحسابي أعلاه) .

هل نستطيع التوصل إلى قاعدة لإيجاد الوسط الحسابي من الجدول التكراري ؟

لعلنا لاحظنا أن الوسط الحسابي = مجموع (س × ك) ÷ مجموع ك
(عبر عن ذلك رمزياً) .

سنقوم بتنظيم هذا الجدول لتسهيل إيجاد الوسط الحسابي وذلك كما يلي :

الزمن بالدقائق (س)	٢	٣	٤	٥	٦	المجموع
عدد الموظفين (ك)	٧	٨	٦	٥	٤	$\sum ك = 30$
س × ك	١٤	٢٤	٢٤	٢٥	٢٤	$\sum س \times ك = 111$

$$\bar{س} = \frac{\sum س \times ك}{\sum ك} = 3,7 \text{ دقيقة} \quad (\text{ماذا يعني ذلك ؟ فسر الإجابة})$$

مثال (٢): قام محل تجاري بتسجيل عدد العملاء الذين يزورون المحل يومياً خلال ٣٠ يوماً ثم أنشأ جدول تكراري من هذه البيانات كما يلي :

٤١	٣٤	٣٠	٢٢	١٥	العملاء (س)
٤	٥	١٠	٧	٤	عدد الأيام (ك)

احسب الوسط الحسابي لعدد العملاء الذين يزورون المحل يومياً .

الحل : نضيف صف ثالث للجدول فيصبح :

٤١	٣٤	٣٠	٢٢	١٥	العملاء (س)
٤	٥	١٠	٧	٤	عدد الأيام (ك)
١٦٤	١٧٠	٣٠٠	١٥٤	٦٠	س × ك
٨٤٨					المجموع

$$\bar{س} = \frac{\sum س \times ك}{\sum ك} = ٢٨,٣ = ٣٠ \div ٨٤٨$$

كم الوسط الحسابي لعدد العملاء اليومي ؟

مراجعة المجلس العلمي

تمارين (٢-٤)

١. يمثل الجدول التالي الوسط الحسابي لدرجات الطلاب بمادة الرياضيات في (٥) فصول للثاني الثانوي بإحدى المدارس ، علماً بأن الدرجة العظمى هي (١٠٠) درجة .

الصف الثاني الثانوي	(أ)	(ب)	(ج)	(د)	(هـ)
عدد الطلاب	٢٤	٣٧	٤٢	٢٩	٢٨
الوسط الحسابي	٧٢	٦٥	٦٧	٥٩	٦٨

احسب الوسط الحسابي لدرجات طلاب الصف الثاني الثانوي بهذه المدرسة .
٢. في الجدول التكراري التالي بيانات بعدد ٥٠ جهاز حاسوب وأعمارها في إحدى الشركات عدا الخمسة أجهزة الأخيرة ، إذا كان الوسط الحسابي لعمر جهاز الحاسوب بالشركة ٣ سنوات ، فجدّ العمر (ص) لكل جهاز من الأجهزة الخمسة :

عمر الجهاز بالسنوات (س)	١	٣	٥	ص
عدد الأجهزة (ك)	٢٠	١٥	١٠	٥

٣. تمثّل البيانات التالية توزيع الطلاب على ٢٠ فصلاً من فصول مدرسة ثانوية. جد الوسط الحسابي لعدد طلاب الفصل في هذه المدرسة .

عدد الطلاب	٢٠	٢٦	٣٥	٤٤	٣٠	٥٤
عدد الفصول	١	٢	٤	٥	٦	٢

٤. في أحد الأحياء كان توزيع السكان في (٦٠) منزلاً كما يلي :

عدد الأفراد	صفر	٣	٤	٥	٦	٨
عدد المنازل	٢	١٥	٢٠	١٤	٤	٥

أ. احسب الوسط الحسابي لعدد الأفراد في كل منزل .
ب. إذا تقرر صرف ٢ كيلو سكر لكل فرد من أفراد كل أسرة ، فكم كيلو من السكر

يلزم توزيعها على الستين منزلاً؟ وكم جوالاً يلزم إذا علمت أن كتلة الجوال ٥٠ كيلوجرام؟
 كم عدد مصانع السكر في السودان؟ وما هو أكبرها؟
 ٥. حصرت مدرسة عدد أيام الغياب في السنة لطلاب أحد الفصول حسب الجدول التالي:

٩	٨	٦	٤	٣	عدد أيام الغياب
٢	٣	٥	٦	٨	عدد الطلاب

- أ. جدّ الوسط الحسابي لعدد أيام الغياب لطلاب هذا الفصل .
 ب. جدّ النسبة المئوية للطلاب الذين كانت نسبة غيابهم أقل من الوسط الحسابي للغياب.

مراجعة المجلس العلمي

(٣-٤) الوسط الحسابي من الجداول التكرارية ذات الفئات:

Arithmetic Mean from Grouped Frequency Tables (Class Intervals)

في الدرس السابق استنتجنا صيغة لحساب الوسط الحسابي من الجدول التكراري العادي كما يلي: $\bar{س} = \frac{\text{مجموع (القيمة} \times \text{التكرار)}}{\text{مجموع التكرارات}}$

هل نستطيع تطبيق القاعدة نفسها لحساب الوسط الحسابي لبيانات جدول تكراري ذي فئات؟ لعلك تعلم أن القيم الأصلية تكون غير معروفة في الجدول التكراري ذي الفئات، ولذلك نعتبر أن مركز كل فئة يمثل قيمة هذه الفئة؛ وعليه نستطيع القول أن: $\bar{س} = \frac{\text{مجموع (مركز الفئة} \times \text{التكرار)}}{\text{مجموع التكرارات}}$

مثال (١): لمعرفة مستوى (٤٠) طالباً من طلاب الصف الأول الثانوي في الرياضيات تم تجميع درجاتهم كما يلي:

الدرجات (س)	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠	-١٠٠
عدد الطلاب (ك)	٥	١٢	١٥	٦	٢	

احسب الوسط الحسابي ($\bar{س}$) لدرجات الطلاب.

الحل: نقوم بإضافة صف آخر لمراكز الفئات (يمثل القيم ويمكن تسميته م)، ثم نضيف صف آخر يمثل (حاصل ضرب مركز الفئة $\times$ التكرار) ونرمز له بالرمز (م $\times$ ك)، وهو مشابه لما فعلنا في الجدول التكراري العادي حيث ضربنا القيمة في التكرار ومثلناها بالصف (س $\times$ ك).

فئة الدرجات	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠	-١٠٠	المجموع
عدد الطلاب (ك)	٥	١٢	١٥	٦	٢		٤٠
مراكز الفئات (م)	٥٥	٦٥	٧٥	٨٥	٩٥		-
م $\times$ ك	٢٧٥	٧٨٠	١١٢٥	٥١٠	١٩٠		٢٨٨٠

ومنها نستنتج أن: $\bar{س} = \frac{\sum م \times ك}{\sum ك} = \frac{٢٨٨٠}{٤٠} = ٧٢$ درجة

مثال (٢) يخصص طالب يومياً عدد من الصفحات للاطلاع الحر ، يبين الجدول توزيع الصفحات التي يقرأها الطالب كل يوم خلال شهر كامل . ما الوسط الحسابي لعدد الصفحات التي يقرأها الطالب يومياً تقريباً .

عدد الصفحات	-٠	-٦	-١٢	-١٨	٢٤ - ٣٠
عدد الأيام	٣	٨	١٣	٤	٢

الحل : نقوم بإضافة صفين كما فعلنا في مثال (١) ، (ماذا يمثل كل منهما ؟)

عدد الصفحات	-٠	-٦	-١٢	-١٨	٢٤ - ٣٠	المجموع
عدد الأيام (ك)	٣	٨	١٣	٤	٢	٣٠
مراكز الفئات (م)	٣	٩	١٥	٢١	٢٧	-
م × ك	٩	٧٢	١٩٥	٨٤	٥٤	٤١٤

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ك} م \times ك}{\sum_{ك} ك} = \frac{٤١٤}{٣٠} = ١٣,٨ \text{ صفحة ، حوالي } ١٤ \text{ صفحة تقريباً}$$

(كم عدد الصفحات التي تقرأها يومياً ؟)

ألف ابن سينا أكثر من ٢٠٠ كتاب ، وأشهرها كتاب القانون في الطب وعدد صفحاته يتجاوز ٢٢٠٠ صفحة وظل المرجع الأساس في الطب عالمياً لمدة سبعة قرون ، للمزيد ابحث في ويكيبيديا وغيرها ، (كم تتوقع أن يكون الوسط الحسابي للصفحات التي يقرأها).

تمرين (٢-٤)

١. رُصدت أعمار المعلمين بإحدى المدارس وكانت كما يلي :

فئات الأعمار بالسنة	-٢٢	-٣٠	-٣٨	-٤٦	-٥٤	-٦٢ - ٧٠
عدد المعلمين (ك)	٣	٨	١٤	١٥	٧	٣

احسب الوسط الحسابي التقريبي لأعمار المعلمين: أ. لأقرب سنة ب. لأقرب شهر
٢. يبين الجدول التالي الفترات الزمنية للمكالمات الأخيرة لـ ٤٥ شخصاً :

الفترة الزمنية بالدقائق	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠ - ٦٠
التكرار	١٥	١٠	٦	٧	٤	٣

جدّ الوسط الحسابي لزمان المكالمات الهاتفية (أكتب الناتج بالدقائق والثواني ، مقرباً لأقرب ثانية).

٣. في أحد المصانع تم تسجيل عدد الوحدات التي ينتجها العمال يومياً فكانت كما يلي:

فئات الانتاج بالوحدة	-٠	-٣٠	-٦٠	-٩٠	-١٢٠ - ١٥٠
عدد العمال (ك)	٣	٦	٩	٤	٢

أ. جد الوسط الحسابي لإنتاج العمال .

ب. إذا تغيب ٢ من العمال في الفئة (٣٠ - ٦٠) فكم يكون الانتاج الكلي للمصنع في ذلك اليوم ؟

٤. الجدول يبين عدد ساعات مشاهدة التلفاز يومياً بناءً على استطلاع للرأي لمجموعة من الأشخاص .

فئات المشاهدة بالساعة	-٠	-٢	-٤	-٦	-٨ - ١٠
عدد الأشخاص (ك)	٢٣	٣٧	٢٢	١٣	٥

أ. احسب الوسط الحسابي لساعات المشاهدة لأقرب دقيقة .

ب. هل ترى أن هذه الساعات مناسبة للمشاهدة ؟ ما البرامج التي تشاهدها ؟

ج. إذا انقطعت الكهرباء ليوم كامل لدى (٥) أشخاص من الفئة الثانية و(٢) من الفئة الأولى ، فكم ينقص العدد الكلي لساعات المشاهدة في هذا اليوم ؟

٤-٤) الوسيط من الجداول التكرارية: Median from Frequency Tables

مما سبق دراسته نعلم أن الوسيط هو القيمة التي تتوسط القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً ، ونستطيع تطبيق هذه القاعدة أيضاً في حالة الجداول التكرارية .

مثال (١) يبين الجدول قيم للمتغير س وتكرارات هذه القيم . احسب الوسيط لهذه القيم .

س	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥
التكرارات (ك)	١٥	١٩	١٢	٧	٤

الحل :

نعيد ترتيب بيانات الجدول السابق بإضافة صف للتكرار المتجمّع ، وصف آخر لمواقع المتغيرات ، وإذا وضعنا هذا الجدول بصورة رأسية يكون كما يلي :

المتغير س	التكرار ك	التكرار المتجمّع	المواقع
٢١	١٥	١٥	من الأول حتى رقم ١٥
٢٢	١٩	٣٤	من رقم ١٦ حتى رقم ٣٤
٢٣	١٢	٤٦	من رقم ٣٥ حتى رقم ٤٦
٢٤	٧	٥٣	من ٤٧ حتى رقم ٥٣
٢٥	٤	٥٧	من رقم ٥٤ حتى رقم ٥٧

ترتيب الوسيط $= \frac{1 + 57}{2} = \frac{1 + n}{2} = 29$ ، نلاحظ أن القراءة التي رتبها ٢٩ تقع بين ١٦ و ٣٤ وجميعها تساوي ٢٢
إذن قيمة الوسيط للمتغير س = ٢٢ .

مثال (٢):

يبيّن الجدول أعمار بعض الشباب الذين يعملون في أحد المصانع ، كما يبيّن الجدول التكرارات المتجمّعة ومواقع الأعمار . احسب قيمة وسيط الأعمار .

العمر	التكرار ك	التكرار المتجمّع	المواقع
٣٠	١٣	١٣	من الأول حتى رقم ١٣
٣١	٢٢	٣٥	من رقم ١٤ حتى رقم ٣٥
٣٢	١٦	٥١	من رقم ٣٦ حتى رقم ٥١
٣٣	١٠	٦١	من ٥٢ حتى رقم ٦١
٣٤	٧	٦٨	من رقم ٦٢ حتى رقم ٦٨
٣٥	٤	٧٢	من رقم ٦٩ حتى رقم ٧٢

حيث أن عدد القيم ٧٢ وهو عدد زوجي ؛ عليه فإن ترتيب الوسيط هو :
 $\frac{n}{2}$ ، $\frac{n+1}{2}$ أي ٣٦ ، ٣٧ ، نلاحظ أن كل من الأعمار التي رتبها ٣٦ ، ٣٧

تقع جميعها بين ٣٦ و ٥١ وجميعها تساوي ٣٢ عليه فإن قيمة الوسيط = ٣٢
 (لاحظ أن الوسيط لا يتحدّد بمنصف الجدول ولكن بمنصف التكرارات)

تمرين (٤-٤)

١. جدّ قيمة الوسيط للمتغيّر س الذي جدولته التكراري كما يلي :

المتغيّر س	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤
التكرارات (ك)	١٨	٢٠	١٥	٦	٤

٢. الجدول يبيّن عدد الاتصالات التي يتلقاها عدد من الأشخاص نهاية الأسبوع

عدد الأشخاص س	١	٢	٣	٤	٥
عدد الاتصالات	٧	٩	١٠	٧	٥

احسب الوسيط لعدد الاتصالات .

٣. البيانات التالية توضّح قيم المتغيّر س وتكراراته ، كما توضّح التكرارات المتجمّعة، ادرس الجدول ثم أجب عن الأسئلة :

المتغيّر س	التكرار ك	التكرار المتجمّع
١٥	٢٠	٢٠
١٦	د	٤٣
١٧	١٩	هـ
١٨	و	٧١
١٩	٧	ح

أ. احسب قيمة كل د ، هـ ، و ، ح

ب. جد ترتيب الوسيط

ج. حدد موقع القيمة ١٧ في الجدول .

(٤-٥) الوسيط من الجداول التكرارية ذات الفئات :

Median from Grouped Frequency Tables (Classes)

في الدرس السابق تعرّفنا على طريقة حساب قيمة الوسيط من الجداول التكرارية ،
واستخدمنا لذلك التكرارات المتجمّعة.

لإيجاد الوسيط من الجدول التكراري ذو الفئات ، يمكن حسابه من التكرار المتجمّع
الصاعد الذي يتم حسابه بإيجاد مجموع كل تكرار مع جميع التكرارات التي تسبقه. وذلك
كما في المثال التالي :
مثال (١) أنشئ جدولاً للتكرار المتجمّع الصاعد للبيانات الآتية:

الفئات	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠ - ١٠٠
التكرارات	٨	١٠	١٢	٦	٤

الحل :

الفئة	التكرارات	الجدول المتجمّع الصاعد	
		الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمّع الصاعد
-٥٠	٨	أقل من ٦٠	٨
-٦٠	١٠	أقل من ٧٠	١٨
-٧٠	١٢	أقل من ٨٠	٣٠
-٨٠	٦	أقل من ٩٠	٣٦
-٩٠ - ١٠٠	٤	أقل من ١٠٠	٤٠

مثال (٢) في الجدول التكراري التالي توزيع لدرجات ٨٠ طالباً في اختبار إحدى المواد.
جدّ الوسيط لدرجات هؤلاء الطلاب .

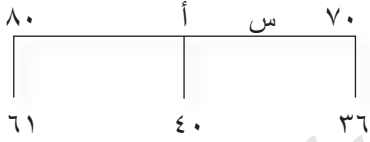
الفئات	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠ - ١٠٠
التكرارات	٣	١١	٢٢	٢٥	١٥	٤

الحل : ننشئ الجدول المتجمّع الصاعد للبيانات كما يلي :

الفئة	التكرار	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمّع الصاعد
-٤٠	٣	أقل من ٥٠	٣
-٥٠	١١	أقل من ٦٠	١٤
-٦٠	٢٢	أقل من ٧٠	٣٦
-٧٠	٢٥	أقل من ٨٠	٦١
-٨٠	١٥	أقل من ٩٠	٧٦
-٩٠ - ١٠٠	٤	أقل من ١٠٠	٨٠

نوجد ترتيب الوسيط = مجموع التكرارات $\div ٢ = ٨٠ \div ٢ = ٤٠$
وبالرجوع للجدول وعمود الحدود العليا للفئات، نجد أن تكرار الوسيط يقع بين ٣٦ ، ٦١
ويقابل ذلك الفئة (٧٠-٨٠) أي أن قيمة الوسيط تقع بين ٧٠ و ٨٠ .

ولتحديد قيمة الوسيط نجد أنها أكبر من ٧٠ بمقدار س ، ويمكن أن نعبر عن ذلك
بالشكل التالي، حيث أ موقع الوسيط :



فإذا استخدمنا التناسب يمكننا أن :

نعبر عن هذه العلاقة جبرياً كما يلي :

$$\frac{س}{٧٠ - ٨٠} = \frac{٣٦ - ٤٠}{٣٦ - ٦١} \Rightarrow \frac{س}{١٠} = \frac{٤}{٢٥} \Rightarrow ٢٥ س = ٤٠ \Rightarrow س = ١,٦$$

$$\text{الوسيط} = ٧٠ + س = ٧٠ + ١,٦ = ٧١,٦$$

من المثال السابق نستطيع أن نستنتج المعادلة التالية لحساب الوسيط ،

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى لفئة الوسيط} + \left(\frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمّع السابق}}{\text{التكرار المتجمّع اللاحق} - \text{التكرار المتجمّع السابق}} \right) \times \text{طول الفئة}$$

$$\text{ونستطيع أن نكتب ذلك رمزياً كما يلي : الوسيط} = ح + \left(\frac{\sum_{ك=١}^{\text{ن}} - ك_١}{ك_٢ - ك_١} \right) \times ف$$

حيث ح، الحد الأدنى لفئة الوسيط ،

ك، التكرار المتجمّع السابق لفئة الوسيط ، ك_٢ التكرار المتجمّع اللاحق لفئة الوسيط.

لاحظ أن ك_٢ - ك_١ = تكرار فئة الوسيط ، ف هي طول الفئة .

مثال (٢) فيما يلي أعمار ٩٠ متسابق في القراءة السريعة. والمطلوب حساب وسيط هذه الأعمار

أ. لأقرب سنة

ب. لأقرب شهر

٢٦ - ٢٣	-٢٠	-١٧	-١٤	-١١	فئات الأعمار بالسنة
١١	٢٠	٢٢	٢٤	١٣	التكرارات

الحل : نطبق المعادلة السابقة ، مع ملاحظة أن ترتيب الوسيط $= 2 \div 90 = 45$

الفئة	التكرارات	الجدول المتجمّع الصاعد	
		الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمّع الصاعد
-١١	١٣	أقل من ١٤	١٣
-١٤	٢٤	أقل من ١٧	٣٧
-١٧	٢٢	أقل من ٢٠	٥٩
-٢٠	٢٠	أقل من ٢٣	٧٩
٢٦ - ٢٣	١١	أقل من ٢٦	٩٠

$$\text{الوسيط} = 17 + \left(\frac{37 - 45}{37 - 59} \right) \times 17 = 17 + \left(\frac{8}{22} \right) \times 17 = 17 + 6,1 = 23,1 \text{ سنة}$$

العمر لأقرب سنة = ١٨ سنة ، لحساب أقرب شهر : $12 \times 0,1 = 1,2$ شهر
أي أن الوسيط لأقرب شهر = ١٨ سنة وشهر واحد تقريباً .

تمرين (٤-٥)

١. بيانات الجدول التالي يمثل أعمار ٣٠ مريض زاروا طبيب الأسنان ، احسب وسيط الأعمار :

٥٦-٤٨	-٤٠	-٣٢	-٢٤	-١٦	فئات الأعمار بالسنة
٧	٩	٨	٤	٢	التكرارات

٢. الجدول يمثل كتلة ٦٠ طفل لأقرب كيلوجرام . احسب وسيط كتل هؤلاء الأطفال .

١٨-١٥	-١٢	-٩	-٦	-٣	فئات الكتل
٦	٨	١٥	١٨	١٣	التكرارات

٣. سجل قياس الضغط الانقباضي لعدد من الأشخاص حسب الجدول التالي :

١٥٠-١٤٠	-١٣٠	-١٢٠	-١١٠	-١٠٠	-٩٠	الفئات
١٢	١٥	٣٥	١٤	٩	٥	التكرارات

أ. احسب وسيط الضغط الانقباضي .

ب. هل تعلم أن الكركدي يشتهر بقدرته على تخفيض الضغط ، وأنه غني بفيتامين سي ، وأن السودان يتصدر قائمة الدول المنتجة له (حوالي ٥٠٪ من الإنتاج العالمي) ، ويعتبر الكركدي السوداني من أجود أنواع الكركدي .

(٤-٦) المنوال من الجداول التكرارية : Mode from a Frequency Tables

تعلّمنا سابقاً أن المنوال هو القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها ، أي القيمة الأكثر تكراراً.

فالمنوال للقيم : ٥ ، ٧ ، ٣ ، ٧ ، ٦ ، ٩ ، ٨ هو ٧ لأنها تكررت أكثر من غيرها .
مثال (١) البيانات التالية توضح عدد الأطفال في ٧٢ أسرة : جدّ المنوال لعدد الأطفال .

٥	٤	٣	٢	١	٠	عدد الأطفال في الأسرة
١٠	١٥	٢٥	١٢	٦	٤	عدد الأسر

الحل : حيث أن المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً ؛ عليه فالمنوال = ٣

ويعني ذلك أن أكثر الأسر لديها ٣ أطفال .

هل يمكن أن يكون للتوزيع أكثر من منوال ؟

مثال (٢) الجدول أدناه يبيّن أطوال ٨٥ شخصاً لأقرب سنتيمتر . جدّ المنوال لأطوال هؤلاء الأشخاص .

١٩٠	١٨٠	١٧٠	١٦٠	١٥٠	١٤٠	الأطوال
٥	١٩	٢١	١٧	٢١	٢	التكرار

الحل : حيث أن المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً فإنه يوجد منوالان هما ١٥٠ ، ١٧٠

أي أن أغلب هؤلاء الأشخاص تكون أطوالهم إما ١٥٠ سم أو ١٧٠ سم .

مثال (٣) من البيانات الموضحة على الجدول أدناه ، جدّ المنوال .

٥	٤	٣	٢	١	٠	المتغير س
٨	٨	٨	٨	٨	٨	التكرارات

الحل : نعلم أن المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً ، ولا توجد أي قيمة من القيم تكررت

أكثر من غيرها ؛ لذا لا يوجد منوال في هذه الحالة .

تمرين (٦-٤)

١. جد المنوال لكل من البيانات الممثلة في الجداول التكرارية التالية :
أ.

المتغيّر س	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
التكرارات	٨	٣	٤	٩	٢	٩	٦

ب.

المتغيّر س	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦
التكرارات	٣٢	٣٢	٣٢	٣٢	٣٢	٣٢	٣٢

٢. يبيّن الجدول أدناه درجات الحرارة في شهر أبريل بالخرطوم في إحدى السنوات ،

درجة الحرارة	٣٩	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤
التكرارات	٨	٦	٥	٥	٤	٢

أ. جد المنوال لدرجات الحرارة.

ب. احسب الوسيط لدرجات الحرارة ، ثم قارن بين قيمتي الوسيط والمنوال .
ج. هل بالضرورة أن تكون قيمة الوسيط مقاربة لقيمة المنوال ؟ (ارجع لتعريف كل منهما)

٣. اتفق ٢٥ شاب على تشجير الحي الذي يسكنون فيه ، وتوزعوا إلى مجموعات لذلك،
ورصدت كل مجموعة عدد الأشجار التي قامت بزراعتها خلال هذا الأسبوع ، وكانت
حسب الجدول التالي :

عدد الأشجار المزروعة	٣	٤	٥	٦	٧
عدد أفراد المجموعات	٢	٥	٤	٨	٦

جدّ كلّاً من : أ. المنوال لعدد الأشجار المزروعة بواسطة الشاب الواحد

ب. الوسط الحسابي لعدد الأشجار التي يزرعها الشاب الواحد ، ثم قارن بينهما .

ج. إذا أردنا أن نعرف مقدار إنجاز كل شاب في هذا الأسبوع ، فأَي المقياسين أفضل
لذلك ، الوسط الحسابي أم المنوال ؟ برّر إجابتك .

(٧-٤) المنوال من الجداول التكرارية ذات الفئات :

Mode from Grouped Frequency Tables (Classes)

مثال (١) يبيّن الجدول أدناه سرعة ١٣٠ سيارة على طريق الأبيض أمدرمان ، احسب منوال السرعة .

السرعة كم/ ساعة	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠	١١٠-١٠٠
التكرارات	٢٣	١٤	٢٢	٣٤	٢٥	١٢

الحل : حيث أن المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً وهو ٣٤ ، عليه فإن قيمة المنوال تقع في الفئة (٨٠-٩٠). ما مركز هذه الفئة ؟ بصورة تقريبية يقع المنوال عند مركز الفئة وعليه فإن المنوال = ٨٥ كم /الساعة تقريباً (فسر هذه الإجابة) .
يمكن حساب المنوال بعدة طرق ، وفيما يلي سنتعرّف على طريقة أخرى لإيجاد المنوال لبيانات المثال السابق .

مثال (٢) لبيانات نفس المثال السابق جدّ المنوال بطريقة أخرى .

السرعة كم/ ساعة	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠	١١٠-١٠٠
التكرارات	٢٣	١٤	٢٢	٣٤	٢٥	١٢

لتحديد موقع المنوال داخل الفئة المنوالية نفترض أن القيم داخل هذه الفئة تتوزع بصورة منتظمة وليست متمركزة عند منتصف الفئة كما في المثال السابق ؛ فإذا رمزنا لبُعد المنوال عن الحد الأدنى للفئة المنوالية بالرمز s ، ولتكرار المنوال بالرمز k يكون k هو التكرار قبل الفئة المنوالية k' هو التكرار بعد الفئة المنوالية ، ف طول الفئة ، عليه نوجد قيمة s بالتناسب التالي :

$$\frac{s}{f - s} = \frac{k' - k}{k}$$

وتعتمد هذه الطريقة على الفروق بين التكرارات ، لذا تسمى أحياناً بطريقة الفروق أو طريقة بيرسون .

نطبق هذه المعادلة في حل المثال السابق كما يلي :

$$\frac{س}{س - ١٠} = \frac{٢٢ - ٣٤}{٢٥ - ٣٤} = \frac{٤}{٣} \Leftarrow ٣س = ٤(س - ١٠) \Leftarrow ٧س = ٤٠$$

$\Leftarrow س = ٥,٧$ تقريباً

أي أن المنوال $= ٨٠ + س = ٨٥,٧$ قارن بالإجابة السابقة .

■ باستخدام الضرب العكسي نستطيع وضع معادلة بيرسون السابقة كما يلي :

$$(ك' - ك_٢) س = (ك' - ك_١) (ف - س)$$

■ هناك عدة طرق لحساب المنوال وكلها طرق تقريبية ، ولعلك لاحظت الفرق بين قيمة المنوال في المثالين السابقين . وتعتبر طريقة بيرسون هي الأدق من بين طرق حساب المنوال ؛ لذا سنركز عليها في حل الأمثلة والتمارين .

مثال (٣) تم إعطاء جرعة بالمليتر من علاج معين لتجربة في ٥٠ فأراً ، وملاحظة عدد الذين شفوا من المرض حسب الجدول التالي :

الجرعة بالمليتر	-١	-٥	-٩	-١٣	١٧ - ٢١
عدد حالات الشفاء ك	٣	٩	١٤	١٨	٦

جدّ الجرعة بالمليتر التي أدت إلى علاج أكبر عدد من الفئران .

الحل : لحساب قيمة س نجد أن : $ك' = ١٨$ ، $ك = ١٤$ ، $ك_٢ = ٦$ ، $ف = ٤$

حيث أن : $(ك' - ك_٢) س = (ك' - ك_١) (ف - س)$ ، فإن :

$$(١٨ - ٦) س = (١٨ - ١٤) (٤ - س) \Leftarrow ١٢ س = ١٦ - ٤س$$

$$١٦ س = ١٦ \Leftarrow س = ١ \Leftarrow \text{المنوال} = ١ + ١٣ = ١٤ \text{ ملليتر}$$

عليه فالجرعة المطلوبة التي أدت لعلاج أكبر عدد من الفئران هي ١٤ ملليتر .

تمارين (٤-٧)

١. بيّن الجدول التالي أطوال ٥٠ سلكاً تستخدم في مختبر الفيزياء مقربة لأقرب سنتيمتر:

٤٥ - ٤٠	-٣٥	-٣٠	-٢٥	-٢٠	طول السلك - سنتيمتر
٥	١٧	١٣	٩	٦	عدد الأسلاك ك

احسب المنوال لأطوال الأسلاك لأقرب سنتيمتر بالطريقتين .

٢. سُجّلت أعمار ركاب أحد الباصات السياحية المتجهة من الفاشر إلى مدني كالاتي:

٦٠ - ٥٠	-٤٠	-٣٠	-٢٠	-١٠	فئة العمر بالسنة
٣	٦	١٠	١٤	٧	عدد الركاب ك

جدّ المنوال : أ. بطريقة مراكز الفئات ب. بطريقة بيرسون

٣. أُجري مسح على (٦٠) شخصاً مصاباً بسرطان الرئة بسبب التدخين ، وسجلوا عدد علب السجائر التي يدخنها خلال الأسبوع ، فكانت كما يلي :

١٦ - ١٣	-١٠	-٧	-٤	-١	عدد علب السجائر
١٨	١٥	١١	١٠	٦	عدد المصابين ك

■ جدّ المنوال بطريقة : أ. مراكز الفئات . ب. بطريقة بيرسون

■ بناءً على إحصائيات وزارة الصحة السودانية (٢٠١٧) تبلغ نسبة المدخنين ٧٩٪ من الرجال و ٢٠٪ من الإناث ، و ٤٠٪ من طلاب الجامعات (أرقام مريعة !) .

■ حسب منظمة الصحة العالمية فإن ٧٠٪ من وفيات سرطان الرئة كانت بسبب التدخين، وتقل الخطورة إلى النصف بعد ١٠ سنوات من الإقلاع عن التدخين .

٤. البيانات التالية تمثل كمية الحليب التي تنتجها ٥٠ بقرة محسّنة من أبقار كنانة بإحدى المزارع بولاية كسلا :

٢٠ - ١٧	-١٤	-١١	-٨	-٥	-٢	إنتاج الحليب بالكيلوجرام
١	٤	٥	٨	١٢	٢٠	عدد الأبقار ك

■ احسب منوال إنتاج الأبقار لأقرب كيلوجرام :

أ. بطريقة مراكز الفئات ب. بطريقة بيرسون

ج. حدّد إنتاج البقرة من الحليب -على الأغلب - لأقرب كيلوجرام .

■ لتر الحليب = ١,٠٣ كيلوجرام تقريبا (أيهما أكبر كثافة الحليب أم كثافة الماء ؟)

■ تمتلك هولندا ٣,٥٧ مليون رأس من البقر وتنتج ١١٤٦٩ طن من الحليب (٢٠٠٩)

■ يمتلك السودان ٣٠,١٣ مليون رأس من البقر وينتج ٤٣٥٩ طن من الحليب ويستورد

الألبان من هولندا. برأيك ما السبب ؟

مراجعة المجلس العلمي

(٤-٨) : مميزات وعيوب مقاييس النزعة المركزية :

Advantages and Disadvantages of Measures of Central Tendency

مثال (١) البيانات التالية تمثل الساعات الإضافية التي عملها ٨ عمال في أحد المصانع :

٥ ، ٩،٥ ، ٥،٥ ، ٧ ، ٦،٥ ، ٨،٥ ، ٣١ ، ٧

جدّ كلاً من : الوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال لهذه البيانات .

الحل : الوسط الحسابي = $(٥ + ٩،٥ + ٥،٥ + ٧ + ٦،٥ + ٨،٥ + ٣١ + ٧) \div ٨ = ١٠$

نرتب القيم : ٥ ، ٦،٥ ، ٧ ، ٧ ، ٨،٥ ، ٩،٥ ، ٣١ ، ٧ . عليه فالوسيط = ٧ .
المنوال = ٧ أيضاً . لماذا ؟

■ ما القيمة البعيدة عن القيم ؟ (تسمى القيمة البعيدة عن مجموعة البيانات بالقيمة المتطرفة، وقد تكون أكبر من بقية القيم بكثير أو أصغر منها بكثير) .

مثال (٢) : أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لنفس القيم السابقة من دون القيمة المتطرفة.

لعلك لاحظت أن الوسط الحسابي الجديد أصبح ٧

وكذلك أصبح الوسيط = ٧ ، والمنوال = ٧

ما تأثير القيمة المتطرفة على كل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال ؟

من المثال السابق نستطيع تلخيص إيجابيات وسلبيات كل مقياس من مقاييس النزعة المركزية كما يلي :

الوسط الحسابي :

المميزات :

١. يعطي قيمة متوسطة لمجموعة البيانات وصورة واضحة عن تمثيل المجموعة.
٢. يمكن حسابه بسهولة.
٣. يتأثر بجميع القيم في المجموعة.
٤. أكثر مقاييس النزعة المركزية شيوعاً ؛ حيث يتم استخدامه في معظم الحسابات الإحصائية وخاصةً لمجموعة البيانات الكبيرة .

العيوب :

١. بالرغم من أن الوسط الحسابي هو المقياس الأكثر شيوعاً، إلا أن أكبر عيوبه تتمثل في تأثره بالقيم المتطرفة (الشاذة) الموجودة في مجموعة البيانات؛ وفي حال وجود القيم المتطرفة يصبح غير ممثلٍ للغالبية العظمى من البيانات.

مثال (٣) : إذا كان عدد الأشجار في خمسة مزارع : (١٠٠٠ ، ١٢٠٠ ، ١٣٠٠ ، ١٥٠٠ ، ١٠٠٠٠) ، فإن الوسط الحسابي سيكون مرتفعاً جداً (حوالي ٣٠٠٠ شجرة) ، بينما نجد في الواقع أن معظم هذه المزارع بها أقل من ١٥٠٠ شجرة بالمزرعة .

٢. غير مناسب للبيانات النوعية/الوصفية؛ فلا يمكن حسابه للبيانات غير الرقمية (مثل : أنواع السيارات ، أنواع الألعاب ، التخصص) ، ولا حتى للبيانات الترتيبية (مثل : ممتاز ، جيد جداً ، جيد ، مقبول) .

الوسيط :

المميزات :

١. لا يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة).
٢. سهل الحساب .
٣. يعطي قيمة وسطى لمجموعة البيانات وأحياناً يكون أحد القيم.
٤. يمكن حسابه للبيانات ذات المستوى الترتيبي (ممتاز ، جيد جداً ، جيد ، مقبول)

الميوب :

١. لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار: يعتمد الوسيط فقط على القيمة (أو القيمتين) الموجودة في منتصف التوزيع ؛ ويتجاهل بقية القيم الأخرى في المجموعة.
٢. صعوبة المعالجة الجبرية تجعله أقل ملاءمة للاستخدام في العمليات الإحصائية والتحليل المتقدم مقارنةً بالوسط الحسابي.

المنوال :

المميزات :

١. يعطي صورة واضحة عن مجموعة البيانات حيث أنه القيمة الأكثر تكراراً فيها.
٢. يمكن حسابه بسهولة ويمكن تحديده بمجرد النظر أحياناً .
٣. يمكن استخدامه مع البيانات النوعية/الاسمية ، مثل : (أنواع السيارات ، الألوان التي يفضلها الأطفال)
٤. لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

الميوب

١. قد لا يكون وحيداً ؛ فقد يكون للتوزيع أكثر من منوال ، وقد لا يوجد أي منوال إذا لم تتكرر أي قيمة ؛ مما يجعل استخدامه كمقياس مركزي واحد صعباً.
 ٢. يعتمد على تكرار القيمة فقط ، ولا يأخذ في الحسبان بقية القيم في المجموعة.
 ٣. ليس مفيداً في التحليل المتقدم حيث لا يتمتع بنفس الخصائص الرياضية التي يتمتع بها الوسط الحسابي؛ مما يجعله أقل استخداماً في الإحصاء الاستدلالي.
- مثال (٤):** البيانات التالية تمثل الرياضة المفضلة لدى عدد من الأشخاص :

نوع الرياضة	كرة قدم	كرة سلة	كرة يد	كرة طائرة	كرة تنس
العدد	١١٥	٨٢	٣٦	٩٤	٢٣

ما المقياس المناسب من مقاييس النزعة المركزية الذي يمكن استخدامه لوصف هذه البيانات ؟

الحل : من الواضح أن المقياس الوحيد الذي يمكن أن يصف هذه البيانات هو المنوال، من البيانات نجد أن كرة القدم هي الأكثر تكراراً ، وبالتالي فهي الرياضة الأكثر شيوعاً.

مراجعة المجلس العلمي

تمرين (٤-٨)

١. إذا كانت درجات الطلاب في إحدى المواد كما يلي :
٤٥ ، ٣٦ ، ٤٣ ، ٥٠ ، ٤٨ ، ٣٨ ، ١٠
أ. هل الوسط الحسابي مقياس مناسب في هذه الحالة ؟ ولماذا ؟ وماذا نفعل إذا أردنا أن نتعرف على مستويات الطلاب الحقيقية في هذه المادة باستخدام الوسط الحسابي ؟
ب. هل الوسيط مناسب لمعرفة مستويات هؤلاء الطلاب ؟ ولماذا ؟
ج. هل المنوال مناسب لوصف مستويات الطلاب في هذه الحالة ؟ برّر إجابتك .
٢. إذا توفر لصاحب مصنع للملابس عدد كبير من مقاسات الأشخاص ، ويريد تحديد مقاس القميص الأكثر مبيعاً في السوق ليزيد من الكمية المنتجة منه ؛ فأى مقاييس النزعة المركزية يستخدم ؟ برّر إجابتك .
٣. أي مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي - الوسيط - المنوال) هو الأنسب لوصف الحالات الآتية :
 - أ. نوع السيارات الأكثر استخداماً في المدينة .
 - ب. لون البالونات الذي يفضلُه أغلب الأطفال .
 - ج. السعر الجاري لقيم الأراضي في منطقة معينة .
 - د. تحديد مستوى طلاب صفٍ ما في مادة معينة حسب نتائج الاختبار .
 - هـ. معرفة درجة الطالب في اختبار ما، التي تصف نصف عدد الطلبة الذين حصلوا على درجات أعلى منها ، والنصف الآخر للذين حصلوا على درجات أقل منها .
٤. تتألف مجموعة بيانات من ٤ أعداد ، إذا علمت أن منوالها ٧ ووسيطها ٨,٥ ، ووسطها الحسابي ٩ ، فما هي هذه الأعداد الأربعة .

١. حساب الوسط الحسابي من الجدول التكراري :

$$\bar{س} = \frac{\sum س \times ك}{\sum ك} \quad \text{حيث } \bar{س} \text{ الوسط الحسابي ، } س \text{ ترمز للقيمة ، } ك \text{ تعبر عن تكرار القيمة}$$

٢. حساب الوسط الحسابي من الجدول التكراري ذي الفئات :

$$\bar{س} = \frac{\sum م \times ك}{\sum ك} \quad ، \quad م \text{ هي مركز الفئة}$$

٣. حساب الوسيط من الجدول التكراري :

نعيد ترتيب بيانات الجدول التكراري المعطى بإضافة عمود للتكرار المتجمّع ، وعمود آخر لمواقع المتغيّرات . نحدّد ترتيب الوسيط بقسمة مجموع التكرارات على ٢ . بناءً على ذلك نحدد موقع الوسيط ؛ حيث تكون القيمة المقابلة لهذا الموقع مساوية للوسيط .

٤. حساب الوسيط من الجدول التكراري :

ننشئ جدول متجمّع صاعد ونحسب منه الوسيط حسب الصيغة التالية :

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى لفئة الوسيط} + \left(\frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمّع السابق}}{\text{التكرار المتجمّع اللاحق} - \text{التكرار المتجمّع السابق}} \right) \times \text{طول الفئة}$$

$$\text{ونستطيع أن نكتب ذلك رمزياً كما يلي : الوسيط} = ح_1 + \left(\frac{\frac{ن}{2} - \sum_{1} ك}{\sum_{1} ك - \sum_{2} ك} \right) \times ف$$

حيث ح₁ الحد الأدنى لفئة الوسيط ،

ك₁ التكرار المتجمّع السابق لفئة الوسيط ، ك_٢ التكرار المتجمّع اللاحق لفئة الوسيط.

لاحظ أن (ك_١ - ك_٢) = تكرار فئة الوسيط

٥. لإيجاد المنوال من الجدول التكراري يكون المنوال هو القيمة أو الصفة الأكثر تكراراً .

٦. لحساب المنوال من الجدول التكراري ذو الفئات نستخدم الصيغة التالية لإيجاده :

$$(ك_٢ - ك_١) س = (ك_٣ - ك_٢) (ف - س)$$

حيث س هو بُعد المنوال عن الحد الأدنى للفئة المنوالية ، ك_٢ هو تكرار الفئة المنوالية

وهو أكبر تكرار ، ك_١ هو التكرار قبل الفئة المنوالية ، ك_٣ هو التكرار بعد الفئة المنوالية،

ف طول الفئة. المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

تمرين (٩-٤)

١. خلال ساعة الذروة تم حصر عدد الركاب في جميع السيارات التي عبرت إشارة المرور الضوئية فكانت حسب الجدول التالي :

عدد الركاب	١	٢	٣	٤	٥
عدد السيارات	٤١	٣٧	١٢	٦	٤

جَدِّ كلاً من : أ. الوسط الحسابي ب. الوسيط ج. المنوال
٢. رصدت أمتعة (٦٢) راكباً على متن الخطوط الجوية السودانية لأقرب كيلوجرام ، كما يلي :

الكتلة بالكيلوجرام	-١٠	-١٥	-٢٠	-٢٥	-٣٠	-٣٥ - ٤٠
التكرار	٥	١٢	١٧	١٣	٩	٦

احسب كلاً من : أ. الوسط الحسابي ب. الوسيط ج. المنوال
(تأسست الخطوط الجوية السودانية في العام ١٩٤٧م وهي من أعرق خطوط الطيران العربية والأفريقية وهي عضو في اتحاد النقل الجوي الدولي منذ ١٩٦٥م)
٣. ما مميّزات الوسط الحسابي ؟ وما أكبر عيب له؟
٤. حدّد مميّزات وعيوب كل من الوسيط والمنوال .
٥. هل يمكن إيجاد الوسط الحسابي لجميع أنواع البيانات ؟ وضح إجابتك بمثال .

الوحدة الخامسة

حساب المثلثات Trigonometry

أهداف الوحدة:

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١. يجد النسب المثلثية للزاوية (ه -) .
٢. يجد النسب المثلثية لمجموع وفرق زاويتين .
٣. يجد النسب المثلثية لضعف الزاوية .
٤. يستنتج النسب المثلثية لثلاثة أمثال الزاوية .
٥. يجد النسب المثلثية لنصف الزاوية .
٦. يعرف الزوايا المنتسبة .
٧. يحول حاصل ضرب جيبين أو جيبى تمام إلى مجموع أو فرق .
٨. يحول حاصل مجموع أو فرق جيبين أو جيبى تمام إلى حاصل ضرب .
٩. يعرف المعادلة المثلثية .
١٠. يميز بين المتطابقات والمعادلات المثلثية .
١١. يحل المعادلات المثلثية .
١٢. يطبق مفاهيم حساب المثلثات على علوم أخرى أو مسائل حياتية .

لماذا ندرس حساب المثلثات؟

لأنه يساعدنا على فهم وقياس الزوايا والأطوال والمسافات التي يصعب قياسها مباشرة. فعن طريقه نستطيع حساب ارتفاع الجبال والمباني، والمسافات بين الأماكن البعيدة، وحركة الأجسام باستخدام العلاقات بين أضلاع وزوايا المثلثات. كما أن حساب المثلثات يُستخدم في مجالات كثيرة مثل الهندسة، والفيزياء، وعلم الفلك، والملاحة، والهندسة المعمارية؛ لذلك فهو مهم لفهم كثير من التطبيقات العلمية والعملية في حياتنا.

(٥-١) المعارف السابقة المكتسبة: Previously Acquired Knowledge

من خلال دراستنا لحساب المثلثات سابقاً تعرّفنا على الآتي :

■ **الزاوية الموجّهة**: هي التي تتكوّن من شعاعين يمتدّان من نقطة مشتركة تسمّى رأس الزاوية.

■ تكون الزاوية الموجّهة في **وضعها القياسي** إذا وقع رأسها على نقطة الأصل وانطبق ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات.

■ تكون الزاوية الموجّهة **موجبة** إذا دار ضلعها النهائي في اتجاه مضاد لعقارب الساعة وتكون **سالبة** إذا دار في اتجاه عقارب الساعة.

■ **دائرة الوحدة**: هي دائرة مركزها عند نقطة الأصل ونصف قطرها وحدة واحدة.

■ في أي نقطة على محيط دائرة الوحدة:

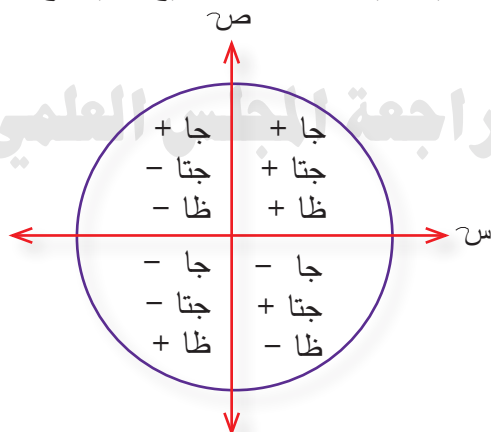
جاه يمثل الإحداثي الصادي.

جتاه يمثل الإحداثي السيني.

■ $\frac{\text{جاه}}{\text{جتاه}} = \text{ظاه}$ ، $\frac{\text{جتاه}}{\text{جاه}} = \text{ظناه}$ ، $\frac{1}{\text{جتاه}} = \text{قاه}$ ، $\frac{1}{\text{جاه}} = \text{قتاه}$

$\text{جتاه}^2 + \text{جاه}^2 = 1$

■ **إشارة** الدالة المثلثية لأيّ زاوية تُحدّد حسب الربع الذي تقع فيه:



■ **زاوية الإسناد** لأيّ زاوية ه هي الزاوية الحادة المحصورة بين محور السينات والضلع النهائي للزاوية ه

■ قيم الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة:

الدالة \ هـ	٠	٣٠	٤٥	٦٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠
جا هـ	٠	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	٠	-١	٠
جتا هـ	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	٠	-١	٠	١
ظا هـ	٠	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	١	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\text{غير معرف}}$	٠	$\frac{1}{\text{غير معرف}}$	٠

أما قا هـ ، قتا هـ ، ظتا هـ فهي مقلوبات الدوال السابقة .

خطأ شائع :

يعتقد البعض أنّ $\frac{1}{0} = \infty$ ، أو $0 \neq$ وهذا غير صحيح.

والصحيح هو $\frac{1}{0}$ غير معرف، أو $0 \neq$

أي أن قسمة أي عدد غير صفري على الصفر كمية غير معرّقة وليست مساوية لـ ∞

• **تمرين (١-٥)** •

جد قيم الدوال المثلثية لكل من الزوايا التالية :

أ. ٩٠

ب. $\left(\frac{\pi^2}{3} \right)^\circ$

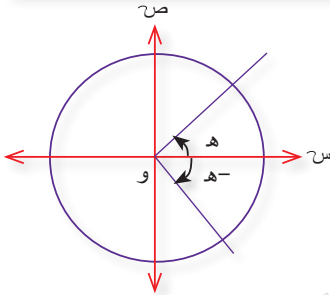
ج. $\left(\frac{\pi^7}{4} \right)^\circ$

د.

٢١٠

(٢-٥) الدوال المثلثية للزاوية (-٥) :

Trigonometric functions of the angle $(-\theta)$



إذا كانت الزاوية (٥) تقع في الربع الأول فإن الزاوية (-٥) تقع في الربع الرابع. ومعلوم أن زاوية الإسناد للزاوية (- ٥) هي (٥) . عليه يمكننا إيجاد الدوال (النسب) المثلثية للزاوية (- ٥) بدلالة زاوية الإسناد لها . فيكون :

جتا (- ٥) = جتا ٥	قا (- ٥) = - قا ٥
جا (- ٥) = - جا ٥	قتا (- ٥) = - قتا ٥
ظا (- ٥) = - ظا ٥	ظتا (- ٥) = - ظتا ٥

ملاحظة مهمة :

يمكننا استخدام نفس العلاقات السابقة في حالة وقوع الزاوية (- ٥) في الأرباع : الثاني أو الثالث أو الأول .

مثال : جد قيم الدوال (النسب) المثلثية لكل من الزوايا التالية :

أ. $\left(\frac{\pi}{4} \right)^\circ$ ب. 240°

الحل : أ. $\left(\frac{\pi}{4} \right)^\circ = 45^\circ$

جتا (- ٤٥) = جتا ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ قا (- ٤٥) = - قا ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

جا (- ٤٥) = - جا ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ قتا (- ٤٥) = - قتا ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ظا (- ٤٥) = - ظا ٤٥ = ١ ظتا (- ٤٥) = - ظتا ٤٥ = ١

ب . - ٢٤٠°

جتا (- ٢٤٠°) = جتا ٢٤٠° [حسب قاعدة الدوال المثلثية للزاوية (-هـ)]

وبما أن الزاوية ٢٤٠° تقع في الربع الثالث وزاوية الإسناد لها هي ٦٠° :

$$\therefore \text{جتا} (- ٢٤٠^\circ) = \text{جتا } ٢٤٠^\circ = - \text{جتا } ٦٠^\circ = - \frac{1}{2}$$

$$\text{جا} (- ٢٤٠^\circ) = - \text{جا } ٢٤٠^\circ = - [\text{جا } ٦٠^\circ] = - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ظا} (- ٢٤٠^\circ) = - \text{ظا } ٢٤٠^\circ = - [\text{ظا } ٦٠^\circ] = - \sqrt{3}$$

$$\text{قا} (- ٢٤٠^\circ) = \text{قا } ٢٤٠^\circ = \text{قا } ٦٠^\circ = \frac{2}{3}$$

$$\text{قتا} (- ٢٤٠^\circ) = - \text{قتا } ٢٤٠^\circ = - [\text{قتا } ٦٠^\circ] = - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ظتا} (- ٢٤٠^\circ) = - \text{ظتا } ٢٤٠^\circ = - [\text{ظتا } ٦٠^\circ] = - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل آخر: نحول الزاوية السالبة إلى زاوية موجبة مكافئة لها بإضافة ٣٦٠°

$$- ٢٤٠^\circ + ٣٦٠^\circ = ١٢٠^\circ$$

الزاوية ١٢٠° تقع في الربع الثاني وزاوية الإسناد لها ٦٠°

$$\therefore \text{جتا} (- ٢٤٠^\circ) = \text{جتا } ١٢٠^\circ = - \text{جتا } ٦٠^\circ = - \frac{1}{2}$$

تمارين (٢-٥)

جد قيم الدوال المثلثية لكلٍ من الزوايا التالية:

$$١. \left(\frac{\pi}{3} - \right) \quad ٢. - ١٣٥^\circ \quad ٣. - ٣٣٠^\circ$$

(٢-٥) النسب المثلثية لمجموع وفرق زاويتين :

Trigonometric Ratios for the Sum and Difference of Two Angles:

في كثيرٍ من الأحيان نحتاج إلى إيجاد النسب المثلثية لزاويا ليست من الزوايا الخاصة مثل (١٥) ولكن يمكننا التعبير عنها على صورة مجموع أو فرق زاويتين خاصتين، لذلك كانت الحاجة إلى قواعد النسب المثلثية لمجموع وفرق زاويتين. وعليه فإن:

إذا كان أ ، ب زاويتين في وضعهما القياسي على دائرة الوحدة كما في الشكل (١) و كما تعرّفنا سابقاً أنّ إحداثيات أيّ نقطة مثلثية

في دائرة الوحدة :

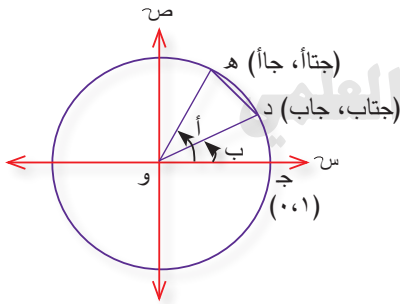
س = جتا هـ

ص = جا هـ (حيث هـ الزاوية الموجهة)

عليه تصبح النقطة المثلثية للزاوية أ هي

(جتا أ ، جا أ) .

و للزاوية ب هي (جتا ب ، جا ب) .



الشكل (١)

فإذا اردنا إيجاد المسافة بين النقطتين د ، هـ نجد أنّ :

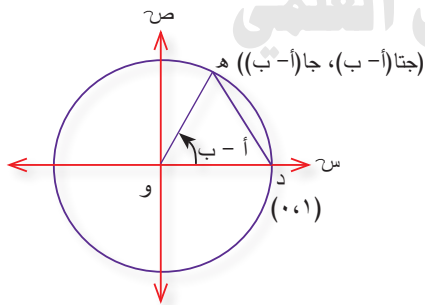
$$د هـ = \sqrt{(\text{جتا أ} - \text{جتا ب})^2 + (\text{جا أ} - \text{جا ب})^2} \quad (١)$$

من الشكل (١) لاحظ للزاوية > د و هـ ماذا تمثل ؟ نلاحظ أنها تمثل الزاوية (أ - ب) .
فإذا رسمنا > (أ - ب) في وضعها القياسي مع الحفاظ على طول د هـ لاحظ

الشكل (٢) تكون نقطتنا المثلثية هي :

(جتا (أ - ب) ، جا (أ - ب))

وبالتالي المسافة بين النقطتين د، هـ تصبح :



الشكل (٢)

$$د هـ = \sqrt{(\text{جتا (أ - ب)} - \text{جتا أ})^2 + (\text{جا (أ - ب)} - \text{جا أ})^2}$$

$$\therefore د هـ = \sqrt{(\text{جتا (أ - ب)} - \text{جتا أ})^2 + (\text{جا (أ - ب)} - \text{جا أ})^2} \quad (٢)$$

من المعادلتين (١) و (٢) نجد أن:

$$(ج\text{ا} - ج\text{ب})^2 + (ج\text{ا} - ج\text{ب})^2 = (ج\text{ا} - ج\text{ب})^2 + (ج\text{ا} - ج\text{ب})^2$$

و بفك الأقواس و الاختصارات نحصل على :

$$ج\text{ا} (ج\text{ا} - ج\text{ب}) = ج\text{ا} (ج\text{ا} - ج\text{ب}) + ج\text{ا} (ج\text{ا} - ج\text{ب})$$

النسب المثلثية للمجموع والفرق

نسب الفرق	نسب المجموع
$ج\text{ا} (ج\text{ا} - ج\text{ب}) = ج\text{ا} (ج\text{ا} - ج\text{ب}) + ج\text{ا} (ج\text{ا} - ج\text{ب})$ $ج\text{ب} (ج\text{ا} - ج\text{ب}) = ج\text{ب} (ج\text{ا} - ج\text{ب}) - ج\text{ب} (ج\text{ا} - ج\text{ب})$ $\frac{ج\text{ا} - ج\text{ب}}{ج\text{ا} + ج\text{ب}} = \frac{ج\text{ا} - ج\text{ب}}{ج\text{ا} - ج\text{ب}}$	$ج\text{ا} (ج\text{ا} + ج\text{ب}) = ج\text{ا} (ج\text{ا} + ج\text{ب}) + ج\text{ا} (ج\text{ا} + ج\text{ب})$ $ج\text{ب} (ج\text{ا} + ج\text{ب}) = ج\text{ب} (ج\text{ا} + ج\text{ب}) - ج\text{ب} (ج\text{ا} + ج\text{ب})$ $\frac{ج\text{ا} + ج\text{ب}}{ج\text{ا} - ج\text{ب}} = \frac{ج\text{ا} + ج\text{ب}}{ج\text{ا} - ج\text{ب}}$

نشاط : أثبت ما تبقى من قواعد النسب المثلثية أعلاه.

مفتاح :

- عوض (ب - ب) بدلاً عن (ب) لإثبات جتا (أ + ب) .
- استخدم خواص الزوايا المتممة لإثبات جتا (أ + ب) ، جتا (أ - ب) .

مثال (١) : دون استخدام الآلة الحاسبة جد قيمة ما يلي :

$$\text{ج\text{ا} } ١٥ \quad \text{ج\text{ب} } ١٩٥$$

الحل : (أ) جتا ١٥ = جتا (٦٠ - ٤٥)

$$ج\text{ا} (ج\text{ا} - ج\text{ب}) = ج\text{ا} (ج\text{ا} - ج\text{ب}) + ج\text{ا} (ج\text{ا} - ج\text{ب})$$

$$\therefore ج\text{ا} ١٥ = ج\text{ا} (٦٠ - ٤٥) = ج\text{ا} ٦٠ ج\text{ب} ٤٥ + ج\text{ا} ٤٥ ج\text{ب} ٦٠$$

$$\frac{(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} =$$

$$\text{ج\text{ب} } ١٩٥ = ج\text{ا} (٤٥ + ١٥٠) = \frac{ج\text{ا} ٤٥ + ج\text{ا} ١٥٠}{ج\text{ا} ٤٥ - ج\text{ا} ١٥٠} = \sqrt{3} - ٢$$

مثال (٢) : يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية و تُعطى شدة هذا التيار

ت بالأمبير بعد ن ثانية بالعلاقة ت (ن) = ٢ جا ٧٥ ن جد شدة التيار بعد ثانية واحدة .

الحل : شدة التيار بعد ثانية واحدة $n = 1$ هي :

$$ت(1) = 2 \text{ جا } 75^\circ - 1 \text{ جا } 30^\circ + 2 \text{ جا } 45^\circ = 2 \text{ جا } 75^\circ - 1 \text{ جا } 30^\circ + 2 \text{ جا } 45^\circ$$

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$\therefore \text{ شدة التيار بعد ثانية واحدة هي : } ت = 2 \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \text{ أمبير.}$$

مثال (٢) : أثبت صحة العلاقات التالية :

$$(أ) \text{ جتا } (90^\circ - ه) = \text{جا ه}$$

$$(ب) \text{ جا } (90^\circ + ه) = \text{جتا ه}$$

$$\text{الحل : (أ) جتا } (90^\circ - ه) = \text{جتا } 90^\circ \text{ جتا ه} + \text{جا } 90^\circ \text{ جا ه}$$

$$= 0 \times \text{جتا ه} + 1 \times \text{جا ه} = \text{جا ه}$$

$$(ب) \text{ جا } (90^\circ + ه) = \text{جا } 90^\circ \text{ جتا ه} + \text{جتا } 90^\circ \text{ جا ه}$$

$$= 1 \times \text{جتا ه} + 0 \times \text{جا ه} = \text{جتا ه}$$

تمرين (٥-٣)

١. جد قيمة ما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة :

$$(أ) \text{ جا } 105^\circ , \text{ جتا } 105^\circ , \text{ ظا } 105^\circ , \text{ جا } \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

$$(ب) \text{ جتا } 70^\circ \text{ جتا } 10^\circ + \text{جا } 70^\circ \text{ جا } 10^\circ$$

$$(ج) \text{ جا } 35^\circ \text{ جتا } 20^\circ - \text{جتا } 35^\circ \text{ جا } 20^\circ$$

$$(د) \frac{\text{ظا } 98^\circ + \text{ظا } 37^\circ}{\text{ظا } 98^\circ - \text{ظا } 37^\circ}$$

٢. أثبت صحة العلاقات التالية :

$$(أ) \text{ جتا } (270^\circ - ه) = -\text{جا ه} \quad (ب) \text{ ظا } (ه + 45^\circ) = \frac{1 + \text{ظا ه}}{1 - \text{ظا ه}}$$

$$(ج) \text{ جا } (أ + ب) \times \text{جا } (أ - ب) = \text{جا } أ^2 - \text{جا } ب^2$$

٣. إذا كان : $\frac{4}{5} = \text{جا س}$ ، $\frac{3}{5} = \text{جتا ص}$ ، $\frac{3}{5} = \text{س}$ ، $\frac{4}{5} = \text{ص}$ زاويتين حادتين . جد قيمة :

$$(أ) \text{ جتا } (س + ص) \quad (ب) \text{ جا } (س - ص)$$

(٤-٥) النسب المثلثية لضعف الزاوية :

Trigonometric Double-Angles Ratios

يمكننا استخدام النسب المثلثية لمجموع زاويتين لإيجاد النسب المثلثية لضعف الزاوية مثلاً :

$$\begin{aligned} \text{جا } 2\text{هـ} &= \text{جا } (\text{هـ} + \text{هـ}) = \text{جا هـ جتا هـ} + \text{جتا هـ جتا هـ} = 2 \text{ جا هـ جتا هـ} \\ \therefore \text{جا } 2\text{هـ} &= 2 \text{ جا هـ جتا هـ} \end{aligned}$$

و بنفس الصورة يمكننا الحصول على :

النسب المثلثية لضعف الزاوية		
$\frac{\text{ظا } 2\text{هـ}}{\text{ظا } 2\text{هـ} - 1} = \text{ظا } 2\text{هـ}$	$\text{جتا } 2\text{هـ} = \text{جتا } 2\text{هـ} - \text{جا } 2\text{هـ}$ $\text{جتا } 2\text{هـ} = 2 \text{ جتا } 2\text{هـ} - 1$ $\text{جتا } 2\text{هـ} = 1 - \text{جتا } 2\text{هـ}$	$\text{جا } 2\text{هـ} = 2 \text{ جا هـ جتا هـ}$

نشاط : برهن المتطابقات أعلاه .

مثال (١) : إذا كان جتا هـ = $\frac{\sqrt{5}}{3}$ وكانت هـ تقع في الربع الأول جد :

$$(1) \text{ جا } 2\text{هـ} \quad (2) \text{ جتا } 2\text{هـ} \quad (3) \text{ ظا } 2\text{هـ}$$

الحل: نستخدم المتطابقة الأساسية $\text{جتا } 2\text{هـ} + \text{جتا } 2\text{هـ} = 1$ لإيجاد جا هـ أولاً.

$$\text{جا } 2\text{هـ} - 1 = \text{جتا } 2\text{هـ} \quad \therefore \text{جا هـ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

و بما أن الزاوية هـ تقع في الربع الأول $\therefore \text{جا هـ} = \frac{2}{3}$

$$(1) \text{ جا } 2\text{هـ} = 2 \text{ جا هـ جتا هـ} = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$(2) \text{ جتا } 2\text{هـ} = \text{جتا } 2\text{هـ} - \text{جا } 2\text{هـ} = \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

(3) لإيجاد ظا 2هـ نوجد أولاً ظا هـ

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt[5]{4} = \frac{\frac{\sqrt[5]{2} \times 2}{5}}{2\left(\frac{\sqrt[5]{2}}{5}\right) - 1} = \frac{2 \text{ ظا ه}}{2 \text{ ظا ه} - 1} = \text{ظا ه} \quad \therefore \text{ظا ه} = 2 \text{ ه}$$

أو يمكننا الحصول عليه مباشرةً بقسمة جا ٢ ه ÷ جتا ٢ ه
مثال (٢): برهن أن :

$$(أ) \quad \frac{1}{4} (1 - \text{جتا ه}^2) = \text{جا ه}^2 \quad (ب) \quad (\text{جا ه} + \text{جتا ه})^2 = 1 + \text{جا ه}^2$$

$$\text{الحل: (أ)} \quad \frac{1}{4} (1 - \text{جتا ه}^2) = \frac{1}{4} ((2 - \text{جتا ه}^2) - 1) = \frac{1}{4} (1 - \text{جتا ه}^2) = \frac{1}{4} (1 - \text{جتا ه}^2) = \text{جا ه}^2$$

$$(ب) \quad (\text{جا ه} + \text{جتا ه})^2 = \text{جا ه}^2 + \text{جتا ه}^2 + 1 = 2 + \text{جا ه}^2 = 1 + \text{جا ه}^2 + 1 = 1 + \text{جا ه}^2$$

مثال (٢): صدّ لاعب كرة قدم كرة بزاوية ٧٥° من سطح الأرض بسرعة متجهة (ع) قدرها ١٥ م / ث إذا كانت المسافة الأفقية التي قطعها الكرة (ف) تُعطى بالعلاقة :

$$ف = \frac{٢٤ \text{ جا ه جتا ه}}{د} \quad \text{حيث د هي عجلة الجاذبية الأرضية وتساوي ١٠ م / ث}^2$$

(أ) بسّط العلاقة أعلاه مستخدماً النسب المثلثية لضعف الزاوية.

(ب) جد المسافة الأفقية التي قطعها الكرة باستعمال العلاقة المُبسّطة .

$$\text{الحل: (أ)} \quad ف = \frac{٢٤ \text{ جا ه جتا ه}}{د} = \frac{٢٤ \text{ جا ه}^2}{د}$$

$$(ب) \quad ف = \frac{(١٥) \text{ جا ه}^2}{١٠} = \frac{٠,٥ \times ٢٢٥}{١٠} = ١١,٣ \text{ متر}$$

تدريب:

إذا علمت أن جا س = $\frac{1}{4}$ جد جتا ٢ س باستخدام أكثر من طريقة.

تمرين (٥-٤):

١. جد قيم جا ٢ ه ، جتا ٢ ه ، ظا ٢ ه إذا كان :

$$\frac{1}{3} = \text{جا ه} , \quad ٩٠^\circ < \text{ه} < ١٨٠^\circ$$

٢. جد قيم الآتي بدون استخدام الآلة الحاسبة :

$$\begin{aligned} \text{أ.} \quad & \frac{2 \text{ ظا ه}}{1 - 2 \text{ ظا ه}^2} \\ \text{ب.} \quad & 1 - 2 \text{ جا ه}^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) \end{aligned}$$

مثال (١): بدون استخدام الآلة الحاسبة جد قيمة :

(١) جا ٢٢,٥ (٢) جتا ١٦٥ (٣) ظا $\left(\frac{\pi}{12}\right)$

الحل: (١) جا ٢٢,٥ = جا $\frac{45}{2}$ ، جا $\frac{45}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}}{2}}$

وبما أن ٢٢,٥ تقع في الربع الأول فإننا نأخذ القيمة الموجبة.

$$\therefore \text{جا } ٢٢,٥ = \text{جا } \frac{45}{2} = \frac{1 - \text{جتا}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$$

(٢) جتا ١٦٥ = جتا $\frac{330}{2}$ الزاوية ١٦٥ تقع في الربع الثاني لذلك نأخذ القيمة السالبة.

$$\text{جتا } \frac{330}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \text{جتا}}{2}} \therefore \text{جتا } ١٦٥ = \text{جتا } \frac{330}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \text{جتا}}{2}} = -\frac{\sqrt{3} + 2}{2}$$

(٣) $\frac{\pi}{12}$ راديان = ٧,٥

ظا $\left(\frac{\pi}{12}\right) = \text{ظا } ٧,٥ = \frac{150}{2}$

الزاوية ٧,٥ تقع في الربع الأول لذلك نأخذ القيمة الموجبة. $\therefore \text{ظا } \frac{150}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}}{1 + \text{جتا}}}$

$$\text{ظا } ٧,٥ = \frac{150}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}}{1 + \text{جتا}}} = \frac{150 - \text{جتا}}{150 + \text{جتا}} = \frac{\left(\frac{3}{2} - 1\right) - 1}{\left(\frac{3}{2} - 1\right) + 1} = \frac{\sqrt{3} + 2}{2}$$

مثال (٢): جد قيمة :

أ. جتا $\frac{\pi}{3}$ ب. ظا $\frac{\pi}{6}$

علماً بأن جا هـ = $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ، $١٨٠ > \text{هـ} > ٢٧٠$

الحل: نوجد أولاً جتا هـ من المتطابقة الأساسية جتا هـ = ١ - جا هـ

$$\text{جتا هـ} = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{3 - \sqrt{5}}{3} \therefore \text{جتا هـ} = \pm \frac{3 - \sqrt{5}}{3}$$

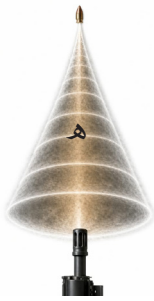
وبما أن هـ تقع في الربع الثالث $\therefore \text{جتا هـ} = -\frac{3 - \sqrt{5}}{3}$

$$أ. \text{ جتا } \frac{ه}{٢} \pm = \frac{١ + \text{جتا ه}}{٢} \pm = \frac{\sqrt{\frac{٢}{٣} - ١}}{\frac{٦}{٢}} \pm = \frac{\sqrt{\frac{٢}{٣} - ١}}{٣} \pm$$

بما أن ه تقع بين ١٨٠ ، ٢٧٠ فإن $\frac{ه}{٢}$ تقع بين ٩٠ ، ١٣٥ . $\therefore \text{جتا } \frac{ه}{٢} = \frac{\sqrt{٦}}{٦}$

$$ب. \text{ ظا } \frac{ه}{٢} \pm = \frac{١ - \text{جتا ه}}{١ + \text{جتا ه}} \pm = \frac{(\frac{٢}{٣}) - ١}{(\frac{٢}{٣}) + ١} \pm = \frac{\sqrt{٥}}{٥} \pm$$

ولكن $\frac{ه}{٢}$ تقع بين ٩٠ ، ١٣٥ . $\therefore \text{ظا } \frac{ه}{٢} = \frac{\sqrt{٥}}{٥}$



مثال (٣): عند انطلاق طلقة بسرعة أكبر من سرعة الصوت في الهواء ، تتكوّن حولها موجة صدمية (ناتجة من أمواج الصوت) على شكل مخروط حيث ترتبط زاوية رأس هذا المخروط (هـ) بسرعة الطلقة (ع) بالعلاقة :

$$\text{جا } \frac{ه}{٢} = \frac{٣٤٠}{ع} \quad (٣٤٠ \text{ م / ث تمثل سرعة الصوت في الهواء})$$

أ. عبّر عن سرعة الطلقة (ع) بدلالة دالة جيب التمام.

ب. إذا كان جتا ه = $\frac{٨}{٩}$ احسب سرعة الطلقة .

$$\text{الحل : أ. بما أن جا } \frac{ه}{٢} = \frac{٣٤٠}{ع} \therefore \frac{١ - \text{جتا ه}}{٢} = \frac{٣٤٠}{ع}$$

$$\therefore ع = \frac{٣٤٠}{\frac{١ - \text{جتا ه}}{٢}}$$

$$ب. \text{ نعوض جتا ه} = \frac{٨}{٩} \therefore ع = \frac{٣٤٠}{\frac{١ - \frac{٨}{٩}}{٢}} = \frac{٣٤٠ \times ٢}{\frac{١}{٩}} = ١٤٤٢ \text{ م/ث}$$

■ **سؤال للمناقشة :** لماذا اخترنا القيمة الموجبة من متطابقة جيب نصف الزاوية بالرغم من أن القاعدة تحتوي (±) ؟

■ **نلاحظ في بعض المناسبات الاجتماعية يتم إطلاق الأعيرة النارية في الهواء كتعبير عن الفرح ولكن في الحقيقة أن الرصاصة لا تخنفي في الفضاء بل تعود إلى الأرض بسرعة قد تكون قاتلة.**

تدريب:

$$\text{إذا علمت أن ظا س} = \frac{٤}{٣} , \text{ جتا س} > ٠ , ٠ \leq \text{س} < \pi \text{ جد جتا } \frac{س}{٢}$$

• تمرين (٥-٥) •

مستخدمًا متطابقات النسب المثلثية لنصف الزاوية جد قيمة الآتي:

(أ) جا 15° (ب) ظا $67,5^\circ$ (ج) جتا $\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (د) جتا (-135°)

٢. جد قيمة كلٍّ من جا $\frac{h}{2}$ ، جتا $\frac{h}{2}$ في الحالات الآتية :

(أ) جتا $h = \frac{5-}{13}$ ، $90^\circ > h > 180^\circ$

(ب) جا $h = \frac{1}{4}$ ، $0 > h > \frac{\pi}{2}$

٣. جد قيمة كلٍّ من جتا $\frac{h}{2}$ ، ظا $\frac{h}{2}$ في الحالات الآتية :

(أ) جا $h = \frac{4-}{5}$ ، $180^\circ > h > 270^\circ$

(ب) ظا $h = \frac{8-}{15}$ ، $\pi > h > \frac{\pi}{2}$

٤. أثبت صحة العلاقات الآتية :

أ. $\frac{\text{جا}^2 h}{2} = \frac{\text{جتا}^2 h}{2}$ ب. $\frac{\text{ظا} h}{2} = \frac{\text{جا} h}{(1 + \text{جتا} h)}$

ج. $\frac{\text{جا} h}{2} \cdot \frac{\text{جتا} h}{2} = \frac{\text{جا} h}{2}$

٥. متى نستخدم متطابقات ضعف الزاوية ومتى نستخدم متطابقات نصف الزاوية؟

(٥-٦) الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة:

Trigonometric Functions of Associated Angles

تعرفنا سابقاً كيفية إيجاد الدوال المثلثية لـزوايا مثل : ١٢٠° ، ١٥٠° ، ٢١٠° ، ...
عن طريق زاوية الإسناد.
هناك طرق أخرى يمكن من خلالها إيجاد الدوال المثلثية لنفس الزوايا وغيرها مثل
طريقة الزوايا المنتسبة.

تعريف :

إذا كانت (هـ) زاوية حادة فإن أي زاوية على الصورة $(ن \times ٩٠ \pm هـ)$ حيث ن عدد صحيح غير سالب تُسمى **زاوية منتسبة** للزاوية الحادة (هـ) .

فإذا وضعنا $ن = ١$ نحصل على الزاويتين $(٩٠ + هـ)$ ، $(٩٠ - هـ)$
وإذا وضعنا $ن = ٢$ نحصل على الزاويتين $(١٨٠ + هـ)$ ، $(١٨٠ - هـ)$
وإذا وضعنا $ن = ٣$ نحصل على الزاويتين $(٢٧٠ + هـ)$ ، $(٢٧٠ - هـ)$
وإذا وضعنا $ن = ٤$ نحصل على الزاويتين $(٣٦٠ + هـ)$ ، $(٣٦٠ - هـ)$ وهكذا ،،
حيث تُسمى كل من هذه الزوايا منتسبة إلى الزاوية (هـ) .

ويمكن التوصل إلى الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة للزاوية (هـ) بدلالة الدوال المثلثية للزاوية (هـ) ويمكن ذلك عن طريق متطابقات الدوال المثلثية لمجموع وفرق زاويتين .

فإذا أخذنا الزاوية $(٩٠ + هـ)$ مثلاً نجد أن :

$$\begin{aligned}\text{جتا } (٩٠ + هـ) &= \text{جتا } ٩٠ \text{ جتا هـ} - \text{جا } ٩٠ \text{ جا هـ} \\ &= ٠ \times \text{جتا هـ} - ١ \times \text{جا هـ} = -\text{جا هـ} \\ \text{جا } (٩٠ + هـ) &= \text{جا } ٩٠ \text{ جتا هـ} + \text{جتا } ٩٠ \text{ جا هـ} \\ &= ١ \times \text{جتا هـ} + ٠ \times \text{جا هـ} = \text{جتا هـ} \\ \text{ظا } (٩٠ + هـ) &= \frac{\text{جتا } (٩٠ + هـ)}{\text{جتا } (٩٠ + هـ)} = \frac{\text{جتا هـ}}{-\text{جا هـ}} = -\text{ظتا هـ}\end{aligned}$$

وبنفس الطريقة يمكننا التوصل إلى الآتي :

جتا ($90^\circ - هـ$) = جا هـ	جتا ($90^\circ + هـ$) = - جا هـ
جا ($90^\circ - هـ$) = جتا هـ	جا ($90^\circ + هـ$) = - جتا هـ
ظا ($90^\circ - هـ$) = ظتا هـ	ظا ($90^\circ + هـ$) = - ظتا هـ

فإذا استخدمنا نفس الأسلوب السابق يمكننا إيجاد الدوال المثلثية للزوايا على الصورة ($180^\circ \pm هـ$)

جتا ($180^\circ - هـ$) = - جتا هـ	جتا ($180^\circ + هـ$) = - جتا هـ
جا ($180^\circ - هـ$) = - جا هـ	جا ($180^\circ + هـ$) = جا هـ
ظا ($180^\circ - هـ$) = - ظتا هـ	ظا ($180^\circ + هـ$) = ظتا هـ

وكذلك يمكننا إيجاد الدوال المثلثية للزوايا على الصورة ($270^\circ \pm هـ$)

جتا ($270^\circ - هـ$) = - جا هـ	جتا ($270^\circ + هـ$) = جا هـ
جا ($270^\circ - هـ$) = - جتا هـ	جا ($270^\circ + هـ$) = - جتا هـ
ظا ($270^\circ - هـ$) = ظتا هـ	ظا ($270^\circ + هـ$) = - ظتا هـ

وأيضاً الدوال المثلثية للزوايا على الصورة ($360^\circ \pm هـ$) تكون :

جتا ($360^\circ - هـ$) = جتا هـ	جتا ($360^\circ + هـ$) = جتا هـ
جا ($360^\circ - هـ$) = جا هـ	جا ($360^\circ + هـ$) = جا هـ
ظا ($360^\circ - هـ$) = ظتا هـ	ظا ($360^\circ + هـ$) = ظتا هـ

مما سبق نلاحظ أن :

- عند نسبة الزاوية (هـ) للزاويتين 180° ، 360° لا تتغير الدالة المثلثية ، فالدالة بالطرف الأيمن للزاوية المنتسبة هي الدالة المثلثية نفسها في الطرف الأيسر للزاوية (هـ) بينما تخضع الإشارة للربع الذي تقع فيه الزاوية المطلوبة .
- عند نسبة الزاوية (هـ) للزاويتين 90° ، 270° فإن الدالة المثلثية التي بأحد الطرفين تكون هي دالة التمام للدالة الأخرى . بينما تخضع الإشارة للربع الذي تقع فيه الزاوية المطلوبة .

مثال (١): مستخدماً متطابقات الزوايا المنتسبة جد ما يلي :

١. جا ١٣٥ ٢. جتا (٢١٠ -) ٣. ظا ٤٢٠ ٤. قتا ٣٠٠

الحل : ١. جا ١٣٥ = جا (٩٠ + ٤٥) = جتا ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

حل آخر : جا ١٣٥ = جا (١٨٠ - ٤٥) = جا ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

٢. جتا (٢١٠ -) = جتا (٢١٠) [متطابقات الزاوية (- هـ)]

جتا (٢١٠) = جتا (٣٠ + ١٨٠) = - جتا ٣٠ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ∴ جتا (٢١٠ -) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

حل آخر : جتا (٢١٠) = جتا (٢٧٠ - ٦٠) = - جتا ٦٠ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

٣. ظا ٤٢٠ = ظا (٣٦٠ + ٦٠) = ظا ٦٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

٤. قتا ٣٠٠ = $\frac{1}{\text{جا } ٣٠٠}$

جا ٣٠٠ = جا (٢٧٠ + ٣٠) = - جتا ٣٠ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ∴ قتا ٣٠٠ = $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

ملاحظة : قتا (٢٧٠ + هـ) = - قا هـ

مثال (٢) : أثبت أن :

(١) قا (١٨٠ - هـ) = - قا هـ

(٢) جا (٩٠ + هـ) + ظتا (٢٧٠ - هـ) + جتا (١٨٠ + هـ) = ظا هـ

(٣) جا ٤٨٠ جتا ١٢٠ - جتا ٢٤٠ جا ١٢٠ = ٠

الحل : (١) قا (١٨٠ - هـ) = $\frac{1}{\text{جتا (١٨٠ - هـ)}}$ = $\frac{1}{-\text{جتا هـ}}$ = - قا هـ

(٢) جا (٩٠ + هـ) = جتا هـ

ظتا (٢٧٠ - هـ) = $\frac{\text{جتا (٢٧٠ - هـ)}}{\text{جا (٢٧٠ - هـ)}}$ = $\frac{\text{جتا هـ}}{-\text{جتا هـ}}$ = - ١ ، جتا (١٨٠ + هـ) = - جتا هـ

∴ جا (٩٠ + هـ) + ظتا (٢٧٠ - هـ) + جتا (١٨٠ + هـ) = جتا هـ + ظتا هـ - جتا هـ = ظا هـ

(٣) أولاً نوجد الزاوية المكافئة للزاوية ٤٨٠ وهي ٤٨٠ - ٣٦٠ = ١٢٠

∴ جا ٤٨٠ = جا ١٢٠ = جا (١٨٠ - ٦٠) = - جا ٦٠ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

جتا ١٢٠ = جتا (٩٠ + ٣٠) = - جتا ٣٠ = $-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{جتا } ٢٤٠^\circ &= \text{جتا } (٦٠^\circ + ١٨٠^\circ) = -\text{جتا } ٦٠^\circ = -\frac{1}{2} \\ \therefore \text{جا } ٤٨٠^\circ \text{ جتا } ١٢٠^\circ - \text{جتا } ٢٤٠^\circ \text{ جا } ١٢٠^\circ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = ٠ \end{aligned}$$

• تمرين (٥-٦) •

١. مستخدماً متطابقات الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة جد قيمة الآتي:
 أ. جتا ٥١٠° ب. ظا $(٣١٥^\circ -)$ ج. جا ١٩٥°
٢. برهن كل متطابقات الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة في صورة $(ن \times ٩٠^\circ \pm هـ)$ السابقة .
٣. أثبت أن : جا $١٥٠^\circ = \frac{١}{٢(١ - \text{جتا } ١٨٠^\circ)}$
٤. استنتج متطابقات دوال القاطع و قاطع التمام و ظل التمام لكل من الزوايا المنتسبة على الصورة
 $(ن \times ٩٠^\circ \pm هـ)$ حيث $ن = ١, ٢, ٣, ٤$ ثم جد :
 أ. قا ٢٤٠° ب. ظتا ٢١٠° ج. قتا $١١٢,٥^\circ$

مراجعة المجلس العلمي

(٧-٥) تحويل حاصل ضرب الدوال المثلثية إلى مجموع أو فرق

Converting the Product of Trigonometric Functions into a Sum or Difference

في دراسة حساب المثلثات ، تُعدّ متطابقات تحويل حاصل الضرب إلى مجموع أو فرق أداة جوهرية لتبسيط التعبيرات المثلثية المعقدة. ولا تقتصر أهمية هذه المتطابقات على تسهيل العمليات الجبرية فحسب، بل تُعدّ ركيزة أساسية في التحليل الرياضي حيث تُستخدم بكثافة في حساب التكاملات (ستدرسه لاحقاً في الصف الثالث ثانوي) ، بالإضافة إلى دورها الحيوي في الفيزياء.

من خلال هذا الدرس، سنتعلم كيف نربط بين متطابقات مجموع وفرق الزاويتين وبين تحويل نواتج الضرب بين دوال الجيب وجيب التمام إلى صيغ مجموع أو فرق، مما يمنحنا مرونة أكبر في التعامل معها وتحويلها إلى صور يسهل التعامل معها رياضياً .
و يمكننا استنتاجها من خلال المتطابقات التالية :

- (١) $\text{جتا } (أ + ب) = \text{جتا } أ \text{ جتا } ب - \text{جا } أ \text{ جا } ب$
- (٢) $\text{جتا } (أ - ب) = \text{جتا } أ \text{ جتا } ب + \text{جا } أ \text{ جا } ب$
- (٣) $\text{جا } (أ + ب) = \text{جا } أ \text{ جتا } ب + \text{جتا } أ \text{ جا } ب$
- (٤) $\text{جا } (أ - ب) = \text{جا } أ \text{ جتا } ب - \text{جتا } أ \text{ جا } ب$

كالاتي :

العملية	النتائج (المتطابقة)
جمع (١) و (٢)	$\frac{1}{2} [\text{جتا } أ \text{ جتا } ب + \text{جتا } (أ - ب)]$
طرح (١) من (٢)	$\frac{1}{2} [\text{جتا } أ \text{ جتا } ب - \text{جتا } (أ - ب)]$
جمع (٣) و (٤)	$\frac{1}{2} [\text{جا } أ \text{ جتا } ب + \text{جا } (أ - ب)]$
طرح (٣) من (٤)	$\frac{1}{2} [\text{جا } أ \text{ جتا } ب - \text{جا } (أ - ب)]$

مثال (١): حوّل المقدار جا ٧ س جا ٢ س إلى مجموع أو فرق.

الحل: جا أ جا ب = $\frac{1}{4}$ [جتا (أ - ب) - جتا (أ + ب)]

ضع أ = ٧ س ، ب = ٢ س

∴ جا ٧ س جا ٢ س = $\frac{1}{4}$ [جتا (٧ س - ٢ س) - جتا (٧ س + ٢ س)]

= $\frac{1}{4}$ [جتا ٥ س - جتا ٩ س] = $\frac{1}{4}$ جتا ٥ س - $\frac{1}{4}$ جتا ٩ س

مثال (٢): جد قيمة ٢ جتا ١٠٥ جا ١٥ دون استخدام الآلة الحاسبة

الحل: ٢ جتا أ جا ب = جتا (أ + ب) - جتا (أ - ب)

ضع أ = ١٠٥ ، ب = ١٥

∴ ٢ جتا ١٠٥ جا ١٥ = جتا (١٠٥ + ١٥) - جتا (١٠٥ - ١٥)

= جتا (١٢٠) - جتا (٩٠) = $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال (٣): أثبت صحة ما يلي :

أ. ٢ جتا ٣ هـ جتا هـ - جتا ٢ هـ = جتا ٤ هـ

ب. جا (٦٠ + هـ) جتا (٣٠ + هـ) = $\frac{1}{4}$ [جتا ٢ هـ + $\frac{1}{4}$]

الحل:

أ. ٢ جتا ٣ هـ جتا هـ - جتا ٢ هـ = [جتا (٣ هـ + هـ) + جتا (٣ هـ - هـ)] - جتا ٢ هـ

= جتا ٤ هـ + جتا ٢ هـ - جتا ٢ هـ = جتا ٤ هـ

ب. جا أ جتا ب = $\frac{1}{4}$ [جتا (أ + ب) + جتا (أ - ب)]

ضع أ = ٦٠ + هـ ، ب = ٣٠ + هـ

∴ جا (٦٠ + هـ) جتا (٣٠ + هـ) = $\frac{1}{4}$ [جتا (٩٠ + ٢ هـ) + جتا (٣٠)]

ومن الزوايا المنتسبة جا (٩٠ + س) = جتا س ∴ جا (٩٠ + ٢ هـ) = جتا ٢ هـ

∴ جا (٦٠ + هـ) جتا (٣٠ + هـ) = $\frac{1}{4}$ [جتا ٢ هـ + جتا ٣٠]

= $\frac{1}{4}$ [جتا ٢ هـ + $\frac{1}{4}$]

تمرين (٥-٧)

١. حوّل ما يلي إلى صيغة المجموع أو الفرق:

- أ. جتا ٥٠ جا ١٠
ب. ٢ جا ٨٠ جا ٣٠
ج. ٢ جا ٩ هـ جتا ٤ هـ
د. جتا ٦ ص جتا ٢ ص

٢. بدون استخدام الآلة الحاسبة جد قيمة الآتي :

- أ. جا ٧٥ جا ٤٥
ب. ٢ جتا ٢١٠ جتا ٣٠
ج. جا ١٦٥ جتا ٧٥
د. ٢ جتا ١٣٥ جا ٤٥

٣. أثبت صحة العلاقات التالية :

أ. $٢ \text{ جتا } (س + ص) \text{ جتا } (س - ص) = \text{جتا } ٢ س + \text{جتا } ٢ ص$

ب. $جا (هـ + \frac{\pi}{٦}) جا (هـ - \frac{\pi}{٦}) = \frac{١}{٢} [جتا \frac{\pi}{٣} - جتا ٢ هـ]$

ج. $٤ \text{ جتا } ٢ س \text{ جتا } ٣ س جا ٥ س = جا ٤ س + جا ٦ س + جا ١٠ س$

مراجعة المجلس العلمي

(٥-٨) تحويل مجموع أو فرق الدوال المثلثية إلى ضرب :

Converting the sum or difference of trigonometric functions into a product

تعرفنا في الدرس السابق كيفية تحويل حاصل ضرب دالتين إلى مجموع أو فرق . في هذا الدرس سنقوم بالعملية العكسية، وهي تحويل مجموع أو فرق جيبين أو جيبين تمام إلى حاصل ضرب .

ولاستنتاج قواعد عملية التحويل سوف نستخدم قواعد الدرس السابق وهي:

$$(١) \quad \text{جتا } (أ + ب) + \text{جتا } (أ - ب) = ٢ \text{ جتا } أ \text{ جتا } ب$$

$$(٢) \quad \text{جتا } (أ - ب) - \text{جتا } (أ + ب) = ٢ \text{ جا } أ \text{ جا } ب$$

$$(٣) \quad \text{جا } (أ + ب) + \text{جا } (أ - ب) = ٢ \text{ جا } أ \text{ جتا } ب$$

$$(٤) \quad \text{جا } (أ + ب) - \text{جا } (أ - ب) = ٢ \text{ جتا } أ \text{ جا } ب$$

فإذا وضعنا $س = أ + ب$ ، $ص = أ - ب$ فإننا نحصل على :

$$أ = \frac{س + ص}{٢} ، \quad ب = \frac{س - ص}{٢}$$

فإذا جعلنا المعادلة (١) بدلالة $س$ ، $ص$ بتعويض القيم أعلاه نحصل على :

$$\text{جتا } س + \text{جتا } ص = ٢ \text{ جتا } \frac{س + ص}{٢} \text{ جتا } \frac{س - ص}{٢}$$

و بالطريقة نفسها يمكننا الحصول على :

$$\text{جتا } س + \text{جتا } ص = ٢ \text{ جتا } \frac{س + ص}{٢} \text{ جتا } \frac{س - ص}{٢}$$

$$\text{جتا } س - \text{جتا } ص = ٢ \text{ جا } \frac{س + ص}{٢} \text{ جا } \frac{س - ص}{٢}$$

$$\text{جا } س + \text{جا } ص = ٢ \text{ جا } \frac{س + ص}{٢} \text{ جتا } \frac{س - ص}{٢}$$

$$\text{جا } س - \text{جا } ص = ٢ \text{ جتا } \frac{س + ص}{٢} \text{ جا } \frac{س - ص}{٢}$$

نشاط : برهن ما تبقى من المتطابقات أعلاه .

مثال (١): بدون استخدام الآلة الحاسبة جد قيمة الآتي :

$$(١) \text{ جتا } ١٦٥ + \text{جتا } ١٠٥ \quad (٢) \text{ جتا } ١٥ + \text{جتا } ٧٥$$

الحل: (١) جتا س + جتا ص = ٢ جتا $\frac{س+ص}{٢}$ جتا $\frac{س-ص}{٢}$

$$\therefore \text{جتا } ١٦٥ + \text{جتا } ١٠٥ = ٢ \text{ جتا } \frac{١٠٥ + ١٦٥}{٢} \text{ جتا } \frac{١٠٥ - ١٦٥}{٢}$$

$$= ٢ \text{ جتا } ١٣٥ \text{ جتا } ٣٠ = \left(\frac{٣}{٢} \right) \left(\frac{١}{٢} \right) = \frac{٣}{٢}$$

$$(٢) \text{ جاس } + \text{جا ص} = ٢ \text{ جا } \frac{س+ص}{٢} \text{ جتا } \frac{س-ص}{٢}$$

$$\therefore \text{جا } ١٥ + \text{جا } ٧٥ = ٢ \text{ جا } \frac{٧٥ + ١٥}{٢} \text{ جتا } \frac{٧٥ - ١٥}{٢}$$

$$= ٢ \text{ جا } ٤٥ \text{ جتا } (٣٠ -) \quad [\text{جتا } (٣٠ -) = \text{جتا } ٣٠]$$

$$\therefore \text{جا } ١٥ + \text{جا } ٧٥ = \left(\frac{٣}{٢} \right) \left(\frac{١}{٢} \right) = \frac{٣}{٢}$$

مثال (٢): حوّل ما يلي إلى حاصل ضرب

$$(١) \text{ جتا } ٨٠ - \text{جتا } ٢٠ \quad (٢) \text{ جا } ٣ هـ - \text{جا } ٥ هـ$$

الحل: (١) جتا س - جتا ص = ٢ جا $\frac{س+ص}{٢}$ جتا $\frac{س-ص}{٢}$

$$\therefore \text{جتا } ٨٠ - \text{جتا } ٢٠ = ٢ \text{ جا } \frac{٢٠ + ٨٠}{٢} \text{ جتا } \frac{٢٠ - ٨٠}{٢} = ٢ \text{ جا } ٥٠ \text{ جتا } ٣٠$$

$$(٢) \text{ جاس } - \text{جا ص} = ٢ \text{ جتا } \frac{س+ص}{٢} \text{ جتا } \frac{س-ص}{٢}$$

$$\therefore \text{جا } ٣ هـ - \text{جا } ٥ هـ = ٢ \text{ جتا } \frac{٥٣ + ٥٥}{٢} \text{ جتا } \frac{٥٥ - ٥٣}{٢} = ٢ \text{ جتا } ٤ هـ \text{ جتا } (٥ - هـ)$$

$$\text{وبما أنّ } \text{جا } (٥ - هـ) = - \text{جا هـ} \therefore \text{جا } ٣ هـ - \text{جا } ٥ هـ = - ٢ \text{ جتا } ٤ هـ \text{ جا هـ}$$

مثال (٢): برهن صحة $\frac{\text{جا } ٣ + \text{جا } ٢}{\text{جتا } ٣ + \text{جتا } ٢} = \text{ظا } ٢$ س

الحل: بالتعويض المباشر في قواعد التحويل :

$$\text{جا } ٣ + \text{جا } ٢ = \text{جا } ٢ \text{ جا } ٢ \text{ س جتا } ٢$$

$$\text{جتا } ٣ + \text{جتا } ٢ = \text{جتا } ٢ \text{ جتا } ٢ \text{ س جتا } ٢$$

$$\therefore \frac{\text{جا } ٣ + \text{جا } ٢}{\text{جتا } ٣ + \text{جتا } ٢} = \frac{\text{جا } ٢ \text{ جا } ٢ \text{ س جتا } ٢}{\text{جتا } ٢ \text{ جتا } ٢ \text{ س جتا } ٢} = \text{ظا } ٢ \text{ س}$$

تمرين (٥-٨)

أ. اكتب ما يلي في صورة حاصل ضرب:

$$(١) \text{ جتا } ١١ \text{ س } + \text{جتا } ٧ \text{ س} \quad (٢) \text{ جتا } ١٠ - \text{جتا } ٥٠$$

$$(٣) \text{ جا } ١٠٠ + \text{جا } ٤٠ \quad (٤) \text{ جا } ٦ \text{ هـ} - \text{جا } ٨ \text{ هـ}$$

ب. باستخدام قوانين تحويل الجمع أو الفرق إلى حاصل ضرب، تحقق من صحة ما يلي:

$$(١) \text{ جتا } ٧٥ + \text{جتا } ١٥ = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$$

$$(٢) \text{ جتا } ٤ \text{ س} - \text{جتا } ٦ \text{ س} = \frac{\text{ظا } ٢}{\text{جا } ٦ \text{ س} + \text{جا } ٤ \text{ س}}$$

$$(٣) \text{ جا } \left(\frac{\pi}{٤}\right) - \text{جا } \left(\frac{\pi}{١٢}\right) = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٣}}{٤}$$

(٩-٥) حل المعادلات المثلثية: Solving Trigonometric equations

المعادلة المثلثية هي معادلة تحتوي على دالة مثلثية أو أكثر لزواية معينة أو عدة زوايا. **وحلها** يعني إيجاد قيم الزوايا التي تحقق المعادلة. وهذه القيم تؤخذ من **مجموعة التعويض**.

و تكون المعادلات المثلثية على بعض الصور:

(أ) المعادلات المثلثية البسيطة مثل :

مثال (١): جد مجموعة حل المعادلات المثلثية التالية : حيث $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$

(١) $\sin \theta = 1$ (٢) $2 \cos^2 \theta + 3 \sin \theta - 2 = 0$

(٣) $4 \cos^2 \theta + 1 = 4 \sin \theta$

الحل : (١) $\sin \theta = 1$

من دراستنا السابقة نعلم أن ظل الزاوية يكون موجباً في الربعين الأول و الثالث و بما أن $\sin \theta = 1$

عند $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$

$\therefore \sin \theta = 1$ أو 225° $\therefore$ مجموعة الحل = $\{ 90^\circ, 225^\circ \}$

(٢) $2 \cos^2 \theta + 3 \sin \theta - 2 = 0$ $\therefore (2 \cos^2 \theta - 1)(1 + \sin \theta) = 0$

إما $2 \cos^2 \theta - 1 = 0$ $\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$

نعلم أن جيب تمام الزاوية يكون موجباً في الربعين الأول و الرابع و بما أن $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$

عند $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$

$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ أو 60° $\therefore$

أو $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore$ جتا $\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (مرفوضة) لماذا ؟

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{ 60^\circ, 300^\circ \}$

(٣) $4 \cos^2 \theta + 1 = 4 \sin \theta$

ضع المعادلة في الصورة الصفرية $\therefore 4 \cos^2 \theta - 4 \sin \theta + 1 = 0$

$\therefore (2 \cos \theta - 1)(1 + \sin \theta) = 0$ $\Leftrightarrow (2 \cos \theta - 1)(1 + \sin \theta) = 0$

بأخذ الجذر التربيعي $\therefore (2 \cos \theta - 1)(1 + \sin \theta) = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cos \theta - 1 = 0$ $\therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$

نعلم أن جيب الزاوية يكون موجباً في الربعين الأول و الثاني و بما أن $\cos \theta = \frac{1}{2}$

عند $0 \leq s \leq 360$ $\therefore s = 30$ أو 150 $\therefore$ مجموعة الحل = $\{30, 150\}$

(ب) حل المعادلات المثلثية باستخدام المتطابقات مثل :

مثال (٢) : حل المعادلات المثلثية التالية :

$$(1) \text{ جا } 2^{\circ} \text{ س} + \text{جتا } 2^{\circ} \text{ س} = 0, \quad 0 \leq s \leq 90$$

$$(2) \text{ جا هـ ظتا هـ} - \text{جتا } 2^{\circ} \text{ هـ} = 0, \quad 0 \leq h \leq 360$$

الحل : (١) $\text{جا } 2^{\circ} \text{ س} + \text{جتا } 2^{\circ} \text{ س} = 0, \quad 0 \leq s \leq 90$

بما أن $\text{جا } 2^{\circ} \text{ س} = 2 \text{ جا س جتا س}$ تصبح المعادلة :

$$(2 \text{ جا س جتا س}) + \text{جتا } 2^{\circ} \text{ س} = 0 \Leftrightarrow 4 \text{ جا } 2^{\circ} \text{ س جتا } 2^{\circ} \text{ س} + \text{جتا } 2^{\circ} \text{ س} = 0$$

$$\text{جتا } 2^{\circ} \text{ س} (4 \text{ جا } 2^{\circ} \text{ س} + 1) = 0$$

$$\text{إما جتا } 2^{\circ} \text{ س} = 0 \therefore \text{جتا س} = 0$$

$$\therefore s = 90 \text{ لأن } 0 \leq s \leq 90$$

$$\text{أو } 4 \text{ جا } 2^{\circ} \text{ س} + 1 = 0 \Leftrightarrow \therefore \text{جا س} = \frac{1-}{4} \text{ (مرفوضة) لماذا؟}$$

$$\therefore s = 90$$

$$(2) \text{ جا هـ ظتا هـ} - \text{جتا } 2^{\circ} \text{ هـ} = 0, \quad 0 \leq h \leq 360$$

$$\text{بما أن } \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}} = \text{جتا هـ} \text{ فإن المعادلة تصبح :}$$

$$\text{جا هـ} \left(\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}} - \text{جتا } 2^{\circ} \text{ هـ} \right) = 0$$

$$\therefore \text{جتا هـ} - \text{جتا } 2^{\circ} \text{ هـ} = 0 \text{ (بشرط جا هـ} \neq 0 \text{ لوجود ظتا هـ في المعادلة الأساسية)}$$

$$\therefore \text{جتا هـ} (1 - \text{جتا هـ}) = 0$$

$$\text{إما جتا هـ} = 0$$

$$\therefore h = 90 \text{ أو } 270 \text{ لأن } 0 \leq h \leq 360$$

$$\text{أو } 1 - \text{جتا هـ} = 0 \therefore \text{جتا هـ} = 1$$

$$\therefore h = 0 \text{ أو } 360 \text{ لأن } 0 \leq h \leq 360$$

يجب استبعاد أي زاوية تجعل جا هـ = 0 لأنها تجعل ظتا هـ غير معرفة

نلاحظ أن :

$$\text{جا } 0 = 0 \text{ (تُستبعد الزاوية } 0 \text{ من الحل)}$$

جا $360^\circ = 0^\circ$ (تُستبعد الزاوية 360° من الحل)

جا $90^\circ = 1^\circ$ (الزاوية 90° مقبولة)

جا $270^\circ = -1^\circ$ (الزاوية 270° مقبولة)

∴ حل المعادلة جا هـ ظتا هـ - جتا^٢ هـ = ٠ هو هـ 90° ، 270°

مثال (٣) : عند ركوبك عجلة دوارة (ساقية ملاهي) قطرها ١٢٠ متر و تدور بمعدل دورة واحدة كل ٣٠ دقيقة . فإن ارتفاعك عن سطح الأرض يُعطى بالعلاقة :

$$ل = 62 - 60 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot ن\right)$$

بعد كم دقيقة من بدء الحركة يكون ارتفاعك ٩٢ متر لأول مرة ؟ حيث ل تمثل الارتفاع، ن تمثل الزمن

الحل : بالتعويض المباشر $92 = 62 - 60 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot ن\right)$

$$-60 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot ن\right) = 30 \quad \therefore \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot ن\right) = -\frac{1}{2}$$

بما أننا نبحث عن الحلول الأساسية داخل دورة واحدة فإن الزاوية محصورة

بين 0° ، 360°

و بما أن جتا هـ = $-\frac{1}{2}$ ∴ هـ = $\frac{2\pi}{3}$ راديان = 120° ، $\frac{4\pi}{3}$ راديان = 240°

وبما أننا نبحث عن أول مرة فإننا نأخذ أصغر زاوية موجبة تحقق المعادلة

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{15} \cdot ن \quad \therefore ن = 10$$

∴ بعد ١٠ دقائق من بدء الحركة يكون ارتفاعك ٩٢ متر لأول مرة

نشاط : عمل مجموعات

تُحل المعادلات المثلثية عادة لقيم في الفترة $0^\circ \leq س \leq 360^\circ$ بالدرجات أو

$0 \leq س \leq 2\pi$ بالراديان كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة . لذلك

فالحلول تختلف باختلاف الفترات .

إذا لم يتم تحديد فترة معيّنة لحل المعادلة المثلثية . هل هذا يعني أن لديها عدد غير

محدود من الحلول؟ برّر إجابتك.

جد مجموعة حل المعادلات المثلثية :

أ. جا س = ١ ب. جتا ٣ س = $\frac{1}{2}$ (لاحظ لم يتم تحديد فترة للحل)

تمرين (٥-٩)

(أ) جد مجموعة حل المعادلات المثلثية التالية : حيث $0 \leq \theta \leq 360^\circ$

$$(1) \quad \sqrt{3} \sin \theta = 1 - \cos \theta \quad (2) \quad 2 \cos^2 \theta - \sin \theta = 1$$

$$(3) \quad \sin^2 \theta + 2 \cos \theta = 1 \quad (4) \quad 4 \cos^2 \theta - 3 = 0$$

(ب) حل المعادلات المثلثية التالية :

$$(1) \quad 2 \cos^2 \theta + \sin \theta = 1, \quad 180^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$$

$$(2) \quad \cos^2 \theta - \sin \theta = 1, \quad 0 \leq \theta \leq 360^\circ$$

$$(3) \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 2 \cos^2 \theta = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 90^\circ$$

$$(4) \quad \sin \theta + 1 = \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 360^\circ \quad \text{ثم تأكد من صحة الحل.}$$

مراجعة المجلس العلمي

Newly Acquired Knowledge : المعارف الجديدة المكتسبة : (١٠ - ٩)

من خلال دراستنا لهذه الوحدة تعرّفنا على الآتي :

١. إذا كانت الزاوية (هـ) تقع في الربع الأول فإن الزاوية (- هـ) تقع في الربع الرابع عليه :

$$\text{جتا (- هـ)} = \text{جتا هـ} \quad \text{قا (- هـ)} = \text{قا هـ}$$

$$\text{جا (- هـ)} = - \text{جا هـ} \quad \text{قتا (- هـ)} = - \text{قتا هـ}$$

$$\text{ظا (- هـ)} = - \text{ظا هـ} \quad \text{ظتا (- هـ)} = - \text{ظتا هـ}$$

٢. النسب المثلثية للمجموع والفرق :

نسب الفرق	نسب المجموع
$\begin{aligned} \text{جا (أ - ب)} &= \text{جا أ جتا ب} - \text{جتا أ جا ب} \\ \text{جتا (أ - ب)} &= \text{جتا أ جتا ب} + \text{جا أ جا ب} \\ \text{ظا (أ - ب)} &= \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{1 + \text{ظا أ ظا ب}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{جا (أ + ب)} &= \text{جا أ جتا ب} + \text{جتا أ جا ب} \\ \text{جتا (أ + ب)} &= \text{جتا أ جتا ب} - \text{جا أ جا ب} \\ \text{ظا (أ + ب)} &= \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{1 - \text{ظا أ ظا ب}} \end{aligned}$

٣. النسب المثلثية لضعف الزاوية

$$\begin{aligned} \text{جتا } 2\text{هـ} &= \text{جتا هـ}^2 - \text{جا هـ}^2 & \text{جتا } 2\text{هـ} &= \text{جتا هـ}^2 - \text{جا هـ}^2 \\ \text{جا } 2\text{هـ} &= 2\text{جا هـ جتا هـ} & \text{جتا } 2\text{هـ} &= 2\text{جتا هـ}^2 - 1 \\ \text{ظا } 2\text{هـ} &= \frac{2\text{ظا هـ}}{1 - \text{ظا هـ}^2} & \text{جتا } 2\text{هـ} &= 2\text{جتا هـ}^2 - 1 \end{aligned}$$

٤. النسب المثلثية لنصف الزاوية

$$\begin{aligned} \text{جتا } \frac{\text{س}}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \text{جتا س}}{2}} & \text{جا } \frac{\text{س}}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \text{جتا س}}{2}} & \text{ظا } \frac{\text{س}}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \text{جتا س}}{1 + \text{جتا س}}} \\ \text{جتا س} &\neq 1 \end{aligned}$$

٥. إذا كانت (هـ) زاوية حادة فإن أيّ زاوية على الصورة (ن $\times 90^\circ \pm$ هـ) حيث ن عدد صحيح غير سالب تُسمّى زاوية منتسبة للزاوية الحادة (هـ) .
٦. تحويل حاصل ضرب الدوال المثلثية إلى مجموع أو فرق

$$\text{جتا أ جتا ب} = \frac{1}{2} [\text{جتا (أ + ب)} + \text{جتا (أ - ب)}]$$

$$\text{جا أ جا ب} = \frac{1}{2} [\text{جتا (أ - ب)} - \text{جتا (أ + ب)}]$$

$$\text{جا أ جتا ب} = \frac{1}{2} [\text{جا (أ + ب)} + \text{جا (أ - ب)}]$$

$$\text{جتا أ جا ب} = \frac{1}{2} [\text{جا (أ + ب)} - \text{جا (أ - ب)}]$$

٧. تحويل مجموع أو فرق الدوال المثلثية إلى ضرب :

$$\text{جتا س} + \text{جتا ص} = 2 \text{ جتا } \frac{\text{س} + \text{ص}}{2} \text{ جتا } \frac{\text{س} - \text{ص}}{2}$$

$$\text{جتا س} - \text{جتا ص} = 2 \text{ جا } \frac{\text{س} + \text{ص}}{2} \text{ جا } \frac{\text{س} - \text{ص}}{2}$$

$$\text{جا س} + \text{جا ص} = 2 \text{ جا } \frac{\text{س} + \text{ص}}{2} \text{ جتا } \frac{\text{س} - \text{ص}}{2}$$

$$\text{جا س} - \text{جا ص} = 2 \text{ جتا } \frac{\text{س} + \text{ص}}{2} \text{ جا } \frac{\text{س} - \text{ص}}{2}$$

٨. المعادلة المثلثية هي معادلة تحتوي على دالة مثلثية أو أكثر لزاوية معينة أو عدة زوايا. وحلها يعني إيجاد قيم الزوايا التي تحقق المعادلة.

تمرين (١٠ - ٥)

١. جد قيم الدوال (النسب) المثلثية للزاوية - ٣٠٠°
٢. دون استخدام الآلة الحاسبة جد قيمة:
 - أ. $\frac{\text{ظا } ٤٥ - \text{ظا } ١٥}{١ + \text{ظا } ٤٥ \text{ ظا } ١٥}$
 - ب. $٢ \text{ جتا } ٢٢,٥^\circ - ١$
 - ج. $\text{جتا } ١٥^\circ$
٣. حوّل المقدار جا ١٢ س جتا ٧ س إلى مجموع أو فرق.
٤. حوّل جتا ١٣ هـ - جتا ٩ هـ إلى حاصل ضرب .
٥. حل المعادلات المثلثية التالية :
 - أ. $٠ \leq \text{س} \leq ١٨٠^\circ$ ، $٠ = \text{س} + \text{جا } ٣ \text{ س} + \text{جا } ٥ \text{ س}$
 - ب. $٠ = ٢ - \text{هـ}$ ، $٠ \leq \text{هـ} \leq ٩٠^\circ$

مراجعة المجلس العلمي

الوحدة السادسة

التحويلات الهندسية

Geometric Transformations

أهداف الوحدة :

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١. يعرّف التحويلة الهندسية .
٢. يعرّف التناظر والانعكاس والانتقال والدوران .
٣. يحدّد محاور تناظر شكل - إن وجدت .
٤. يحدّد مركز تناظر شكل - إن وجد .
٥. يرسم صورة شكل بالانعكاس حول مستقيم أو نقطة .
٦. يستنتج خصائص الانعكاس حول مستقيم أو نقطة .
٧. يعيّن صورة شكل بالانعكاس حول مستقيم أو نقطة في المستوى الإحداثي .
٨. يرسم صورة شكل بانتقال معطى .
٩. يستنتج خصائص الانتقال .
١٠. يرسم صورة شكل بدوران معطى .
١١. يستنتج خصائص الدوران حول نقطة .
١٢. يعيّن صورة شكل بدوران معطى في المستوى الإحداثي .

لماذا ندرس التحويلات الهندسية ؟

لأننا نحتاج أداة نفهم بها الشكل دون تغييره ؛ فعند الإزاحة أو الدوران أو الانعكاس أو التصغير أو التكبير يبقى الشكل نفسه ويتغيّر الموضع أو الاتجاه أو الحجم فقط ، ويساعدنا ذلك على رؤية العلاقات بين الأشكال بسرعة ، وعلى التحقق من التطابق والتشابه بدقة كما يعزّز قدرتنا على تنمية التفكير المنطقي خطوة بخطوة.



تُستخدم التحويلات في الرسم الهندسي، كما تُستخدم في الهندسة التحليلية عند تمثيل الدوال ، وتظهر في الفيزياء عند وصف الحركة والدوران وتدخل أيضاً في تصميم الرسوم بالحاسوب كما تدخل في الخرائط والقياس، وعندما نفهم التحويلات فإننا نتعلم كيف ينتقل شكل إلى شكل آخر بقواعد واضحة.

قبة مسجد النيلين عند ملتقى النيلين بالسودان (١٩٨٤م)

مثال (١): إذا كانت أ (١-، ٢-) ، ب (٢-، ٦-) ، جدّ كلاً مما يلي : $\longleftrightarrow$
 أ. طول أ ب . ب. ميل المستقيم أ ب . ج. ميل العمودي على أ ب

الحل :

$$\begin{aligned} \text{أ. أ ب} &= \sqrt{(١- - ٢)^2 + (٢ - ٦)^2} = \sqrt{١ + ١٦} = \sqrt{١٧} \\ &= \sqrt{(١+٢)^2 + (٢-٦)^2} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} \Rightarrow \text{طول أ ب} = ٥ \text{ (لماذا ؟)} \end{aligned}$$

$$\text{ب. ميل المستقيم أ ب} = \frac{٢ - ٦}{١ - ٢} = \frac{-٤}{-١} = ٤$$

$$\text{ج. ميل العمودي} = \frac{-١}{٤} \text{ لأن ميل أ ب} \times \text{ميل العمودي عليه} = -١$$

مثال (٢): جد معادلة المستقيم في كل من الحالات التالية :

أ. مستقيم مواز للمحور السيني والمار بالنقطة (٢، ٣) .

ب. مستقيم مواز للمحور الصادي ومار بالنقطة (١-، ٤) .

ج. مستقيم ميله ٠,٥ ومار بالنقطة (٢، ٦-) .

الحل: أ. معادلة المستقيم الموازي للمحور السيني والمار بالنقطة (٢، ٣) هي $y = ٣$

ب. معادلة المستقيم الموازي للمحور الصادي والمار بالنقطة (١-، ٤) هي $x = -١$

$$\begin{aligned} \text{ج. المعادلة هي : } y - ٦ &= m(x - ٢) \Rightarrow y - ٦ = ٠,٥(x - ٢) \\ \Rightarrow y - ٦ &= ٠,٥x - ١ \Rightarrow y = ٠,٥x + ٥ \end{aligned}$$

مثال (٣): جدّ إحداثي ن منتصف أ ب حيث أ (٢، ٣) ، ب (١-، ٤)

$$\text{الحل :} \quad \text{إحداثيا النقطة ن} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{٢ + (-١)}{2}, \frac{٣ + ٤}{2} \right)$$

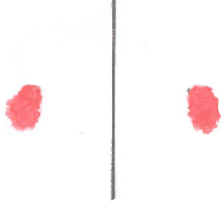
$$= \left(\frac{١}{2}, \frac{٧}{2} \right) = (٠,٥, ٣,٥)$$

تمارين (٦-١)

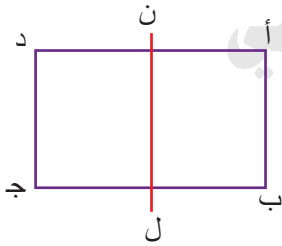
١. إذا كانت النقطتين أ (٢، ١) ، ب (٤، ٣) :
 - أ. جد ميل المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{AB}$.
 - ب. حدّد ن منتصف $\overline{AB}$.
 - ج. جدّ معادلة المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{AB}$ والمار بالنقطة ن منتصف $\overline{AB}$.
٢. في كلٍ من المستطيل ، المربع ، المعين ، متوازي الأضلاع ، حدّد خصائص كل مما يلي :
 - أ. الأقطار
 - ب. الأضلاع
 - ج. الزوايا $\overleftrightarrow{AB}$
٣. المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ يمر بالنقطة هـ (٢، -٢) ويوازي المحور السيني ، جدّ معادلته ، ثم جد معادلة المستقيم العمودي عليه والمار بنفس النقطة هـ .

مراجعة المجلس العلمي

مثال (١) : ضع نقطة حبر على ورقة ثم اطوِ الورقة حتى تنطبع نقطة الحبر ويصبح الشكلان منطبقين ، في هذه الحالة فإن الشكل الناتج من طباعة بقعة الحبر هو صورة بقعة الحبر الأساسية يسمى خط الطي في هذه الحالة محور التناظر (التماثل). كما في الشكل المقابل .



مثال (٢) : على ورقة شفافة ارسم المستطيل أ ب ج د



الذي بعده ١٠ اسم، ١٦ اسم.

نصف أ د في ن، ب ج في ل

صل ن ل ثم اطوِ الورقة حول ن ل.

ماذا تلاحظ؟ لعلك لاحظت أن أ انطبقت على د

وأن ب انطبقت مع ج .

لاحظ أن ن ل هو العمود المنصف لكل من أ د ، ب ج .

نستنتج أن ن ل هو محور تناظر بالنسبة لكل من (أ و د) ، (ب و ج)

خذ أي نقطة من المستطيل أ ب ج د ثم جد صورتها حول ن ل. ماذا لاحظت؟

لعلك لاحظت أن صورة كل نقطة من المستطيل أ ب ج د حول ن ل هي صورة أيضاً

من المستطيل أ ب ج د.

يسمى ن ل في هذه الحالة محور تناظر للمستطيل أ ب ج د.

صل منتصف أ ب مع منتصف د ج . ، وسمّه ك و

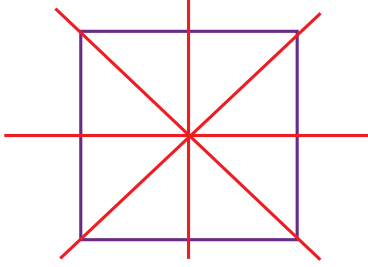
هل ك و محور تناظر للمستطيل أ ب ج د؟ ولماذا؟

صل أ ج ، هل أ ج محور تناظر للمستطيل أ ب ج د ؟ لا . لماذا ؟

كم عدد محاور تناظر المستطيل؟ حددها .

مما سبق نستنتج أنه :

يكون $\longleftrightarrow$ س ص محور تناظر لشكل ما اذا كان لكل نقطة من الشكل صورة من نفس الشكل بالتناظر حول س ص ، ويسمى س ص $\longleftrightarrow$ في هذه الحالة محور التناظر .



مثال (٣) : بنفس طريقة المثال السابق حدّد محاور تناظر المربع.

لاحظ أن المربع له محورا تناظر يمران في منتصفات الأضلاع المتقابلة كالمستطيل.
تحقق من أن أقطار المربع هي أيضاً محاور تناظر له.

مثال (٤) : حدّد محاور تناظر كل شكل فيما يلي - إن وجدت :
أ. لعلك لاحظت أن لهذا الشكل محور تناظر واحد فقط.
لماذا ؟



ب. حدّد محور تناظر علم السودان - إن وُجد ؟
ماهي دلالات ألوان العلم ؟

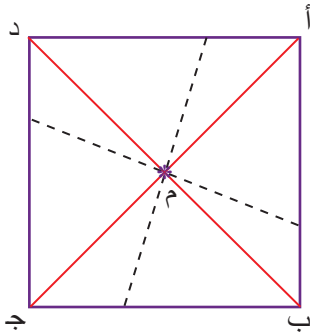
- الأحمر: يرمز إلى دماء الشهداء والكفاح من أجل الاستقلال والحرية.
- الأبيض: يرمز إلى السلام والنقاء والطهارة.
- الأخضر: يرمز إلى الزراعة والخضرة والرخاء.
- الأسود: يرمز إلى الشعب السوداني وقوته وعراقتة.



مركز تناظر شكل :

مثال (٥) : الشكل أ ب ج د مربع.

صل كل من القطرين أ ج ، ب د وسمّ نقطة تقاطعهما م. أين تقع م بالنسبة لـ أ ج ؟
لعلك لاحظت أن م تقع في منتصف أ ج . عليه فإن النقطتين أ و ج متناظرتان حول م .
بنفس الطريقة يمكن استنتاج أن ب و د متناظرتان حول النقطة م .

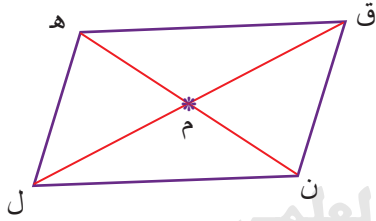


اختر أي نقطة من الشكل أ ب ج د ثم جد صورتها بالتناظر حول م.
ماذا تلاحظ ؟

تسمى م مركز تناظر للمربع أ ب ج د . ونستنتج أنه :

تكون م مركز تناظر للشكل إذا كانت صورة كل نقطة من الشكل حول م هي نقطة من الشكل نفسه.

مثال (٦) : حدد مركز تناظر كل من الأشكال التالية - إن وجد :



المستطيل - متوازي الأضلاع - المعين .

ما الخاصية المشتركة بين هذه الأشكال ؟

هل نستطيع أن نقول إنها جميعا متوازيات أضلاع؟

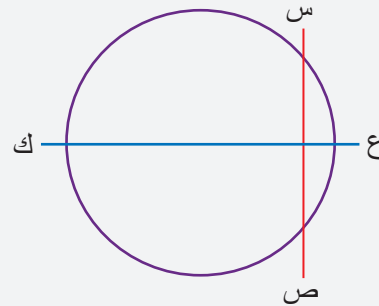
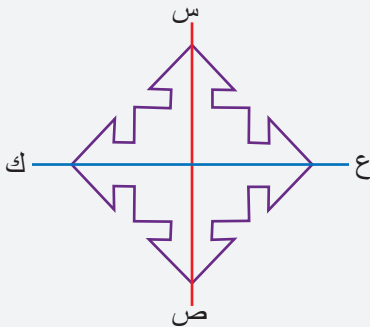
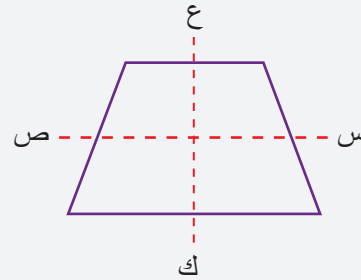
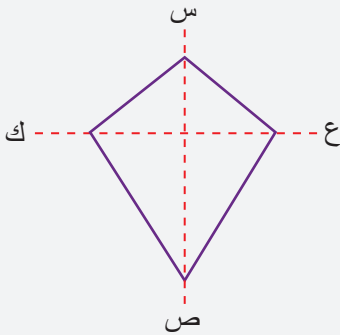
ارسم متوازي الأضلاع ق ن ل ه وحدد مركز تناظره.

ما مركز تناظر كل من المستطيل ، المعين ؟ لماذا ؟

(تذكر أن قطرا متوازي الأضلاع يتقاطعان عند منتصفيهما) .

تمرين (٦-٢)

١. حدّد المستقيم الذي يمثل محور تناظر لكل شكل من الأشكال التالية :



٢. جدّ محاور التناظر للأشكال التالية - إن وجدت - وحدّد مواقعها :

الشكل	مواقع محاور التناظر - إن وجدت	عددها
مستقيم	أي عمود على المستقيم	لا نهائي
مستقيمان متعامدان	كل واحد منهما محور تناظر للآخر	٢
مستقيمان متقاطعان		
مستقيمان متوازيان		
مثلث متساوي الساقين		
مثلث متساوي الأضلاع		
مثلث مختلف الأضلاع		
معين		
متوازي الأضلاع		
الدائرة		

٣. حدد مركز تناظر كل شكل من الأشكال التالية - إن وجد :

أ- قطعة مستقيمة ب- دائرة ج- زاوية

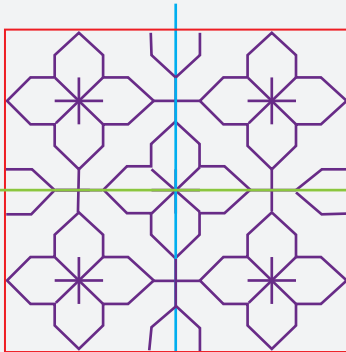
د- مستقيمان متقاطعان هـ- مستقيم و- شبه منحرف

٤. تتميز الزخارف عموماً بمحاور تناظر ومراكز تناظر تعطيها شكلاً مميزاً وتسهل

رسمها . في الشكل المقابل حدّد :

أ. مركز تناظر الشكل - إن وجد .

ب. جميع محاور تناظر الشكل .



برج الفاتح، المعروف حالياً باسم فندق كورنثيا الخرطوم، هو معلم معماري بارز يقع في قلب العاصمة السودانية ، الخرطوم ، عند نقطة التقاء النيلين الأبيض والأزرق. يتميز البرج بتصميمه الفريد على شكل بيضة أو شراع منتفخ، مما يجعله رمزاً معمارياً مهماً في المدينة.



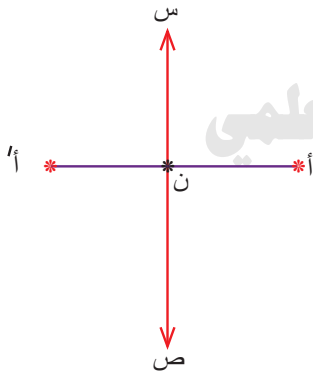
انعكاس صور على سطح ماء ساكن (أين تقع هذه الأماكن؟)

مثال (١): على ورقة شفافة حدد نقطة أ.

ثم حدد مستقيماً $\overleftrightarrow{ص}$ كما في الشكل أدناه .

اطوِ الورقة حول $\overleftrightarrow{ص}$ وعين النقطة أ' المقابلة للنقطة أ والتي تنطبق عليها .

افتح الورقة وارسم أ' الذي يقطع $\overleftrightarrow{ص}$ في النقطة ن



تحقق من أن $\overleftrightarrow{ص} \perp \overleftrightarrow{أأ'}$ ، وتحقق من أن:

طول ن أ = طول ن أ'

ما وضع $\overleftrightarrow{ص}$ بالنسبة لـ أ أ' ؟

لعلك لاحظت أن $\overleftrightarrow{ص}$ هو المنصف العمودي لـ أ أ'

يسمى هذا الإجراء انعكاساً، ويسمى المستقيم $\overleftrightarrow{ص}$

محور الانعكاس.

أ هي صورة أ بالانعكاس حول $\overleftrightarrow{ص}$.

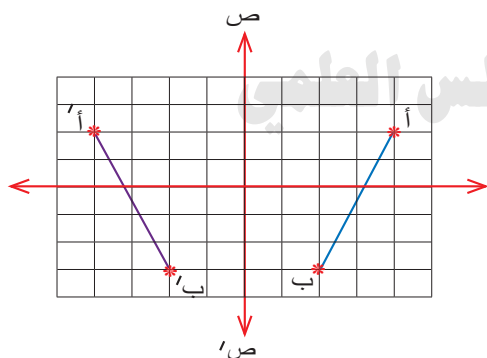
ماذا عن الصورة المنعكسة على الماء؟ هل تمثل انعكاساً ؟

مما سبق يمكن تعريف الانعكاس كما يلي :

الانعكاس حول $\overleftrightarrow{ص}$ في المستوى هو تحويل هندسي يعين لكل نقطة $أ$ من المستوى نقطة $أ'$ بحيث يكون المستقيم $\overleftrightarrow{ص}$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $أأ'$ ، (يسمى $\overleftrightarrow{ص}$ محور الانعكاس)

نرمز للانعكاس حول المحور $\overleftrightarrow{ص}$ بالرمز $ع$ $ص$.
إذا كانت $أ'$ صورة $أ$ بالانعكاس $ع$ $ص$
فإننا نكتب ذلك كما يلي : $ع$ $ص$ $(أ) = أ'$

خصائص الانعكاس حول محور:



مثال (٢) : ارسم صورة $أ ب$ بالانعكاس حول المستقيم $\overleftrightarrow{ص}$

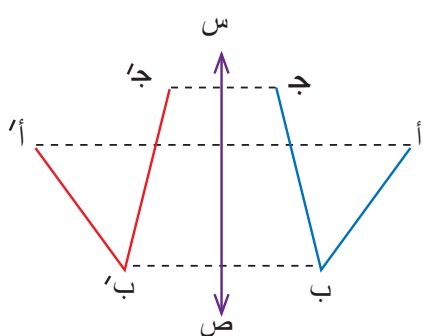
الحل : نرسم من $أ$ عموداً على $\overleftrightarrow{ص}$ ونمده إلى $أ'$

بحيث يكون $\overleftrightarrow{ص}$ هو العمود المنصف لـ $أأ'$
∴ $أ'$ هي صورة $أ$ بالانعكاس حول $\overleftrightarrow{ص}$
نرسم من $ب$ عموداً على $\overleftrightarrow{ص}$ ونمده إلى $ب'$

$ب'$ بحيث يكون $\overleftrightarrow{ص}$ هو العمود المنصف لـ $ب ب'$. عليه تصبح $ب'$ هي صورة $ب$ بالانعكاس حول $\overleftrightarrow{ص}$ ، صل $أ ب'$
∴ $أ ب'$ هي صورة $أ ب$ بالانعكاس حول $\overleftrightarrow{ص}$ قس طول $كلاً$ من $أ ب$ ، $أ ب'$ ، ماذا تلاحظ؟

الانعكاس حول محور يحافظ على الأطوال

مثال (٣) : ارسم صورة الزاوية $\angle أ ب ج$ بالانعكاس حول المحور $\overleftrightarrow{ص}$



ملاحظة : اتبع نفس خطوات مثال (٢) السابق
ارسم صورة كل من $أ$ ، $ب$ ، $ج$ بالانعكاس حول $\overleftrightarrow{ص}$ وسمها $أ'$ ، $ب'$ ، $ج'$ على الترتيب
قس كل من $\angle أ ب ج$ ، $\angle أ ب' ج'$ ماذا تلاحظ؟

ما هي صورة $\angle أ ب ج$ بالانعكاس حول $\overleftrightarrow{ص}$ ؟ ماذا تستنتج؟

الانعكاس حول محور يحافظ على قياس الزوايا

مثال (٤): ارسم صورة Δ أ ب ج بالانعكاس حول المستقيم $\overleftrightarrow{ص}$.

الحل: نرسم عموداً من أ على $\overleftrightarrow{ص}$

ثم نعيّن أ' عليه بحيث تكون على نفس بعد أ من $\overleftrightarrow{ص}$ ، وبالمثل نعيّن ب' صورة ب.

ما هي صورة ج؟ ماذا تستنتج؟

صورة Δ أ ب ج هي

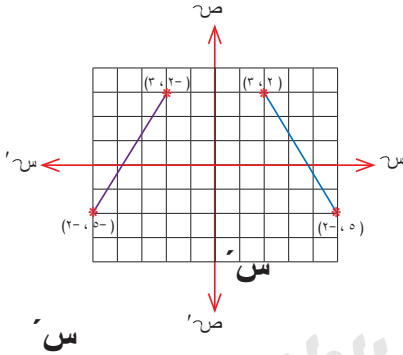
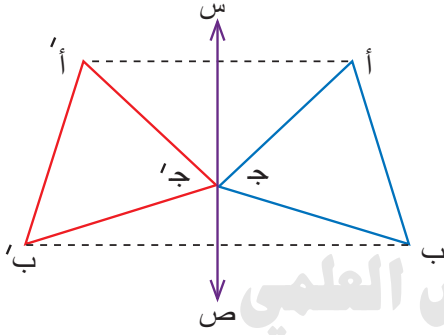
تحقق: قس زوايا كل من Δ أ ب ج ،

Δ أ' ب' ج'

قس طول كلاً من : (أ ب ، أ' ب') ،

(أ ج ، أ' ج') ، (ب ج ، ب' ج')

ماذا تلاحظ ؟



الانعكاس في المستوى الإحداثي

مثال (٥): من الشكل المقابل لاحظ أنّ :

صورة (٣ ، ٢) بالانعكاس حول المحور الصادي

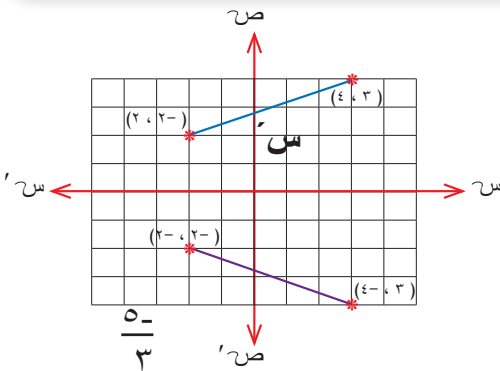
هي (٣ ، ٢-)

صورة (٢- ، ٥) بالانعكاس حول المحور الصادي

هي (٢- ، ٥-)

ماهي صورة (س ، ص) بالانعكاس حول المحور الصادي؟

مما سبق نستنتج أنّ : صورة (س ، ص) بالانعكاس حول المحور ^{السدّي} الصادي هي (-س ، -ص)



- من الشكل المقابل نجد أنّ :

صورة (٤ ، ٣) بالانعكاس حول المحور

السيني هي (٤- ، ٣)

صورة (٢ ، ٢-) بالانعكاس حول المحور

السيني هي (٢- ، ٢-)

ماهي صورة (س ، ص) بالانعكاس

حول المحور السيني؟

مما سبق نستنتج أن :

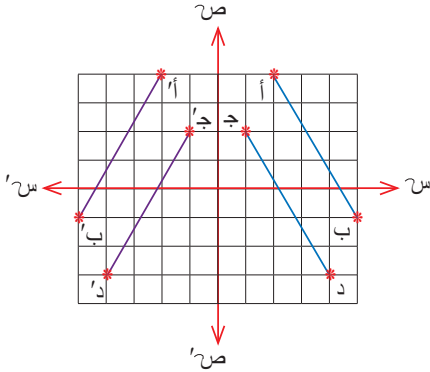
صورة (س، ص) بالانعكاس حول المحور السيني هي (س، -ص)

مثال (٦): جدّ إحداثيات رؤوس المثلث أ ب (٢، ١)، ب (٠، ٢)، ج (٢، -٠) بالانعكاس حول المحور الصادي ، دون تمثيل النقاط في المستوى الإحداثي .

الحل : بما أن صورة (س، ص) حول المحور الصادي هي (-س، ص) فإن :

صورة أ (٢، ١) هي أ' (-٢، ١) ، صورة ب (٠، ٢) هي ب' (٠، ٢) ، صورة ج (٢، -٠) هي ج' (-٢، -٠) .

ماذا تلاحظ ؟ ما صورة النقطة التي تقع في محور الانعكاس الصادي ؟
ما صورة النقطة (٠، ٢) بالانعكاس في محور الانعكاس السيني ؟
إذن صورة كل نقطة تقع على محور الانعكاس هي النقطة نفسها .



مثال (٧): أ، ب، ج، د هي صور كل من النقاط أ، ب، ج، د على الترتيب، بالانعكاس حول المحور الصادي، عيّن إحداثيات جميع هذه النقاط ، ثم أجب عن الآتي :

هل $\overline{أب} \parallel \overline{دج}$ (لماذا ؟)
ما وضع أ' ب' ، ج' د' ؟

الحل : في الشكل المقابل

أ (٢، ٤) ، ب (١، -٥) ، ج (١، ٢) ، د (٤، -٣) ،
أ' (-٢، ٤) ، ب' (-١، ٥) ، ج' (-١، ٢) ، د' (-٤، -٣)

$$\text{ميل } \overline{أب} = \frac{٤-١}{٢-٥} = \frac{٥-٣}{٢-٥} = \frac{٢}{-٣} = -\frac{٢}{٣} \quad ، \quad \text{ميل } \overline{دج} = \frac{٢-٤}{١-٤} = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$$

∴ $\overline{أب} \parallel \overline{دج}$

$$\text{ميل } أ' ب' = \frac{٤-١}{٢+٥} = \frac{٥-٣}{٢+٥} = \frac{٢}{٧}$$

$$\text{ميل } ج' د' = \frac{٢-٤}{١+٤} = \frac{-٢}{٥} = -\frac{٢}{٥}$$

ماذا تستنتج ؟

الانعكاس حول محور يحافظ على التوازي

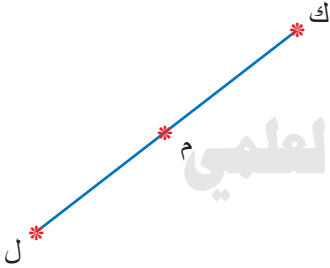
الانعكاس حول نقطة :

مثال (٨) : على الشكل المقابل ك ، م ، ل ثلاث نقاط على استقامة واحدة. تحقق من أن طول م ك = طول م ل

ما موقع النقطة م بالنسبة للنقطتين ك ، ل ؟
(م تقع في منتصف ك ل)

نقول إن م مركز انعكاس للنقطتين ك ، ل

النقطة ل هي صورة النقطة ك بالانعكاس حول م وكذلك ك هي صورة النقطة ل بالانعكاس حول م



مما سبق نستنتج أن :

تكون م مركز انعكاس للنقطتين أ ، ب إذا كانت م منتصف أ ب ، وتكون كل نقطة من النقطتين أ ، ب صورة للنقطة الأخرى بواسطة الانعكاس حول م.

عليه فالانعكاس حول نقطة م في المستوى يحول كل نقطة أ إلى نقطة أ' بحيث تكون م منتصف أ أ' ويرمز للانعكاس حول م بالرمز ع م ، وتكتب :

ع م (أ) = أ' ، وكذلك ع م (أ') = أ

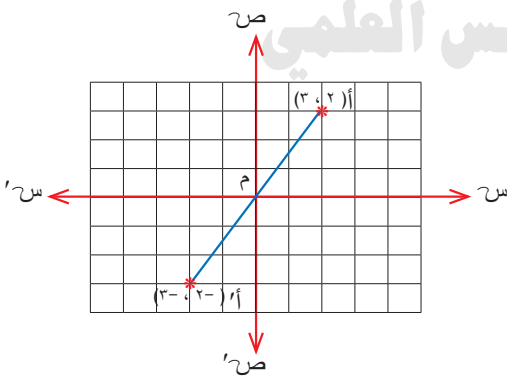
مثال (٩) : في الشكل المقابل

أ' صورة أ بالانعكاس حول نقطة الأصل م

لاحظ أن صورة أ (٣ ، ٢) حول م هي

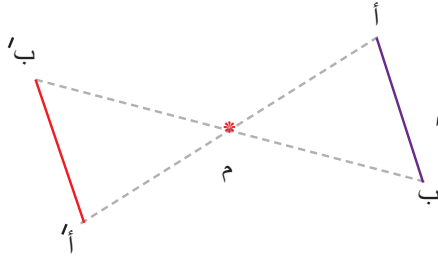
أ' (٣- ، ٢-)

مما سبق يمكننا استنتاج أن :



صورة (س ، ص) بالانعكاس حول نقطة الأصل هي (-س ، -ص) .

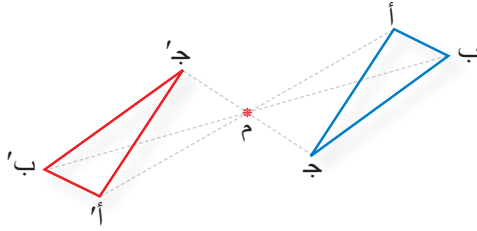
مثال (١٠): ارسم صورة $\overline{أ ب}$ بالانعكاس حول $م$ ، وسمها $\overline{أ' ب'}$
الحل:



حدد $م$ مركز الانعكاس.
 صل $\overline{أ م}$ ثم مدها حتى $\overline{أ'}$ بحيث $\overline{أ م} = \overline{أ' م}$
 صل $\overline{ب م}$ ثم مدها حتى $\overline{ب'}$ بحيث $\overline{ب م} = \overline{ب' م}$
 $\overline{أ' ب'}$ هي صورة $\overline{أ ب}$ بالانعكاس حول $م$
 $\overline{ب'}$ هي صورة $\overline{ب}$ بالانعكاس حول $م$
 عليه فإن $\overline{أ' ب'}$ هي صورة $\overline{أ ب}$ بالانعكاس حول $م$

مثال (١١) ارسم صورة $\triangle أ ب ج$ بالانعكاس حول النقطة $م$
الحل: ارسم صورة كل من

$أ$ ، $ب$ ، $ج$ بالانعكاس حول $م$ وسمها $\overline{أ'}$ ، $\overline{ب'}$ ، $\overline{ج'}$. صل $\overline{أ' ب' ج'}$ لتكوّن $\triangle أ' ب' ج'$
 صورة $\triangle أ ب ج$ بالانعكاس حول $م$



قس $\overline{أ ب}$ و $\overline{أ' ب'}$ وقارن بين طوليها.
 كذلك قس أطوال كل من $\overline{ب ج}$ ، $\overline{أ ج}$ ،
 $\overline{ب' ج'}$ ، $\overline{أ' ج'}$. ماذا تلاحظ ؟ الانعكاس
 حول نقطة يحافظ على

قس كل من زوايا الرؤوس ($أ$ ، $أ'$) ،
 ($ب$ ، $ب'$) ، ($ج$ ، $ج'$) وقارن بينها.

ماذا تستنتج؟ الانعكاس حول نقطة يحافظ على

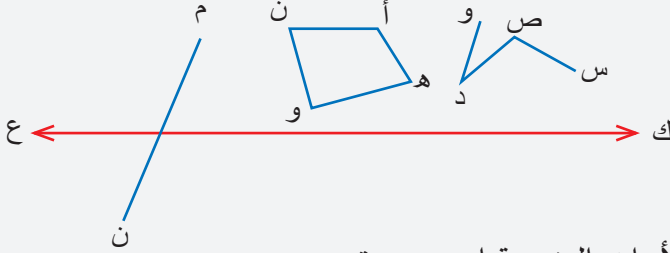
خصائص الانعكاس حول نقطة

من المثل السابق نستنتج أن :

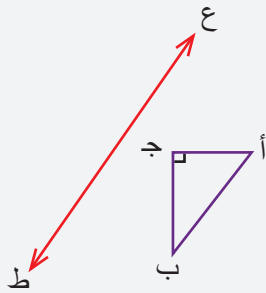
الانعكاس حول نقطة يحافظ على الأطوال
 الانعكاس حول نقطة يحافظ على قياس الزوايا

تمرين (٦-٢)

١. ارسم صورة كل شكل مما يلي بالانعكاس حول ك ع :



٢. باستخدام الأدوات الهندسية ارسم صورة Δ أ ب ج بالانعكاس حول المحور ع ط



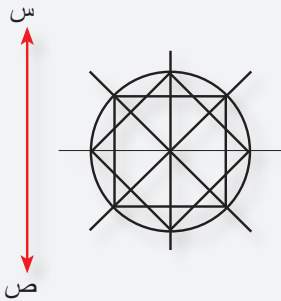
٣. انقل الأشكال التالية إلى كراستك ثم ارسم صورة كل منها بالانعكاس حول م.



٤. إذا كانت صورة النقطة أ $(-٣, ٤)$ بالانعكاس حول محور هي أ' $(٣, ٤)$ فما هي صورة النقطة ن $(٢, -٥)$ بالانعكاس حول المحور نفسه؟ (تعرف أولاً على نوع الانعكاس).

٥. أ. ارسم صورة الشكل المقابل بالانعكاس حول ص ص ثم لوّنه لتحصل على زخرفة رائعة .

ب. جدّ عدد محاور تناظر هذا الشكل ؟



• في الشكل



لاحظ أننا سحبنا نموذج السيارة من الوضع أ ب إلى الوضع أ' ب'، هل تغير شكل السيارة؟

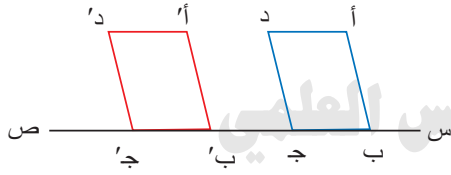
• ارسم متوازي الأضلاع

أ ب ج د، كما في الشكل

- انسخ متوازي الأضلاع

أ ب ج د على ورقة ثم قصه بمطابقة

أ ب ج د



- ارسم المستقيم س س' على سطح الطاولة.

- اسحب متوازي الأضلاع الذي قصصته على س س' مسافة ١٠ سم.

وسمّه أ' ب' ج' د'. كما في الشكل .

- قس المسافة بين كل من (أ أ'، ب ب'، ج ج'، د د') ثم قارن بينهما ماذا تلاحظ؟

نسمي أ' ب' ج' د' صورة أ ب ج د بالانتقال (الانسحاب) الذي مقداره

(طوله) = ١٠ سم ، واتجاهه س س'.

الانتقال (الانسحاب) هو تحويل هندسي ينقل الشكل في المستوى مسافة ثابتة في نفس المستوى باتجاه معين.

تسمى هذه المسافة مقدار الانتقال ، ويسمى هذا الاتجاه اتجاه الانتقال.

مثال (١) : ارسم النقطة أ' صورة النقطة أ بالانتقال الذي اتجاهه م ن ومقداره يساوي طول م ن .

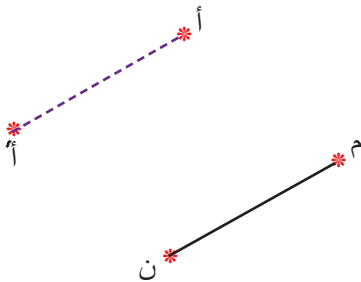
الحل : لاحظ في الشكل أن :

أ أ' // م ن

طول أ أ' = طول م ن

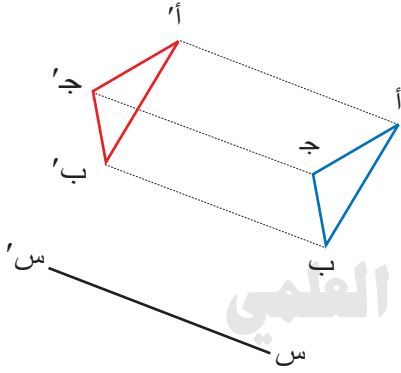
∴ أ' هي صورة أ

بالانتقال م ن.



مثال (٢) :

ارسم صورة Δ أ ب ج الناتجة عن انتقال طوله س س' في الاتجاه من س إلى س'



الحل : ارسم مستقيماً من كل رأس من رؤوس Δ أ ب ج يوازي س س' .

حدد النقطة أ' بحيث طول أ أ' = طول س س' ،
طول كل من : ب ب' = س س' ، ج ج' = س س'

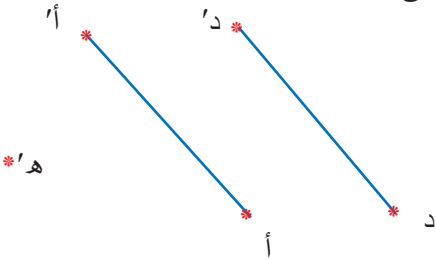
صل أ' ، ب' ، ج' لتحصل على Δ أ' ب' ج' .
 Δ أ' ب' ج' هو صورة Δ أ ب ج بالانتقال الذي
مقداره س س' واتجاهه . س س'

قارن بين أطوال أضلاع المثلثين . قارن بين زوايا المثلثين .
ماذا نستنتج من المثال السابق ؟

خصائص الانتقال

الانتقال يحافظ على الأطوال .
الانتقال يحافظ على قياس الزوايا .
الانتقال يحافظ على التوازي .

مثال (٣) : أ' هي صورة أ تحت تأثير انتقال . عيّن صورة كل من د ، ه تحت تأثير الانتقال نفسه .



الحل : صل أ أ' ثم اوجد طول أ أ' . راجع الشكل
أ أ' هو اتجاه الانتقال .

طول أ أ' هو مقدار الانتقال .

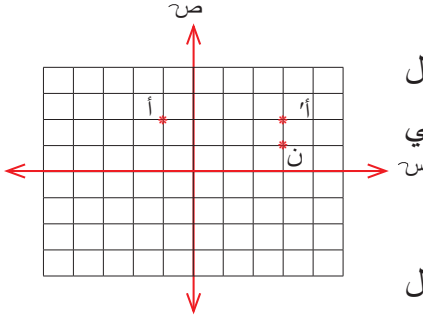
ارسم د د' يوازي أ أ' وفي اتجاهه .

طول د د' = طول أ أ' .

بالمثل عيّن ه بحيث طول ه ه' = طول أ أ' .

واتجاه ه ه' هو اتجاه أ أ' ، أكمل الرسم .

مثال (٤)



عين النقطة أ $(-1, 2)$ ثم عين أ' صورة أ بانتقال مقداره ٤ وحدات في اتجاه يوازي المحور السيني في الاتجاه الموجب.

الحل: في الشكل

أ' $(2, 2)$ هي صورة النقطة أ $(-1, 2)$ بالانتقال السابق . ماذا تلاحظ؟

ما الإحداثي الذي تغير؟ وما التغير الذي حدث فيه؟

عين ن' صورة النقطة ن $(1, 3)$ في اتجاه يوازي المحور الصادي في الاتجاه السالب وبانتقال مقداره ٣ وحدات . ماذا تلاحظ؟ ما الإحداثي الذي تغير؟ وكيف تغير؟ (بالزيادة أو النقصان ؟) .

• لعلك لاحظت أنه عندما يكون انتقال النقطة بموازاة المحور السيني في الاتجاه الموجب، فإن الإحداثي السيني لصورة هذه النقطة يزداد بمقدار الانتقال، بينما يكون الإحداثي الصادي ثابتاً.

• وعندما يكون الانتقال بموازاة المحور الصادي في الاتجاه السالب فإن الإحداثي الصادي للنقطة ينقص بمقدار الانتقال بينما يكون الإحداثي السيني لها ثابتاً. ماذا يحدث إذا كان الانتقال بموازاة المحور الصادي في الاتجاه الموجب ؟

مثال (٥)

جدّ صورة Δ أ ب ج الذي رؤوسه أ $(0, 1)$ ، ب $(0, 3)$ ،

ج $(2, 2)$ بانتقال وفق القاعدة : (س ، ص) $\leftarrow$ (س + ٢، ص - ٣)

الحل: بناءً على القاعدة يكون الانتقال مقداره وحدتان نحو اليمين و ٣ وحدات للأسفل

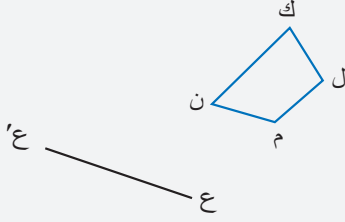
أي أن النقطة أ $(0, 1)$ $\leftarrow$ أ' $(3, -3)$

النقطة ب $(0, 3)$ $\leftarrow$ ب' $(3, 0)$

النقطة ج $(2, 2)$ $\leftarrow$ ج' $(4, -1)$

عليه يصبح Δ أ' ب' ج' هو صورة Δ أ ب ج بالانتقال المذكور .

تمرين (٤-٦)



١. أنقل إلى كراستك الشكل ثم جد صورة
ك ل م ن بالانتقال الذي مقداره ع ع'
واتجاهه بموازة ع ع' (من ع إلى ع').

٢. على مستوى المحورين الإحداثيين عيّن النقطة $(-٣, ١)$ ، ثم على الرسم حدّد صورة
هذه النقطة :

أ. بانتقال مقداره خمسة وحدات في اتجاه يوازي المحور السيني في الاتجاه الموجب.

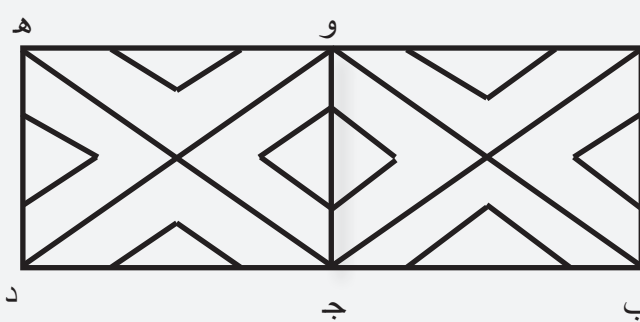
ب. بانتقال مقداره وحدتان في اتجاه يوازي المحور الصادي في الاتجاه الموجب.

ج. بانتقال وفق القاعدة $(س, ص) \leftarrow (س+١, ص-٢)$

٣. جد صورة النقطة $(٢, -٣)$ بانتقال مقداره ٤ وحدات لليمين ثم ثلاثة وحدات ونصف
إلى الأسفل .

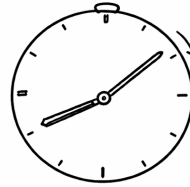
٤. رؤوس Δ أ ب ج هي $(١, ٤)$ ، ب $(٥, ٤)$ ج $(٣, ٠)$. ارسم صورة هذا المثلث
تحت تأثير انتقال قاعدته $(س, ص) \leftarrow (س+٣, ص-١)$.

٥. الزخرفة التالية تمثل انتقال للشكل و ج د ه إلى الشكل أ ب ج و :
حدّد مقدار الانتقال واتجاهه .





هناك أمثلة كثيرة على الدوران في الحياة منها معصرة السمسم التقليدية بالسودان كما في الشكل المقابل. السودان هو المنتج الأول للسمسم الأبيض الأعلى ثمناً والأكثر طلباً عالمياً (إلى جانب الصين والهند). وتُعتبر ولاية القضارف المركز الرئيس والأعلى في الإنتاج العالمي كما تشتهر ولايات كردفان (شمال وجنوب) بالسمسم الأبيض ذي الجودة العالية إضافةً إلى ولايات النيل الأزرق وسنار والنيل الأبيض. وينتج السودان أيضاً السمسم الأحمر الذي يتميز بنسبة زيت عالية جداً.



لاحظ الاتجاه الذي تدور فيه عقارب الساعة في الرسم .
يسمى اتجاه دوران عقارب الساعة بالاتجاه السالب.

ما الاتجاه الموجب للدوران؟ بالتأكيد هو عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.

مثال (١) : حدّد اتجاه دوران كل من:

أ. فتح الصنبور ب. ربط المسمار



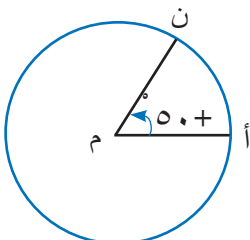
فتح الصنبور ربط المسمار

مثال (٢) : على الشكل دائرة مركزها م ، أ نقطة على الدائرة م

ارسم الزاوية $\angle$ أ م ن في الاتجاه الموجب ،

بحيث الزاوية $\angle$ أ م ن = 50° .

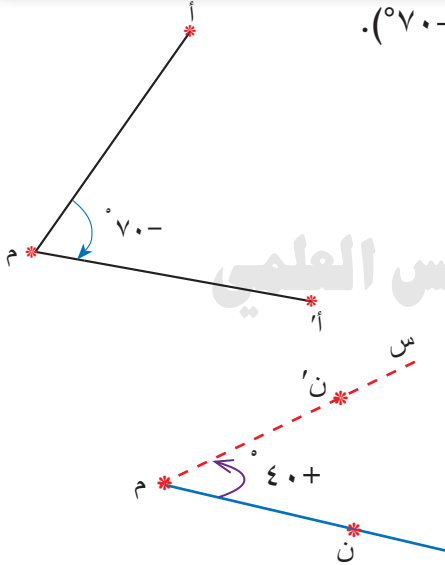
ن هي صورة أ بالدوران الذي مركزه م، وزاويته 50° .



الدوران حول م هو تحويل هندسي يحوّل كل نقطة أ من المستوى إلى أ'، بحيث أن أ م = م أ' وتُسمى الزاوية $\angle$ أ م أ' زاوية الدوران. ويرمز لها بالزاوية (+هـ) إذا كان الدوران في الاتجاه الموجب، وبالزاوية (-هـ) إذا كان الدوران في الاتجاه السالب.

مثال (٣): عيّن أ' صورة أ بالدوران (م ، -٧٠°).

الحل:



مثال (٤): على الشكل .

عيّن النقطتين ن ، م ، صل ن م

ارسم م س بحيث تكون

$\angle$ ن م س = ٤٠°

في الاتجاه الموجب.

افتح الفرجار فتحة تساوي طول ن م ثم ارسم قوساً يقطع م س في ن'.

ن' هي صورة ن بالدوران الذي مركزه م وزاويته ٤٠°+.

عليه يمكن تحديد صورة كل نقطة في المستوى بدوران إذا علمت مركز الدوران وزاويته واتجاهه وطول نصف قطر الدوران ، ونعبّر عن الدوران بـ د (م ، هـ).

مثال (٥):

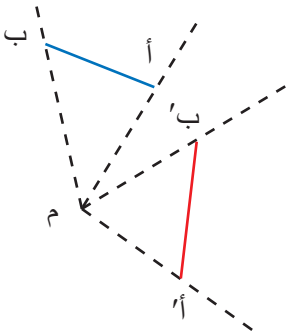
ارسم صورة أ ب تحت تأثير الدوران (م ، -٨٠°)، م $\neq$ أ ب

الحل: ارسم م أ ، ثم باستخدام المنقلة ارسم زاوية قياسها ٨٠° رأسها النقطة م وضلعها م أ. (لاحظ أن الزاوية سالبة لهذا يكون اتجاهها مع عقارب الساعة).

افتح الفرجار فتحة تساوي طول أ م ثم ارسم قوساً يتقاطع

مع م أ' في أ'. بحيث يكون أ م = م أ' .

أ' هي صورة أ بالدوران (م ، -٨٠°).



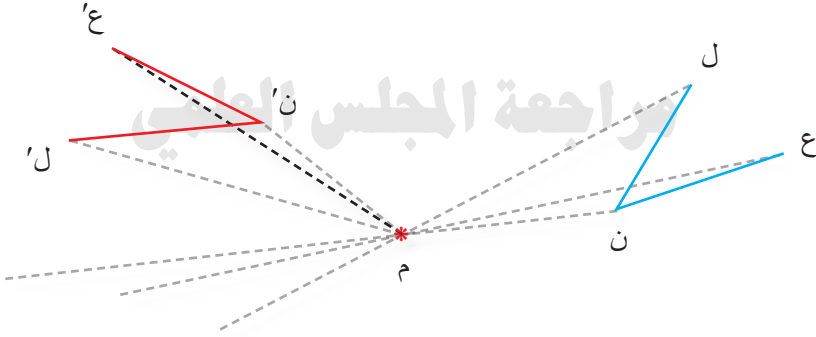
عين صورة النقطة ب بالطريقة نفسها.

صل أ' ب' فتكون هي صورة أ ب بالدوران (م ، -٨٠°) قس طول كل من أ ب ، أ' ب' . ماذا تلاحظ؟

نستنتج أن الدوران حول نقطة يحافظ على

مثال (٦) ارسم صورة ع ن ل تحت تأثير الدوران (م ، +١٢٠°).

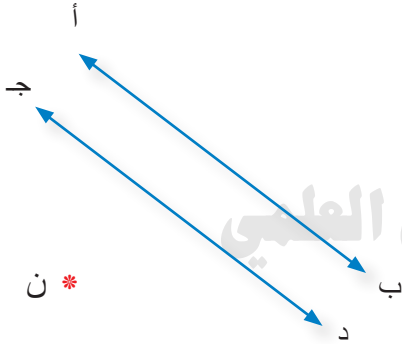
الحل : نرسم بنفس طريقة مثال (٥) السابق .



باستخدام المنقلة. قس كل من الزاويتين ع ن ل ، ع' ن' ل' . ماذا تلاحظ ؟
الدوران حول نقطة يحافظ على

مثال (٧) : ارسم صورة المستقيمين المتوازيين أ ب ، ج د بالدوران (ن ، +٧٥°).

ماذا تستنتج بالنسبة لصورة المستقيمين المتوازيين بدوران معطى ؟



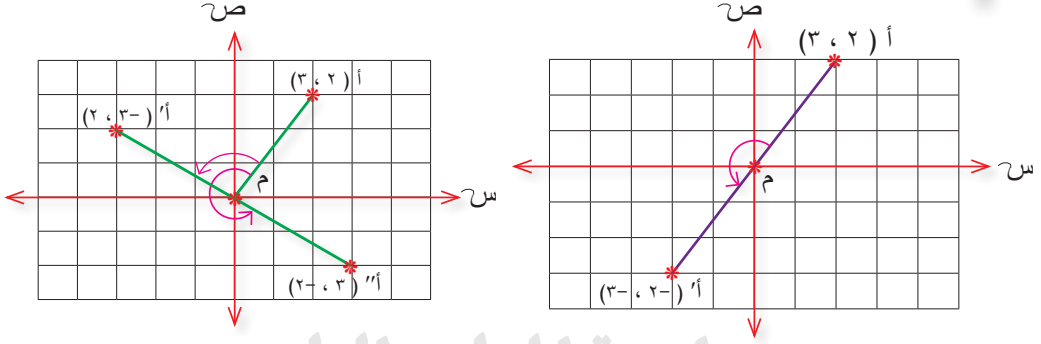
خصائص الدوران

مما سبق نستنتج أن:

- الدوران يحافظ على الأطوال.
- الدوران يحافظ على قياس الزوايا.
- الدوران يحافظ على التوازي.

الدوران في المستوى الإحداثي :

مثال (٨)



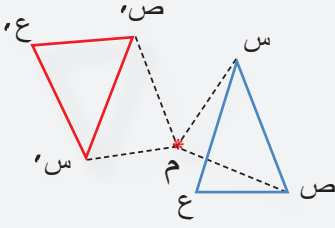
شكل (٢)

شكل (١)

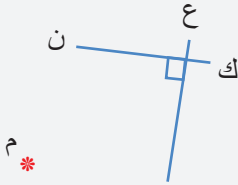
لاحظ في شكل (١) : صورة $A(3, 2)$ بالدوران $(M, 90^\circ)$ هي $A'(-2, 3)$ في شكل (٢) : صورة $A(3, 2)$ بالدوران $(M, -90^\circ)$ هي $A'(-2, -3)$ في شكل (٢) : صورة $A(3, 2)$ بالدوران $(M, 270^\circ)$ هي $A'(-2, -3)$ حيث M هي نقطة الأصل $(0, 0)$.
نستنتج من ذلك أن :

صورة $(س, ص)$ بالدوران $(M, 90^\circ)$ هي $(-ص, س)$
صورة $(س, ص)$ بالدوران $(M, -90^\circ)$ هي $(ص, -س)$
صورة $(س, ص)$ بالدوران $(M, 270^\circ)$ هي $(ص, -س)$

تمرين (٥-٦)



في الشكل المقابل حدّد ماذا إذا كان
مثلث س' ص' ع' صورة للمثلث س ص ع
بالدوران الذي مركزه م اكمل الرسم ، وضّح إجابتك.



٢- في الشكل المقابل ع ل $\perp$ ك ن
ارسم صورة ل ع ، ك ن بالدوران (م ، $+60^\circ$)
حدّد وضع المستقيمين المتعامدين بالدوران.

٣- د نقطة في المستوى ، د' صورة د بالدوران (م ، $+70^\circ$)
ه صورة د' بالدوران (م ، -120°)
ما الدوران الذي يجعل ه صورة د؟

٤- جد إحداثيات رؤوس Δ أ' ب' ج' صورة Δ أ ب ج بالدوران (م ، $+90^\circ$) إذا علمت
أن : أ (١، -١) ، ب (٥، -٣) ج (٣، -٧) .
٥- حدّد الموقع النهائي لصورة النقطة أ (٢، ٥)
بالانتقال (س ، ص) $\leftarrow$ (س-٣، ص+١) ثم بالدوران (م ، $+180^\circ$) .

٦. حدّد مركز تناظر الشكل التالي وسمّه ن ، من ن عيّن

النقطة م بحيث يكون طول ن م = ٥ سم .

اعتبر م مركز الدوران ، م ن نصف قطر الدوران ،

ارسم نظير الشكل المقابل بالدوران الذي مركزه م وزاويته $+50^\circ$ وطول نصف قطر دورانه
يساوي ٥ سم .

(إذا كررت الرسم ستحصل على زخرفة رائعة)



١. يكون المستقيم $\overleftrightarrow{S}$ محور تناظر لشكل ما ، اذا كان لكل نقطة من الشكل صورة من نفس الشكل بالتناظر حول $\overleftrightarrow{S}$ ، ويسمى $\overleftrightarrow{S}$ في هذه الحالة محور التناظر
٢. تكون م مركز تناظر للشكل إذا كانت صورة كل نقطة من الشكل حول م هي نقطة من الشكل نفسه.
٣. الانعكاس حول $\overleftrightarrow{S}$ في المستوى هو تحويل هندسي يعين لكل نقطة أ من المستوى نقطة أ' بحيث يكون المستقيم $\overleftrightarrow{S}$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة أ أ' ، (يسمى $\overleftrightarrow{S}$ محور الإنعكاس) .
٤. أهم خصائص الانعكاس حول محور أنه يحافظ على : الأطوال - الزوايا - التوازي
٥. صورة (س، ص) بالانعكاس حول المحور الصادي هي (- س، ص)
٦. صورة (س، ص) بالانعكاس حول المحور السيني هي (س، - ص)
٧. تكون م مركز انعكاس للنقطتين أ ، ب إذا كانت م منتصف أ ب ، وتكون كل نقطة من النقطتين أ ، ب صورة للنقطة الأخرى بواسطة الانعكاس حول م .
٨. من خصائص الانعكاس حول نقطة أنه يحافظ على : الأطوال - الزوايا .
٩. الانتقال (الانسحاب) هو تحويل هندسي ينقل الشكل في المستوى مسافة ثابتة في نفس المستوى باتجاه معين. تسمى هذه المسافة مقدار الانتقال ، ويسمى هذا الاتجاه اتجاه الانتقال.
١٠. الانتقال يحافظ على كل من : الأطوال - قياس الزوايا - التوازي .
١١. الدوران حول م هو تحويل هندسي يحول كل نقطة أ من المستوى إلى أ'، بحيث أن $\overline{AM} = \overline{A'M}$ وتسمى الزاوية أ م أ' زاوية الدوران. ويرمز لها بالزاوية (+هـ) إذا كان الدوران في الاتجاه الموجب، وبالزاوية (-هـ) إذا كان الدوران في الاتجاه السالب.
١٢. الدوران يحافظ على كل من : الأطوال - الزوايا - التوازي
١٣. في المحاور الإحداثية حيث م هي نقطة الأصل فإن :
 - صورة (س، ص) بالدوران (م ، ١٨٠°) هي (- س ، - ص)
 - صورة (س، ص) بالدوران (م ، ٩٠°) هي (- ص ، س)
 - صورة (س، ص) بالدوران (م ، ٢٧٠°) هي (ص ، - س)

تمرين (٦-١)

SUDAN SUDAN

١. ما نوع التحويل الهندسي في الشكل ؟
(برّر إجابتك)

٢. حدد نوع وقاعدة التحويل الهندسي الذي يحوّل النقطة (٢ ، ٣) إلى كلٍّ مما يلي على حده:

أ. (٢ ، ٣-) ب. (٣ ، ٢-) ج. (٣- ، ٢)

٣. جدّ صورة النقطة أ (١ ، ٥-) بالانعكاس حول نقطة الأصل ،
جد صورة النقطة أ (١ ، ٥-) بالدوران الذي مركزه نقطة الأصل وزاويته ١٨٠° .
قارن بين صورتَي النقطة أ ، ماذا تستنتج ؟

٤. حدّد مواقع وعدد محاور التناظر لكلٍّ مما يلي :

أ. متوازي الأضلاع ب. المعين ج. السداسي المنتظم

٥. ما نوع التحويل الهندسي الذي تمثله الأشكال السداسية في الشكل المقابل ؟



- خلايا قرص العسل عبارة عن أشكال سداسية الأضلاع متساوية الطول، وكما عرف النحل ، فإن الشكل السداسي هو الشكل الأمثل من الناحية الرياضية لاستخدام الموارد والمساحة الثمينة . يعدّ العسل السوداني منتجاً طبيعياً عالي الجودة، يشتهر بأنواعه الغابية البرية مثل عسل الطلح والسرر، ويتم إنتاجه في بيئات طبيعية نقية كمناطق الرديم وسنقو. يتميز بفوائده الصحية العالية لتعزيز المناعة والطاقة .

٦. أٌجري انتقال لشكل ما وفق القاعدة : (س، ص) ← (س + ٢ ، ص - ١)

ثم أٌجري انتقال آخر للصورة الناتجة قاعدته : (س ، ص) ← (س - ١ ، ص + ١)
من دون رسم حدّد مكان الشكل النهائي .

٧. إذا كان صورة النقطة أ (٢ ، -١) بالانعكاس حول المستقيم ل هي أ' (٤ ، ١) ،
فجدّ معادلة المستقيم ل .

إرشاد: ما علاقة محور الانعكاس بالنقطتين المتناظرتين؟

الوحدة السابعة

الأعداد المركبة Complex Numbers

أهداف الوحدة :

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١. يعرف الكمية الحقيقية و الكمية التخيلية .
٢. يعرف العامل التخيلي .
٣. يجد القوى الصحيحة للعامل التخيلي ت .
٤. يعرف العدد المركب .
٥. يذكر شرط تساوي عددين مركبين .
٦. يجري العمليات على الأعداد المركبة .
٧. يجد مرافق العدد المركب .
٨. يجد مقلوب العدد المركب .

لماذا ندرس الأعداد المركبة ؟

لأننا من خلال دراستنا السابقة لحل المعادلة الخطية توصلنا إلى أنه يوجد حل واحد في مجموعة الأعداد الحقيقية لأي معادلة خطية وعند دراستنا للمعادلة التربيعية اتضح لنا أنه لنوع معين من المعادلات التربيعية حل في مجموعة الأعداد الحقيقية وهناك نوع آخر من المعادلات التربيعية لا يوجد له حل في مجموعة الأعداد الحقيقية مثل المعادلات التي على الصورة $x^2 + 1 = 0$ و $x^2 + 4 = 0$ و كما تعلمنا أن المعادلات التربيعية التي يكون مميزها ($b^2 - 4ac > 0$) سالبة لا يوجد لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية . عليه فإن ظهور مثل هذه المعادلات في معظم التطبيقات الفيزيائية والهندسية أدى إلى الحاجة إلى توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة أوسع منها و هي ما تُعرف بمجموعة الأعداد المركبة (ك) أي أن :

$$\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N} \supset \mathbb{K}$$

Previously Acquired Knowledge : (٧-١) المعارف السابقة المكتسبة :

- في دراستنا لمجموعة الأعداد الحقيقية في سنواتنا الدراسية السابقة :
 - تعرفنا على مجموعة الأعداد الحقيقية والعمليات عليها و خواصها (الإغلاق ، الإبدال ، التجميع ، التوزيع ، العنصر المحايد للجمع و للضرب و النظير الجمعي و الضربي) .
 - وجدنا جذور الأعداد الحقيقية.
 - قمنا بحل المعادلات التربيعية مثل: أس^٢ + ب س + ج = ٠ باستخدام التحليل واستخدام القانون العام
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 - تعرفنا على متطابقات مهمة مثل :
- $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
- $$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
- $$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

تمرين (٧-١)

١. حل المعادلات التالية :
 - أ. $س^٢ + ٣س + ٢ = ٠$ ب. $س^٢ - ٥س + ٦ = ٠$
 - ج. $س^٢ + ٤س + ٢ = ٠$ د. $س^٢ + ٢س + ٥ = ٠$
 لاحظ أن المعادلة في (د) لا تُحل في مجموعة الأعداد الحقيقية .
٢. جد ما يلي :
 - أ. $(٦ + ٢) \times (٤ - ١)$ ب. $\sqrt{٢٥} + \sqrt{٤}$ ج. $\frac{٥ + ٢}{٢٥ - ٢٢}$

(٢-٧) الكمية الحقيقية و الكمية التخيلية:

The Real Part and the Imaginary Part

حل المعادلة $س^2 + ٩ = ٠$ حيث $س \in \mathbb{C}$
 $\therefore س^2 + ٩ = ٠ \Leftrightarrow س^2 = -٩$ و بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد أن :
 $س = \pm \sqrt{-٩}$ لكن $\sqrt{-٩}$ لا ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ عليه
 فإن الجذر التربيعي للأعداد السالبة لا ينتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لذلك نسميه
 بالكمية التخيلية (غير الحقيقية).

تعريف :

■ الكمية الحقيقية هي الكمية التي يكون مربعها موجباً أي أن ما بداخل الجذر التربيعي موجباً . مثل : $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{١٦}$ ، $\sqrt{س^2}$ حيث $س \in \mathbb{R}$

■ الكمية التخيلية هي الكمية التي يكون مربعها سالباً أي أن ما بداخل الجذر التربيعي سالباً . مثل : $\sqrt{-٣}$ ، $\sqrt{-١٦}$ ، $\sqrt{-س^2}$ حيث $س \in \mathbb{R}$

مثال : حدّد الكمية الحقيقية والكمية التخيلية فيما يلي :

$$\sqrt{٥} ، \sqrt{-٧} ، \sqrt{-١٤} ، \sqrt{٢٥} ، \sqrt{-٨١}$$

قطعت سيارة مسافة ٦٠ كم غرباً

الحل : $\sqrt{٥}$ كمية حقيقية لأن مربعها ٥ عدد موجب.

$\sqrt{-٧}$ كمية تخيلية لأن مربعها -٧ عدد سالب.

$\sqrt{-١٤}$ كمية تخيلية لأن مربعها -١٤ عدد سالب.

$\sqrt{٢٥}$ كمية حقيقية لأن مربعها ٢٥ عدد موجب.

$\sqrt{-٨١}$ كمية تخيلية لأن مربعها -٨١ عدد سالب.

∴ المسافة = ٦٠ كم ومربعها $٦٠^2 = ٣٦٠٠$ عدد موجب فإن المسافة كمية حقيقية .

تمرين (٢-٧) :

حدد الكميات الحقيقية والكميات التخيلية فيما يلي :

$$\sqrt{١٣} ، \sqrt{-٤١} ، \sqrt{-٦٤} ، ٠ ، \sqrt{١٠٠} ، \sqrt{-١١٢}$$

تعريف :

يُعرّف العامل التخيلي (ت) بأنه العدد الذي يكون مربعه يساوي -1 أي أن:
 $t^2 = -1$ عليه فإن $t = \sqrt{-1}$

مثال (١) : $\sqrt{-9} = \sqrt{9} \times \sqrt{-1} = 3t$ حيث $t = \sqrt{-1}$
 $\sqrt{-25} = \sqrt{25} \times \sqrt{-1} = 5t$

ملاحظة مهمة :

أي كمية تخيلية = قيمة حقيقية $\times$ العامل التخيلي ت

مثال (٢) : عبّر عن الكميات التخيلية التالية في صورة قيمة حقيقية مضروبة في العامل التخيلي ت فيما يلي : $\sqrt{-7}$ ، $\sqrt{-16}$ ، $\sqrt{-س}$

الحل :
 $\sqrt{-7} = \sqrt{7} \times \sqrt{-1} = \sqrt{7}t$
 $\sqrt{-16} = \sqrt{16} \times \sqrt{-1} = 4t$
 $\sqrt{-س} = \sqrt{س} \times \sqrt{-1} = \sqrt{س}t$ حيث $t = \sqrt{-1}$

تمرين (٢-٧)

عبّر عن الكميات التخيلية التالية في صورة قيمة حقيقية مضروبة في العامل التخيلي ت :

$\sqrt{-11}$ ، $\sqrt{-81}$ ، $\sqrt{-99}$ ، $\sqrt{-210}$ ، $\sqrt{-أ}$

(٧ - ٤) القوى الصحيحة للعامل التخيلي ت :

Integer Powers of the Imaginary Unit

القوى الصحيحة للعامل التخيلي ت تعطي دائماً إحدى القيم التالية :
ت أو - ١ أو - ت أو ١ وهذه القيم تتكرر بصورة دورية كلما زاد الأس (القوة) بمقدار ٤ و بصورة عامة لكل ن $\Rightarrow$ ص $^+$ فإن :

ت ^١ = ت	ت ^٢ = - ١	ت ^٣ = - ت	ت ^٤ = ١
ت ^٥ = ت	ت ^٦ = - ١	ت ^٧ = - ت	ت ^٨ = ١
ت ^٩ = ت	ت ^{١٠} = - ١	ت ^{١١} = - ت	ت ^{١٢} = ١
ت ^{١٣} = ت	ت ^{١٤} = - ١	ت ^{١٥} = - ت	ت ^{١٦} = ١
ت ^{١٧} = ت	ت ^{١٨} = - ١	ت ^{١٩} = - ت	ت ^{٢٠} = ١

مثال (١) : جد قيمة ما يلي :

$$ت^{٢١} = ت^{٢٠} \times ت = ت$$

$$ت^{٤٢} = ت^{٤٠} \times ت^٢ = - ١$$

$$ت^{٢٣} = ت^{٢٠} \times ت^٣ = - ت$$

$$ت^{٣٦} = (ت^٩)^٤ = ١$$

$$ت^{١٠١} = ت^{٢٥(٤)} = ت^{٢٠} \times ت^١ = ت$$

تعريف :

العدد المركّب ع هو العدد الذي يمكن كتابته على الصيغة : س + ت ص حيث س، ص عدنان حقيقيان و $\sqrt{-١} = ت$ ويُسمّى س بالجزء الحقيقي و ص بالجزء التخيلي للعدد المركّب ع وتُسمّى الصورة س + ت ص بالصورة الجبرية (الصورة الديكارتية) للعدد المركّب ع

مثال (٢): الجدول التالي يوضح الأجزاء الحقيقية والتخيلية لبعض الأعداد المركبة التالية :

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
أ + ب ت	أ	ب
٧ + ١٠ ت	٧	١٠
٣ - ٢ ت	٣ -	٢
٦ - ٥ ت	٦ -	٥ -
٨ - ت	٨ -	١ -
١٢	١٢	٠
٦ ت	٠	٦

تمرين (٧-٤)

- جد قيمة كل من :
أ. ت^{٤٩} ب. ت^{٦٦} ج. ت^{٧٧} د. ت^{٨٣} هـ. ت^{١٠٤} و. ت^{١١٠}
- اختصر ما يلي :
أ. ت^٦ - ت^٩
ب. (ت^٦ + ت^{٨٨} + ت^{١٣} + ت^{١١} + ١) ÷ (ت + ت^{١٦} - ت^{١٧})
- جد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي فيما يلي :
أ. ٩ + ٤ ت ب. ت^٦ - ٨ ج. ١١ - ت د. ٨

نقول إنَّ العددين المركَّبين $س_١ + ت_١ ص_١$ ، $س_٢ + ت_٢ ص_٢$ متساويان إذا وفقط إذا تساوى الجزءان الحقيقيان لهما على حدة و تساوى الجزءان التخيليان لهما على حدة أيضاً ، أي عندما $س_١ = س_٢$ و $ص_١ = ص_٢$.

مثال (١) : جد قيمة كلِّ من $س$ ، $ص$

$$أ. س + ت ص = -٤ - ٧ت$$

$$ب. (س + ٣) + ت = ٥ + (ص + ٤)ت$$

الحل : أ . ∴ العددان المركَّبان متساويان فإن : $س = -٤$ و $ص = -٧$

ب . ∴ العددان المركَّبان متساويان فإن :

$$س + ٣ = ٥ \Rightarrow س = ٢ ، ص + ٤ = -٣ \Rightarrow ص = -٧$$

مثال (٢) : إذا كان لدينا عددان مركَّبان هما : $س_١ + ت_١ ص_١$ و $س_٢ + ت_٢ ص_٢$ حيث :

$$س_١ + ت_١ ص_١ = س_٢ + ت_٢ ص_٢$$

فإذا كان العددان متساويان جد قيمتي $س$ ، $ص$

الحل : ∴ $س_١ + ت_١ ص_١ = س_٢ + ت_٢ ص_٢$ عليه فإن :

$$س = ٢ ، ص = ٣$$

تمرين (٧-٥)

جد قيمة كلِّ من $س$ ، $ص$ فيما يلي :

$$١. س - ٣ت = ٤ - ٧ص$$

$$٢. (٣س - ٢) - ٤ت = ٨ - ٧ص$$

$$٣. ٢ + (٣ - ص)ت = س - ٧ت$$

$$٤. س - ص + ٢س صت = ت$$

$$٥. (٣ + ٢ت)س + (٢ - ٣ت)ص = -٥ + ت$$

(٧ - ٦) عمليتا الجمع و الطرح في مجموعة الأعداد المركبة :

Addition and Subtraction of Complex Numbers

يمكننا التعبير عن أي عدد مركب $s + t$ ص في صورة زوج مرتب أي أن :

$$s + t \text{ ص} = (s, t) \text{ ص}$$

المركبة كما يلي :

$$\text{إذا كان } E_1 = s_1 + t_1 \text{ ص} = (s_1, t_1) \text{ ص}$$

$$E_2 = s_2 + t_2 \text{ ص} = (s_2, t_2) \text{ ص}$$

$$\text{فإن : } E_1 + E_2 = (s_1, t_1) + (s_2, t_2) \text{ ص}$$

$$= (s_1 + s_2, t_1 + t_2) \text{ ص}$$

أي أن : حاصل جمع العددين المركبين E_1 و E_2 يُعطى كما يلي :

$$E_1 + E_2 = (s_1 + s_2, t_1 + t_2) \text{ ص}$$

و بطريقة ماثلة يمكننا تعريف عملية الطرح على مجموعة الأعداد المركبة كما يلي :

$$\text{إذا كان } E_1 = s_1 + t_1 \text{ ص} = (s_1, t_1) \text{ ص}$$

$$E_2 = s_2 + t_2 \text{ ص} = (s_2, t_2) \text{ ص}$$

$$\text{فإن : } E_1 - E_2 = (s_1, t_1) - (s_2, t_2) \text{ ص}$$

$$= (s_1 - s_2, t_1 - t_2) \text{ ص}$$

مثال (١) : إذا كان $E_1 = 7 + 3t$ ، $E_2 = 6 - 4t$ جد :

$$A. E_1 + E_2 \quad B. E_1 - E_2$$

$$\text{الحل : } \therefore E_1 = 7 + 3t = (7, 3) \text{ ص}$$

$$E_2 = 6 - 4t = (6, -4) \text{ ص}$$

$$A. E_1 + E_2 = (7, 3) + (6, -4) \text{ ص}$$

$$= ((7 + 6), (3 - 4)) = (13, -1) \text{ ص}$$

$$\therefore E_1 + E_2 = 13 - t$$

$$B. E_1 - E_2 = (7, 3) - (6, -4) \text{ ص}$$

$$= ((7 - 6), (3 + 4)) = (1, 7) \text{ ص}$$

$$\therefore E_1 - E_2 = 1 + 7t$$

مثال (٢): إذا كان لدينا العددين المركبان $٤ = ع_١$ ، $٦ + ٢ = ع_٢$ ت جد:

أ. $ع_٢ + ع_١ = ع_٣$

ب. $ع_٢ - ع_١ = ع_٤$

الحل: أ. $∴ ع_١ = ٤ = (٤, ٠)$ ، $٦ + ٢ = ع_٢ = (٦, ٢)$

عليه فإن :

$$ع_٣ = ع_١ + ع_٢ = (٤, ٠) + (٦, ٢)$$

$$= (٦ + ٤, ٢ + ٠) = (١٠, ٢)$$

$$∴ ع_٣ = ع_١ + ع_٢ = ٤ + ٦ + ٢ = ١٠$$

ب. $ع_٤ = ع_٢ - ع_١ = (٦, ٢) - (٤, ٠)$

$$= (٦ - ٤, ٢ - ٠) = (٢, ٢) = ٢ + ٢ = ٤$$

خواص عملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة :

١. خاصية الإغلاق : من أمثلتنا في عملية جمع الأعداد المركبة لاحظنا أن حاصل جمع أي عددين مركبين هو عدد مركب وعليه فإن مجموعة الأعداد المركبة مغلقة تحت عملية الجمع .

٢. خاصية الإبدال : نلاحظ أن :

$$(٢ + ٣) + (٤ + ٦) = (٢ + ٤) + (٣ + ٦)$$

عليه فإن عملية جمع الأعداد المركبة تتمتع بخاصية الإبدال وبصورة عامة يمكننا القول

$$أن : (أ + ب) + (ج + د) = (ج + د) + (أ + ب)$$

٣. خاصية التجميع: ليكن $ع_١ = أ + ب$ ، $ع_٢ = ج + د$ ،

$$ع_٣ = هـ + و$$

$$((أ + ب) + (ج + د)) + (هـ + و)$$

$$(أ + ب) + ((ج + د) + (هـ + و))$$

$$(ع_١ + ع_٢) + ع_٣ = ع_١ + (ع_٢ + ع_٣)$$

مجموعة الأعداد المركبة تتمتع بالخاصية التجميعية .

٤. خاصية العنصر المحايد لعملية جمع الأعداد المركبة : بما أنه يمكننا كتابة الصفر

في صورة عدد مركب وهو $صفر + ت$ صفر عليه نلاحظ عند جمعنا لأي عدد

مركب إلى الصفر ينتج العدد المركب نفسه أي أن :

(أ + ب ت) + (صفر + ت صفر) = أ + ب ت عليه فإنّ الصفر هو العنصر المحايد لعملية جمع الأعداد المركّبة .

٥. خاصية النظير الجمعي : ليكن $ع = ٩ + ت$ فإن : $ع - = - ٩ - ٤ =$ عليه نجد أنّ : $ع + (ع -) = (٩ + ت) + (- ٩ - ٤) = صفر + ت صفر$ أي عند جمعنا للعدد المركّب ع نظيره الجمعي -ع يكون الناتج صفر + ت صفر أي أنّنا حصلنا على العنصر المحايد لعملية جمع الأعداد المركّبة وهذا يؤكد لنا أنّ النظير الجمعي للعدد المركّب ع = أ + ب ت هو -ع = - أ - ب ت عليه يكون لكل عدد مركّب ع نظير جمعي هو -ع أي أنّ عملية جمع الأعداد المركّبة تتمتع بخاصية النظير الجمعي.

مثال (٢) : إذا علمت أن ع عدد مركّب جد قيمة ع و -ع إذا كان :

$$(٤ + ٣ ت) + ع = ٥ - ٢ ت$$

الحل : بإضافة النظير الجمعي للعدد $٤ + ٣ ت$ و هو $- ٤ - ٣ ت$ لطرفي المعادلة

نحصل على :

$$(- ٤ - ٣ ت) + (٤ + ٣ ت) + ع = ٥ - ٢ ت$$

$$ع = ٨ - ٢ ت$$

$$ع = ٨ - ٢ ت$$

$$ع = ٨ - ٢ ت \Leftrightarrow ع - ٨ = - ٢ ت \Leftrightarrow ٨ + ٢ ت = ع$$

$$ع هو ٨ + ٢ ت$$

تمارين (٦-٧)

١. جد ناتج جمع العددين المركّبين فيما يلي:

أ. $(-٢ - ٤ ت)$ ، $(٦ - ٣ + ت)$

ب. $(٢ - ٢ ت)$ ، $(٩ - ت)$

ج. $٦ ت$ ، ١٢

د. $(٦ + ٣ ت)$ ، $(٦ - ٣ ت)$

٢. جد ناتج الطرح فيما يلي:

أ. $(٦ + ٤ ت) - (٢ + ٣ ت)$

ب. $١٠ - ت - (٢ - ٢ ت)$

ج. $(٢ - ٨ ت) - (١ + ت)$

د. $١٢ - (٢ + ت)$

٣. جد قيمة كل مما يلي :

أ. $(٢ + ت) + (-٤ - ت) - (٨ + ٣ ت)$

ب. $(٣ - ٣ ت) - (٢ + ٥ ت) + (-١ - ت)$

ج. $(٦ + ٤ ت) - ٢ ت + (٧ + ت)$

٤. حل المعادلات التالية في مجموعة الأعداد مركبة ك فيما يلي:

أ. $١٢ = ع + (٧ + ت)$

ب. $ع - (-٢ - ٣ ت) = (٥ + ت)$

ج. $ع + (٦ - ٦ ت) = (-٣ - ت)$

(٧-٧) عملية الضرب في مجموعة الأعداد المركبة :

Multiplication of Complex Numbers

لتكن $z_1 = a_1 + ib_1$ ، $z_2 = a_2 + ib_2$ ، $z_3 = a_3 + ib_3$ ، فإن حاصل ضرب العددين المركبين $z_1 \cdot z_2$ يعرف كما يلي :

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

مثال (١) : جد ما يلي : أ. $(3 + 4i)(2 + 3i)$

$$\text{ب. } (3 + 4i)(2 + 3i)$$

$$\text{ج. } (3 + 4i)^2$$

$$\text{الحل : أ. } (3 + 4i)(2 + 3i) = 6 + 9i + 8i + 12i^2 = 6 + 17i - 12 = -6 + 17i$$

$$= -6 + 17i$$

$$\text{ب. } (3 + 4i)(2 + 3i) = 6 + 9i + 8i + 12i^2 = -6 + 17i$$

$$\text{ج. } (3 + 4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = 9 + 24i - 16 = -7 + 24i$$

$$(3 + 4i)(2 + 3i) = 6 + 9i + 8i + 12i^2 = -6 + 17i$$

$$= -6 + 17i$$

$$(3 + 4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = 9 + 24i - 16 = -7 + 24i$$

$$= -7 + 24i$$

$$(3 + 4i)(2 + 3i) = 6 + 9i + 8i + 12i^2 = -6 + 17i$$

$$= -6 + 17i$$

$$(3 + 4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = 9 + 24i - 16 = -7 + 24i$$

$$= -7 + 24i$$

$$(3 + 4i)(2 + 3i) = 6 + 9i + 8i + 12i^2 = -6 + 17i$$

ملاحظة مهمة :

من خلال المثال (١) أعلاه لاحظنا أن ناتج ضرب أي عددين مركبين هو عدد مركب عليه فإن مجموعة الأعداد المركبة مغلقة تحت عملية الضرب.

- يمكننا القول بأن عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة ك تتمتع بخواص الإغلاق ، الإبدال ، التجميع ، وأن العدد $1 = 1 + 0i$ هو العنصر المحايد لضرب الأعداد المركبة .

مثال (٢): جد ناتج حاصل الضرب : $(٧ + ٤ ت) (٧ - ٤ ت)$

الحل: $(٧ + ٤ ت) (٧ - ٤ ت) = ٤٩ - ٢٨ ت + ٢٨ ت - ١٦ ت^٢$

$$٦٥ = ١٦ + ٤٩ =$$

$$\therefore (٧ + ٤ ت) (٧ - ٤ ت) = ٦٥ .$$

ملاحظة مهمة :

في المثال أعلاه نلاحظ أنّ $(٧ + ٤ ت) (٧ - ٤ ت)$ يساوي ٦٥ و هو عدد حقيقي و أنّ حاصل جمعها يساوي ١٤ عدد حقيقي عليه فإنّ :

أي عددين مركبين على هذه الصيغة يسميان بالعددين المركبين المترافقين .

مثال (٣): ليكن لدينا العددين المركبان $١ ع + ٣ ت$ ، $١ ع + ٣ ت$

$$\text{جد } ١ ع \times ١ ع .$$

الحل: $١ ع \times ١ ع = (١ + ٣ ت) (١ + ٣ ت)$

$$= (١ \times ١ + ٣ \times ٣ ت) + (١ \times ٣ ت - ٣ \times ١ ت)$$

$$= ٢ + ٤ ت .$$

تمرين (٧-٧)

١. جد كلّاً مما يلي :

أ. $٨ (٣ - ٢ - ت)$

ب. $٤ ت (٣ + ت)$

ج. $(٢ + ت) (٧ - ٤ ت)$

٢. إذا كان $١ ع = ٢ + ٤ ت$ ، $١ ع = ٥ - ت$ ، $١ ع = ٧ - ٦ ت$

جد ما يلي:

أ. $١ ع \cdot ١ ع$ ب. $١ ع (١ ع \cdot ١ ع)$

ج. $١ ع (١ ع + ٤ ع)$ د. $١ ع (١ + صفر ت)$

هـ. $١ ع \cdot ١ ع$ و. $١ ع (١ ع \cdot ١ ع)$

٣. ليكن لدينا العددين المركبان $١ ع = ٤ + ٢ ت$ و $١ ع = ١ + ت$ جد $١ ع \times ١ ع$.

Conjugates of a Complex Number (٧ - ٨) مرافق العدد المركب:

إذا كان العدد المركب $ع = س + ت ص$ فإن مرافقه يُرمز له بالرمز $\overline{ع}$ ويساوي $\overline{ع} = س - ت ص$ أي أننا نحصل على مرافق العدد المركب $ع = س + ت ص$ بتغيير إشارة العدد التخيلي. عليه فإن: $\overline{ع} = س - ت ص$

مثال (١): جد مرافق الأعداد المركبة فيما يلي :

أ. $ع = ٦ - ٤ ت$ ب. $ع = ٨ ت$ ج. $ع = ١٢ -$

الحل: أ. $\because ع = ٦ - ٤ ت$ فإن مرافقه هو $\overline{ع} = ٦ + ٤ ت$

ب. $\because ع = ٨ ت$ فإن مرافقه هو $\overline{ع} = ٨ - ت$

ج. $\because ع = ١٢ -$ فإن مرافقه هو $\overline{ع} = ١٢ -$

بعض خواص مرافق العدد المركب $ع = س + ت ص$:

١. $ع + \overline{ع} = س + ت ص + س - ت ص = ٢ س$ أي أن حاصل جمع عدد مركب و مرافقه يساوي عدد حقيقي .

مثلاً: $٤ + ٣ ت + ٣ - ٤ ت = ٨$ عدد حقيقي .

٢. $ع - \overline{ع} = (س + ت ص) - (س - ت ص) = ٢ ت ص$ أي أن حاصل طرح مرافق العدد المركب $ع$ من العدد المركب نفسه يساوي عدد تخيلي .

مثلاً: $(٣ - ٨ ت) - (٣ + ٨ ت) = -١٦ ت$ عدد تخيلي .

٣. $ع + ع = \overline{ع} + \overline{ع}$ أي أن مرافق مجموع العددين المركبين يساوي مجموع مرافقي العددين المركبين .

مثلاً: $(٢ + ٥ ت) + (٣ + ت) = (٥ + ٢ ت) + (٣ + ت)$

أو: $(٢ + ٥ ت) + (٣ + ت) = (٥ + ٢ ت) + (٣ + ت)$

$٥ - ٦ ت =$

٤. $ع \cdot \overline{ع} = (س + ت ص)(س - ت ص) = س^٢ - ت^٢ ص^٢$ أي أن حاصل ضرب العددين المركبين المترافقين يساوي مربع الجزء الحقيقي زائداً مربع الجزء التخيلي و هو عدد حقيقي.

مثلاً: $(٦ + ٢ ت)(٦ - ٢ ت) = ٣٦ - ٤ ت^٢ = ٤٠$

٥. $\overline{\overline{ع}} = ع$ أي أن مرافق مرافق العدد المركب $ع = س + ت ص$ يساوي العدد

المركَّب ع = س + ت ص نفسه .

مثلاً : $(٢ + ٣ ت) = ٢ + ٣ ت$

٦. إذا كان العدد المركَّب ع يساوي عدد حقيقي فإن ع = ع أي أن مرافق العدد الحقيقي هو العدد الحقيقي نفسه .

مثلاً : إذا كان ع = ٧٨ فإن ع = ٧٨

مثال (٢) : إذا كان العدد المركَّب ع يساوي $٤ + ٣ ت$ جد مرافقه ع .

الحل : $ع = ٤ + ٣ ت$ فإن مرافقه ع = $٤ - ٣ ت$

مراجعة المجلس العلمي

تمرين (٧-٨)

١. جد مرافق كل من الأعداد المركَّبة فيما يلي :

أ. $ع = ٧ - ٦ ت$ ب. $ع = ١٣ - ت$

ج. $ع = ٣٤ - ت$ د. $ع = ٦ + ت$

٢. إذا كان ع = $٢ + ٤ ت$ ، ع = $٥ - ت$ جد ما يلي :

أ. $ع + ١ ع$ ب. $٢ ع - ١ ع$ ج. $ع \cdot ١ ع$

د. $ع$ هـ. $ع + ١ ع$ و. $ع \cdot ١ ع$

٣. أثبت صحة ما يلي :

أ. $ع \cdot ١ ع = ع \cdot ١ ع$

ب. $ع + ع = ٢ س$ ، حيث ع = س + ت ص

٤. إذا كان العدد المركَّب ع يساوي $٩ + ٨ ت$ جد ع ، ع

(٧ - ٩) عملية القسمة في مجموعة الأعداد المركبة :

Division of Complex Number

إذا كان العدد المركب $z_1 = a_1 + b_1i$ ، $z_2 = a_2 + b_2i$ فإن
خارج قسمة العدد المركب z_1 على العدد المركب $z_2 \neq 0$ نحصل عليه بضرب البسط و
المقام في مرافق العدد المركب $z_2 \neq 0$ كما يلي :

$$\frac{z_1}{z_2} \times \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$$

$$\frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$$

$$\frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2^2 + b_2^2)} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$$

مثال (١) : جد قيمة ما يلي : أ. $\frac{3 + i}{-2 - i}$. ب. $\frac{2 + 4i}{-1 - i}$

الحل : أ. نضرب البسط والمقام في مرافق المقام لنحصل على :

$$\frac{3 + i}{-2 - i} = \frac{3 + i}{-2 - i} \times \frac{-2 + i}{-2 + i} = \frac{(3 + i)(-2 + i)}{(-2 - i)(-2 + i)}$$

ب. نضرب البسط والمقام في مرافق المقام لنحصل على :

$$\frac{2 + 4i}{-1 - i} = \frac{2 + 4i}{-1 - i} \times \frac{-1 + i}{-1 + i} = \frac{(2 + 4i)(-1 + i)}{(-1 - i)(-1 + i)}$$

مثال (٢) : إذا كان $z_1 = 2 + i$ ، $z_2 = 3 + 4i$ ، $z_3 = -3 + i$ جد ما يلي :

أ. $\frac{z_1}{z_2}$. ب. $\frac{z_1 \times z_2}{z_3}$

الحل : أ. نضرب البسط والمقام في مرافق المقام لنحصل على :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i}{3 + 4i} = \frac{2 + i}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{(2 + i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)}$$

ب. $\frac{z_1 \times z_2}{z_3} = \frac{(2 + i)(3 + 4i)}{-3 + i} = \frac{(2 + i)(3 + 4i)}{-3 + i} \times \frac{-3 - i}{-3 - i} = \frac{(2 + i)(3 + 4i)(-3 - i)}{(-3 + i)(-3 - i)}$

$$= -1 - i$$

مثال (٢): جد حل المعادلة $(٢ + ٣ت) ع = ٣ت$ في مجموعة الأعداد المركبة كـ

الحل: $\therefore (٢ + ٣ت) ع = ٣ت \Leftrightarrow ع = \frac{٣ت}{٣ت + ٢}$ نضرب البسط و المقام في

مرافق المقام لنحصل على :

$$ع = \frac{٣ت}{٣ت + ٢} \times \frac{٣ - ٢}{٣ - ٢} = \frac{٣ - ٢ت}{٩ + ٤} = \frac{٦ + ٩}{١٣} = \frac{٦}{١٣} + \frac{٩}{١٣}ت$$

$\therefore ع = \frac{٦}{١٣} + \frac{٩}{١٣}ت$ هو حل المعادلة $(٢ + ٣ت) ع = ٣ت$ في مجموعة الأعداد المركبة كـ .

تمرين (٧-٩)

١. جد قيمة كل مما يلي :

أ. $\frac{٨ + ٢ت}{ت}$ ب. $\frac{٢ + ٢ت}{-٤ - ت}$ ج. $\frac{١ + ٥ت}{٤ + ٣ت}$

٢. جد قيمة كل مما يلي و أكتب الناتج على صورة $س + ت$ ص :

أ. $\frac{٥ + ٣ت}{٢ت}$ ب. $\frac{٢ + ٢ت}{٢(ت + ١)}$

ج. $\frac{٢(٣ - ٦ت)٢}{٣ + ٢ت}$ د. $\frac{(٥ + ١ت)(٢ - ٥ت)}{٦ - ٧ت}$

٣. إذا كان $ع = ٢ + ٢ت$ ، $ع = ١ - ٧ت$ و $ع = ٤ - ٨ت$ جد :

أ. $\frac{٢ع}{١ع}$ ب. $\frac{١ع \times ٢ع}{٢ع}$ ج. $\frac{١ع + ٢ع}{١ع}$

د. $(٢(١ع) - ٢ع٤ + ٥) \div (٣ + ١ع)$ على صورة $س + ت$ ص

٤. أثبت صحة كل مما يلي :

أ. $٣ - ت = \frac{٢٠}{٣ + ٤} + \frac{٥ + ٥ت}{٤ - ٣}$.

ب. $(٣ت - ٣٠ - ١٩) \div (٢ - ١) = ت + ١$.

٥. جد حل كل من المعادلات التالية في مجموعة الأعداد المركبة كـ :

أ. $(١ + ت) ع = ٢ -$

ب. $(٣ + ت) ع = (٣ - ٤ت) - ٣ت$

The Reciprocal of a Complex Number (Multiplicative Inverse)

٢٠٠

مثال (٢): إذا كان العدد المركّب $ع = ٣ - ٥ ت$ جد نظيره الضربي $\frac{1}{ع}$

الحل: ∴ العدد المركّب $ع = ٣ - ٥ ت$ فإن نظيره الضربي

$$\frac{1}{ع} = \frac{مرافق ع}{ع \times مرافق ع} = \frac{س - ت ص}{س^2 + ص^2} = \frac{٣ - ٥ ت}{٢٥ + ٩} = \frac{٣ - ٥ ت}{٣٤} = \frac{٣}{٣٤} - \frac{٥}{٣٤} ت$$

∴ النظير الضربي للعدد المركّب $ع = ٣ - ٥ ت$ يساوي $\frac{٣}{٣٤} - \frac{٥}{٣٤} ت$

تمرين (٧-١٠)

جد النظير الضربي (المقلوب) لكلٍ من الأعداد المركّبة فيما يلي :

أ. $٧ + ت$

ب. $٢ - ٤ - ت$

ج. $١٠ - ٢ ت$

د. $٩ ت$

هـ. $٦ - ت$

مراجعة المجلس العلمي

١. الكمية الحقيقية هي الكمية التي يكون مربعها موجباً .
٢. الكمية التخيلية هي الكمية التي يكون مربعها سالباً .
٣. العامل التخيلي هو الذي مربعه يساوي -1 أي أن :

$$t = \sqrt{-1} , t^2 = -1 .$$
٤. القوى الصحيحة للعدد التخيلي t تعطى دائماً إحدى القيم التالية :
 t أو -1 أو $-t$ أو 1
٥. العدد المركب c هو الذي يُكتب على صورة $s + t$ حيث $s, t \in \mathbb{R}$ و $t = \sqrt{-1}$ و s تمثل الجزء الحقيقي و t تمثل الجزء التخيلي للعدد المركب c .
٦. يتساوى العددين المركبان $c_1 = s_1 + t_1$ و $c_2 = s_2 + t_2$ ، $c_1 = c_2$ ، $s_1 = s_2$ و $t_1 = t_2$ إذا وفقط إذا تساوى الجزآن الحقيقيان لهما على حدة وتساوى الجزآن التخيليان لهما على حدة أيضاً : أي إذا كان : $s_1 = s_2$ و $t_1 = t_2$.
٧. إذا كان $c_1 = (s_1, t_1)$ ، $c_2 = (s_2, t_2)$ فإن :
 أ. $c_1 + c_2 = (s_1 + s_2, t_1 + t_2)$
 ب. $c_1 - c_2 = (s_1 - s_2, t_1 - t_2)$
 ج. $c_1 \cdot c_2 = (s_1 s_2 - t_1 t_2, s_1 t_2 + s_2 t_1)$
 د. $\frac{c_1}{c_2} = \frac{s_1 + t_1 t}{s_2 + t_2 t} \times \frac{\overline{c_2}}{\overline{c_2}} = \frac{s_1 \overline{s_2} + t_1 \overline{t_2}}{s_2 \overline{s_2} + t_2 \overline{t_2}}$ حيث $t^2 \neq 0$ أي أن :
٨. مرافق العدد المركب $c = s + t$ هو $\overline{c} = s - t$.
٩. النظير الضربي للعدد المركب $c = s + t$ هو

$$\frac{1}{c} = \frac{s - t}{s^2 + t^2}$$
 أي أن النظير الضربي للعدد المركب c هو مقلوب العدد المركب c و يساوي

$$\frac{\text{س} - \text{ت ص}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} = \frac{\text{س} - \text{ت ص}}{(\text{ص} - \text{ت ص})(\text{س} + \text{ت ص})} = \frac{\text{مرافق ع}}{\text{ع} \times \text{مرافق ع}}$$

١٠. النظير الجمعي للعدد المركب $\text{ع} = \text{س} + \text{ت ص}$ هو $-\text{ع} = -\text{س} - \text{ت ص}$.
١١. الصفر هو العنصر المحايد الجمعي لعملية جمع الأعداد المركبة ك.
١٢. الواحد هو العنصر المحايد الضربي لعملية ضرب الأعداد المركبة ك.
١٣. العدد المركب الصفري ليس له نظير ضربي.
١٤. $\text{ط} > \text{ك} > \text{ص} > \text{ن} > \text{ح} > \text{د}$

جامعة المجلس العلمي

تمارين (١١ - ١)

١. حدّد الكمية الحقيقية والكمية التخيلية ثم عبّر عن الكمية التخيلية في صورة قيمة حقيقية مضروبة في العامل التخيلي ت فيما يلي :

أ. $\sqrt{49 - 34}$ ب. $\sqrt{2009}$ ج. $\sqrt{34 - 34}$ د. $\sqrt{2012}$ هـ. $12 - 12$ و. 7 ت.

٢. جد قيمة كل مما يلي :

أ. 138 ت ب. 45 ت ج. 88 ت د. 15 ت + 81 + 10 هـ. 2025 ت

٣. حدّد الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للأعداد المركبة التالية :

أ. $6 - 14$ ت ب. $6 - 6$ ت ج. $19 = 6$ د. إذا كان $6 = 3 + 2$ ت ، $6 = 1 - 5$ ت جد كلاً مما يلي :

أ. $6 + 6$ ب. $6 - 6$ ج. $6 \cdot 6$ د. $\frac{6}{6}$

هـ. $6 - 6$ د. $\frac{6}{6}$

٥. جد قيمة كل مما يلي :

أ. $(2 + 3) + (4 - 3)$ ب. $(2 - 2)(2 + 3)$ ج. $(2 + 3)^2$

٦. جد مرافق العددين المركّبين : أ. $ع = -١٣ - ت$
 ب. $ع = ٤ - ٧ ت$
٧. جد النظير الضربي (المقلوب) للعددين المركّبين :
 أ. $١ + ٤ ت$ ب. $٧ ت$
٨. حل المعادلة $س^٢ + ١٢١ = ٠$ في مجموعة الأعداد المركّبة ك .
٩. حل المعادلات في كلٍ مما يلي :
 أ. $(٥ - ت) ع + ٦ ت = -٤ + ٣ ت$
 ب. $(٧ - ت) ع = -٥ - ٢ ت$
 ج. $ع(٩ - ١٠ ت) + (-٤ + ت) = -٨ ت$
١٠. إذا كانت الأعداد المركّبة : $ع = ٤ + ٣ ت$ ، $ع = -٢ + ٥ ت$
 جد كلاً مما يلي :
 أ. $ع + ع$ ب. $ع - ع$
 ج. $(ع + ع) - ع$ د. $ع - ع$
 هـ. $\frac{١}{ع}$

مراجعة المجلس العلمي

الوحدة الثامنة

المتاليات Sequences

أهداف الوحدة:

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن:

١. يُعرّف المتتالية.
٢. يجد الصيغ الارتدادية للمتتالية.
٣. يُعرّف المتتالية الحسابية.
٤. يجد الحد العام للمتتالية الحسابية.
٥. يجد مجموع المتتالية الحسابية.
٦. يحل مسائل حياتية ترتبط بالزيادة و النقصان المنتظم.
٧. يمثّل المتتالية بيانياً.
٨. يُعرّف المتتالية الهندسية.
٩. يجد الحد العام للمتتالية الهندسية.
١٠. يجد مجموع المتتالية الهندسية.
١١. يجد الأوساط الحسابية والهندسية.
١٢. يطبّق مفهوم المتتاليات الهندسية في مواقف حياتية مرتبطة بالنمو أو التضاعف.
١٣. يفسّر مفهوم المتتالية الهندسية اللانهائية.

لماذا ندرس المتتاليات؟

لأنها تساعدنا على فهم كيف تتغيّر الأشياء بطريقة منتظمة . في الحياة اليومية كثير من الأمور تتغير خطوة بعد خطوة مثل زيادة سعر سلعة أو طريقة سداد الأقساط أو النمو السكاني. المتتاليات تعلمنا كيف نكتب هذا التغيّر في شكل أعداد مرتبة وفهم النمو الذي يحدث.

(١-٨) المعارف السابقة المكتسبة: Previously Acquired Knowledge

تعتبر المعارف السابقة التي يمتلكها الطالب حجر الأساس لفهم الدروس الجديدة لأنها تساعد على ربط المفاهيم الجديدة بالمفاهيم المعروفة مسبقاً وهذه المعارف تشمل: العمليات الحسابية الأساسية والخواص العددية والمهارات الجبرية الأساسية ومفهوم النمط والتكرار.

تمرين (١-٨)

١. رتب الأعداد من الأصغر إلى الأكبر: -١ ، $١,٥$ ، ٠ ، -٣ ، $-\frac{١}{٢}$ ، -٧

٢. احسب:

(أ) $٣ \div ١٢ + ٣$

(ب) $\frac{٢}{٥} + ١$ (ج) $\frac{٤}{\frac{١}{٢} - ١}$

(د) $(١ - ٤) \times ٢$

٣. احسب:

(أ) ١٠٢ (ب) ٢٥ (ج) ٨٣ (د) ٥٤

٤. اكتب الكسور الدائرية التالية في شكل كسور اعتيادية:

(أ) $٠,٣$ (ب) $٤,١٩٥$ (ج) $٠,٤٥$

٥. إذا كان $د (س) = ٣ س - ١$ اكمل الجدول:

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
د (س)								

مع تطوير الحواسيب والأجهزة الإلكترونية وزيادة التواصل الرقمي عبر الإنترنت، قد طال هذا التطور مختلف الذاكرات الرقمية الدائمة والمؤقتة، إلا أن جميع أنواع الذاكرات على اختلاف وحدات قياسها تتألف من 2^n وحدة تخزين حيث n عدد طبيعي، هذه الأعداد $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots$ تشكل توالي مرتّب يسمح بالتعرّف على القيمة الدقيقة لسعة وحدات التخزين الرقمية مثل ١ ميغابايت تساوي 2^{10} كيلوبايت [في النظام الثنائي] أي تعادل 1024 كيلوبايت.

إحدى وأكثر الطرق شيوعاً لدراسة الأنماط في الرياضيات هو النظر إلى التوالي المرتب.

نأمل النمط الهندسي من الأشكال التالية:

٦	٥	٤	٣	٢	١

نلاحظ أن كل شكل يتضمّن ضعف عدد الدوائر في الشكل الذي يسبقه مباشرة، في الشكل الأول دائرة واحدة وفي الشكل الثاني دائرتان وفي الشكل الثالث أربع دوائر وفي الشكل الرابع ثماني دوائر وفي الشكل الخامس ست عشرة دائرة وفي الشكل السادس اثنان وثلاثون دائرة وهكذا يستمر النمط. نلاحظ أن هذه الأعداد (الدوائر) مرتبة إلى حد معين.

١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢

هل هذا النمط من الأعداد منتهي؟ وضح إجابتك تحقق من فهمك:

أكمل النمط التالي: ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ،

لاحظ النمط: ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ،

هل هذا النمط من الأعداد منتهي؟ وضح إجابتك؟

هذا النمط من الأعداد يُسمّى متتالية . وكل عدد في المتتالية يُسمّى حداً. العدد الأول

في المتتالية يُسمّى الحد الأول وترتيب أي حد في المتتالية يُسمّى رتبة الحد.

تعريف:

المتتالية هي دالة مجالها الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها، و مداها مجموعة من الأعداد الحقيقية.

قيم المجال لدالة المتتالية المنتهية هي أرقام الحدود ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ن وقيم المدى يرمز لها بالرمز: ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ح_ن

أدرس الأنشطة التالية للمتتاليات:

$$١. ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠$$

$$٢. -\frac{1}{3} ، -\frac{1}{9} ، -\frac{1}{٢٧} ، -\frac{1}{٨١}$$

$$٣. ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ، ٢٠٠ ، ...$$

نلاحظ المتتاليات (١) ، (٢) متتاليات منتهية؟ لماذا ؟ والمتتالية (٣) غير منتهية

لماذا؟

في المتتالية (٣) بإمكاننا إعطاء قاعدة تعرف العدد الذي ترتيبه ن في المتتالية بدلالة ن وتسمى هذه القاعدة الحد العام للمتتالية:

(نشاط جماعي) يزيد مصروف طالبة اليومي بمقدار ٢٠٠٠ جنية عن اليوم السابق وكان اليوم الأول مصروفها ١٠٠٠٠ جنية جد مصروفها في اليوم السابع؟

الحد العام للمتتالية:

عناصر المتتالية تسمى حدود المتتالية وهذه الحدود يجب أن تخضع لترتيب معين حيث أن ترتيب الحدود يعتبر إحدى الصفات المميزة للمتتالية. نرمز للحد الأول بالرمز ح_١ ، والحد الثاني ح_٢ ، والحد الثالث ح_٣ وللحد الذي ترتيبه ن بالرمز ح_ن ويمكن أن نعبر عن المتتالية بالصورة:

$$\{ (١ ، ح_١) ، (٢ ، ح_٢) ، (٣ ، ح_٣) ، ... \} ، واختصاراً بالصورة: \{ (ن ، ح_ن) : ن \geq ١ \}$$

الحد الذي ترتيبه ن نرمز لقيمه بالرمز ح_ن ونعبر عن المتتالية بالصورة
{(ن ، ح_ن): ن ≥ ١} ويسمى ح_ن الحد العام أو الحد النوني للمتتالية.

فمثلاً متتالية الأعداد التالية: ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ،

ح_١ = ١ ، ح_٢ = ٤ ، ح_٣ = ٧ ، ح_ن = ٣ - ن ٢ لماذا ؟ وضح إجابتك ؟

مثال (١): جد الحد العام في المتتالية ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ... ثم جد الحد السابع ومثلها بيانياً.

الحل: ح_١ = ٤ ، ح_٢ = ٢ × ٤ = ٨ ، ح_٣ = ٢ × ٨ = ١٦ ، ح_٤ = ٢ × ١٦ = ٣٢ ، ...

ح_٢ = ٢ × ح_١ = ٢ × ٤ = ٨ ، ح_٣ = ٢ × ح_٢ = ٢ × ٨ = ١٦ ، ح_٤ = ٢ × ح_٣ = ٢ × ١٦ = ٣٢ ، ...

ح_٤ = ٢ × ح_٣ = ٢ × ١٦ = ٣٢ ، ح_٥ = ٢ × ح_٤ = ٢ × ٣٢ = ٦٤ ، ...

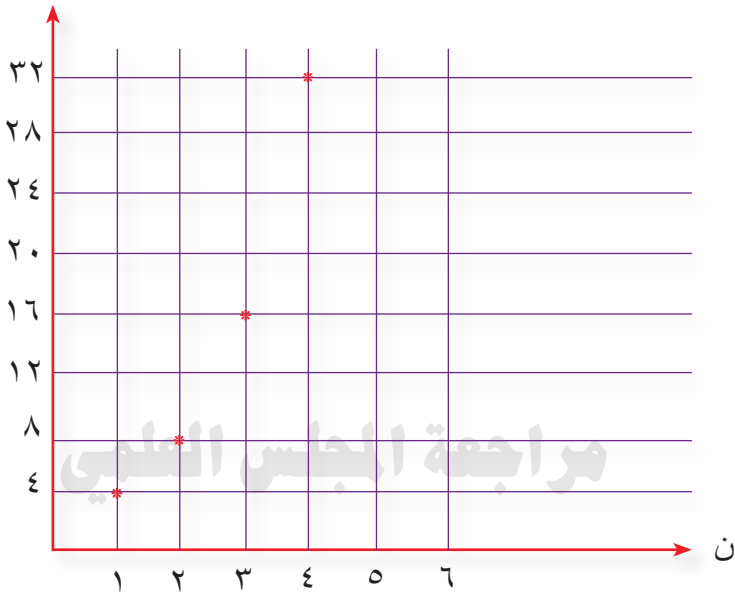
ح_٥ = ٢ × ح_٤ = ٢ × ٦٤ = ١٢٨ ، ...

لإيجاد الحد السابع ضع ن = ٧ في الحد العام.

∴ ح_٧ = ٢ × ح_٦ = ٢ × ١٢٨ = ٢٥٦

لتمثيل المتتالية بيانياً:

عين النقاط (١، ٤) ، (٢، ٨) ، (٣، ١٦) ، (٤، ٣٢)



مثال (٢): إذا كان لدينا المتتالية المعرفة بالحد النوني $ح_n = ٢ - ٣ - ن - ١٥$ حيث $ن$ عدد طبيعي. تحقق ما إذا كان العدد ١٣ أحد حدود هذه المتتالية. وما قيمة الحد الذي يليه مباشرة؟

الحل: معطى $ح_n = ١٣$

$$\begin{aligned} \text{المطلوب } ن = ؟ , \quad ح_n = ١٣ - ٢ - ٣ - ن - ١٥ \\ ١٣ - ٢ - ٣ - ن - ١٥ = ١٣ \quad , \quad ٠ = ٢٨ - ٣ - ن - ١٥ \\ ٧ = ن \quad , \quad ٠ = (٧ - ن) (٤ + ن) \end{aligned}$$

$ن = ٤$ (مرفوضة $ن \neq ٤$)

إذن الحد الذي قيمته ١٣ هو الحد السابع، الحد الذي يليه مباشرة هو الحد الثامن

$$\therefore ح_n = ١٥ - ٢ - ٣ - ن - ١٥$$

$$ح_٨ = ٢٨ - ٣ - ٨ \times ٣ - ١٥ - ٢٤ - ٦٤ = ١٥ - ٢٤ - ٦٤ = ٣٩ - ٦٤ = ٢٥$$

مثال (٣): اشترى رجل دراجة كهربائية فدفع من ثمنها مبلغاً وتبقى من الثمن ٨٠٠٠٠٠٠ جنيته على أن يدفعه في صورة أقساط شهرية وفق الصيغة:

$$ح_n = (١,٠٠٥) ح_{ن-١} - ١٠٠٠٠٠٠ \text{ حيث } ن \leq ٢ \text{ والتي تمثل المبلغ المتبقي من}$$

ثمن الدراجة بعد $ن$ دفعية، جد قيمة المبلغ الذي سوف يتبقى من ثمنها بعد تسديد خمسة أقساط.

الحل: المبلغ المتبقي من ثمن الدراجة بعد الدفعة الأولى ٨٠٠٠٠٠٠ جنيته.

$$\therefore ح_١ = ٨٠٠٠٠٠٠$$

$$\text{عوض } ن = ٢$$

$$ح_٢ = (١,٠٠٥) (٨٠٠٠٠٠٠) - (١٠٠٠٠٠٠) = ٧٠٤٠٠٠٠ \text{ جنيته}$$

$$\text{عوض } ن = ٣$$

$$ح_٣ = (١,٠٠٥) (٧٠٤٠٠٠٠) - (١٠٠٠٠٠٠) = ٦٠٧٥٢٠ \text{ جنيته}$$

$$\text{عوض } ن = ٤$$

$$ح_٤ = (١,٠٠٥) (٦٠٧٥٢٠) - (١٠٠٠٠٠٠) = ٥١٠٥٥٧,٦ \text{ جنيته}$$

$$\text{عوض } ن = ٥$$

$$ح_٥ = (١,٠٠٥) (٥١٠٥٥٧,٦) - (١٠٠٠٠٠٠) = ٤١٣١١٠,٣٨٨ \text{ جنيته}$$

المبلغ المتبقي بعد تسديد خمسة أقساط ≈ ٤١٣٠٠٠ جنيته

تمرين (٨-٢)

١. جد رتبة الحد الذي قيمته ٢٥ في المتتالية $ح_n = ٣ - ٢$ وما قيمة الحد الذي ترتيبه ٥٨ في نفس المتتالية؟

٢. أكتب الحدود الخمسة الأولى والحد العاشر في كل من المتتاليات التالية:

$$(أ) ح_n = \frac{٤}{٢^n} \text{ لكل } n \leq ١$$

$$(ب) ح_n = ١ + (-١)^n$$

$$(ج) ح_n = ٤(n + ٢)$$

٣. أشتري رجل أثاث منزلي ثمنه ٦٠٠٠٠٠٠٠ جنيه ودفع ٢٠٠٠٠٠٠٠ جنيه مقدماً وبقي عليه ٤٠٠٠٠٠٠٠ جنيه ليسددها على أقساط شهرية متساوية قدرها ٥٠٠٠٠٠٠ جنيه كل شهر ويمكن التعبير عن المبلغ المتبقي بعد n شهر بالعلاقة:

$$ح_n = ٥٠٠٠٠٠٠ - ٤٠٠٠٠٠٠٠$$

(أ) ما قيمة المبلغ المتبقي بعد الشهر الخامس؟

(ب) متى يكمل الرجل سداد ثمن الأثاث المنزلي بالكامل؟

(ج) ما الذي يمثله العدد (٥٠٠٠٠٠) في العلاقة؟

٤. قرّرت طالبة جامعية أن تبدأ في ادخار مبلغ من المال شهرياً لتشتري هاتف محمول جديد في الشهر الأول ادخرت ١٠٠٠٠٠ جنيه وقررت أن يزيد المبلغ كل شهر بمقدار ٥٠٠٠٠ جنيه عن الشهر الذي قبله جد:

(أ) الحد النوني (الحد العام).

(ب) كم ستدخر الطالبة في الشهر السادس؟

(ج) إذا كان سعر الهاتف ١٠٠٥٠٠٠ جنيه ففي أي شهر ستشتري الطالبة الهاتف

المحمول؟

(٢-٨) الصيغة الارتدادية للمتتالية: Recursive formula of a sequence

تأمل نمط الدوائر في الأشكال أدناه:

					
١	٢	٣	٤	٥	٦

الشكل (١) يمثل دائرة واحدة، الشكل (٢) يمثل ثلاث دوائر، والشكل (٣) يمثل ٦ دوائر. كم عدد الدوائر في الأشكال (٤)، (٥)، (٦). ماذا تلاحظ؟ اعداد الدوائر في الاشكال على الترتيب تمثل متتالية هي: ١، ٣، ٦، ١٠، ١٥، ٢١ وأيضاً نلاحظ:

$$ح_١ = ١ ، ح_٢ = ٣ = ١ + ٢ ، ح_٣ = ٦ = ٣ + ٣$$

$$ح_٤ = ١٠ = ٦ + ٤ ، ح_٥ = ١٥ = ١٠ + ٥ ، ح_٦ = ٢١ = ١٥ + ٦$$

$$ح_٦ = ٢١ = ١٥ + ٦ ، ح_٥ = ١٥ = ١٠ + ٥ ، ح_٤ = ١٠ = ٦ + ٤$$

يمكن استنتاج العلاقة بين هذه الاعداد كما يلي:

$$ح_١ = ١ ، ح_٢ = ٣ ، ح_٣ = ٦ ، ح_٤ = ١٠ ، ح_٥ = ١٥ ، ح_٦ = ٢١$$

نلاحظ بعد تعيين قيمة الحد الأول للمتتالية، تمكناً من تحديد الحدود التالية ارتدادياً واستنتاج الصيغة التي تربطها والتي تسمى بالصيغة الارتدادية للمتتالية.

الصيغة الارتدادية للمتتالية:

هي تعبير عن المتتالية يربط الحد $ح_n$ بحد أو أكثر من الحدود التي تسبقه بشرط معلومية قيمة الحد الأول أو قيم لأكثر من حد.

مثال (١): جد الحدود الستة الأولى والحد الذي ترتيبه ١٠٠ في المتتالية المعرّفة بالصيغة الارتدادية:

$$ح_١ = ٣ ، ح_٢ = ٥ ، ح_٣ = ٨ ، ح_٤ = ١٢ ، ح_٥ = ١٧ ، ح_٦ = ٢٢$$

الحل: نبدأ بالحد الأول: $ح_1 = 3$ ومن ثم نوجد كلاً من الحدود اللاحقة بإضافة العدد 2 إلى قيمة الحد الذي يسبقه مباشرة.

$$\therefore ح_1 = 3, \quad ح_2 = 2 + 3 = 5$$

$$ح_3 = 2 + 5 = 7, \quad ح_4 = 2 + 7 = 9$$

$$ح_5 = 2 + 9 = 11, \quad ح_6 = 2 + 11 = 13$$

الحد المئة يقع بعد 99 حداً من الحد الأول ماذا يعني لك ذلك؟

يعني بإمكاننا معرفة قيمته مباشرة بإضافة العدد 2 تسعة وتسعون مرة إلى العدد 3.

$$\therefore ح_{100} = 3 + 99 \times 2 = 201$$

متتالية فيبوناتشي: 1، 1، 2، 3، 5، 8، 13، 21، ...

مثال (2): إذا كانت 1، 1، 2، 3، 5، 8، 13، 21 هي الحدود الأولى من متتالية فيبوناتشي، جد الصيغة الارتدادية لها ومن ثم جد $ح_{12}$.

الحل: $ح_1 = 1, ح_2 = 1, ح_3 = 2, ح_4 = 3, ح_5 = 5, ح_6 = 8$

ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن:

$$ح_3 = 1 + 1 = ح_1 + ح_2, \quad ح_4 = 2 + 1 = ح_2 + ح_3$$

$$ح_5 = 3 + 2 = ح_3 + ح_4, \quad ح_6 = 5 + 3 = ح_4 + ح_5$$

$$ح_7 = 8 + 5 = ح_5 + ح_6, \quad ح_8 = 13 + 8 = ح_6 + ح_7$$

أي أن كل حد من متتالية فيبوناتشي ينتج عن مجموع الحدين السابقين بدءاً من الحد الثالث.

يمكن استنتاج الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي.

$$ح_1 = 1, ح_2 = 1, \therefore ح_n = ح_{n-1} + ح_{n-2} \quad \text{لكل } n \leq 3$$

تحقق من فهمك: جد $ح_{12}$ ؟ علماً بأن $ح_{11} = 144$.

العلاقة الارتدادية تعكس كيفية بناء الأحداث اليومية على ما سبقها مباشرة وهذا ينطبق على المال، السكان، درجات الحرارة، ... وغيرها

مثال (٢): شحن رجل هاتفه في اليوم الأول برصيد قدره ٢٤٠ وحدة وفي نهاية كل يوم يستهلك من رصيده ٣٠ وحدة. ثم يحصل على ١٠ وحدات نقاط مكافأة تضاف تلقائياً إلى رصيده. جد الصيغة الارتدادية التي توجد بها المتتالية ومن ثم جد رصيده في اليوم السادس؟

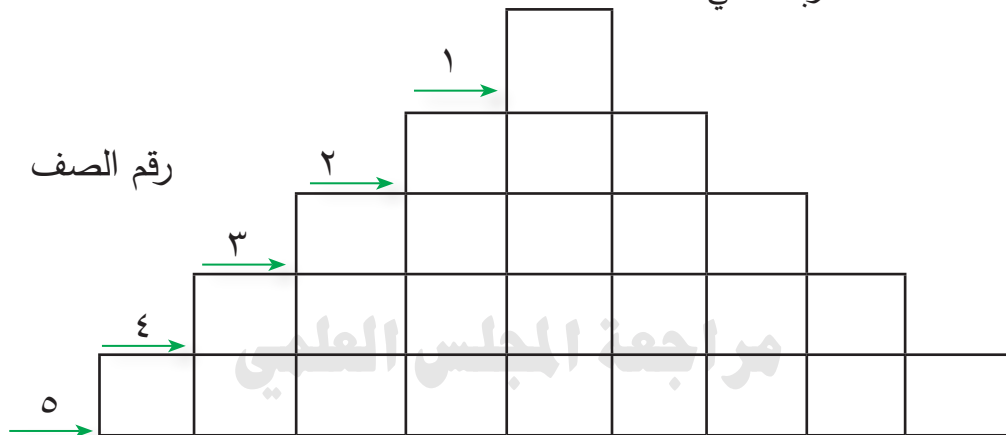
الحل:

$$\begin{aligned} & \text{ح}_1 = 240, \quad \text{ح}_2 = \text{ح}_1 - 30 + 10 = 220, \quad \text{ح}_3 = \text{ح}_2 - 30 + 10 = 200, \quad \text{ح}_4 = \text{ح}_3 - 30 + 10 = 180, \\ & \text{ح}_5 = \text{ح}_4 - 30 + 10 = 160, \quad \text{ح}_6 = \text{ح}_5 - 30 + 10 = 140. \\ & \therefore \text{رصيده في اليوم السادس} = 140 \text{ وحدة.} \end{aligned}$$

تمرين (٨-٢)

- جد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية التي:
 $\text{ح}_1 = 1, \quad \text{ح}_2 = 3, \quad \text{ح}_3 = 5, \quad \text{ح}_4 = 7, \quad \text{ح}_5 = 9, \quad \text{ح}_6 = 11, \quad \text{ح}_7 = 13, \quad \text{ح}_8 = 15, \quad \text{ح}_9 = 17, \quad \text{ح}_{10} = 19$
- جد تعريفاً ممكنًا بالصيغة الارتدادية للمتتالية: ١، ٥، ٩، ١٣، باحتساب الفرق بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة.
- ما الصيغة الارتدادية لمتتالية الأعداد الطبيعية $\text{ح}_n = n$
- حصلت طالبة في مهرجان الطلاب الإبداعي على مبلغ ١٠٠٠٠٠٠ جنيه ووضعت المبلغ في حسالة ووعدتها أمها بإعطائها ٥٠٠٠٠ جنيه إضافية كل شهر. هل تشكل المبالغ المتراكمة متتالية ما؟ ناقش الموضوع؟ وأكتب الحد العام والصيغة الارتدادية للمتتالية إن أمكن.

تأمل عدد المربعات في كل صف.



كم عدد المربعات في كل صف ؟

أنشيء جدولاً يبيّن عدد المربعات في كل صف .

رقم الصف	١	٢	٣	٤	٥
عدد المربعات في كل صف	١	٣	٥	٧	٩

لاحظ أن الفرق بين كل عدد من أعداد المربعات والعدد الذي يسبقه مباشرة ثابت، أي أن: $١ - ٣ = ٣ - ٥ = ٥ - ٧ = ٧ - ٩ = ٢$ هذا الفرق يُسمّى الفرق الثابت (ويُسمّى أيضاً الأساس) ويرمز له بالرمز d . ومتتالية الأعداد ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ... تسمى متتالية حسابية أكتب الصيغة الارتدادية لها؟

تعريف:

تكون المتتالية (ح_ن) متتالية حسابية إذا كان الفرق بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة ثابتاً، يُسمّى الفرق الثابت (ويُسمّى أيضاً الأساس) ويرمز له بالرمز d ، أي أن $ح_n - ح_{n-١} = d$ ويُعبّر عن الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية

$$\left. \begin{aligned} ح_١ &= أ \quad (\text{الحد الأول}) \\ ح_n &= ح_{n-١} + d \quad ٢ \leq n \end{aligned} \right\}$$

مثال (١): (أ) هل المتتالية: ٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٦، ... متتالية حسابية؟ إن كانت كذلك، أكتب الصيغة الارتدادية لها.

الحل: $د = ٧ - ٤ = ١٠ - ٧ = ١٣ - ١٠ = ١٦ - ١٣ = ٣$

الفرق ثابت بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة.
∴ المتتالية حسابية.

الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية هي:

$$\left. \begin{array}{l} ح_١ = ٤ \\ ح_٢ = ح_١ + ٣ \\ \vdots \\ ح_٢ = ح_١ + ٣ \end{array} \right\} = ح_٢$$

(ب) هل المتتالية ١، ٦، ١١، ١٦، ٢٠، ٢٤، ... متتالية حسابية؟ برر إجابتك .

مثال (٢): شكل هرمي مدرج ارتفاع كل درجة في الهرم تساوي ٢٦ سم تمثل المتتالية

ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ... ارتفاعات درجات الهرم عن سطح الأرض.
(أ) ما قيمة ح_١ ؟

(ب) هل هذه المتتالية حسابية؟ إن كانت كذلك، جد صيغتها الارتدادية؟

(ج) جد ارتفاع الدرجة الرابعة عن سطح الأرض.

الحل: (أ) ح_١ تمثل ارتفاع الدرجة الأولى = ح_١ = ٢٦ سم

(ب) الفرق بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة هو مقدار ارتفاع درجة واحدة ويساوي

٢٦ سم وهو ثابت . إذن تمثل متتالية حسابية

الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية هي:

$$\left. \begin{array}{l} ح_١ = ٢٦ \\ ح_٢ = ح_١ + ٢٦ \\ \vdots \\ ح_٢ = ح_١ + ٢٦ \end{array} \right\} = ح_٢$$

(ج) ح_١ = ٢٦ سم

ح_٢ = ح_١ + ٢٦ = ٢٦ + ٢٦ = ٥٢ سم ، ح_٣ = ح_٢ + ٢٦ = ٥٢ + ٢٦ = ٧٨ سم

ح_٤ = ح_٣ + ٢٦ = ٧٨ + ٢٦ = ١٠٤ سم ، إذن ارتفاع الدرجة الرابعة = ١٠٤ سم

الحد العام للمتتالية الحسابية:

عرفنا إن المتتالية الحسابية تُكتب بالصورة الارتدادية:

$$\left. \begin{array}{l} ح_1 = أ \\ ح_n = ح_{n-1} + د ، n \geq 2 \end{array} \right\}$$

حيث أ الحد الأول، د الأساس (الفرق الثابت) إذن:

$$\begin{aligned} ح_1 &= أ ، ح_2 = ح_1 + د = أ + د ، ح_3 = ح_2 + د = أ + د + د = أ + ٢د ، \\ ح_4 &= ح_3 + د = أ + د + د + د = أ + ٣د ، ح_5 = ح_4 + د = أ + ٤د ، \dots \end{aligned}$$

الحد العام للمتتالية الحسابية هو: $ح_n = أ + (ن - ١) د$
 حيث: أ: الحد الأول للمتتالية ، د: الفرق الثابت (الأساس)
 ن: رتبة الحد ، قيمة الحد الذي رتبته ن

مثال (١): جد قيمة الحد الثاني عشر في المتتالية الحسابية: ٩ ، ١٦ ، ٢٣ ، ٣٠ ، ...

الحل: $أ = ٩$ ، $د = ١٦ - ٩ = ٧$ ، $ح_n = أ + (ن - ١) د$
 $ح_{١٢} = ٩ + (١٢ - ١) ٧ = ٨٦$

تحقق من فهمك : جد قيمة الحد المطلوب في كل من المتتاليتين الحسابيتين الآتيتين:

(أ) $ح_n$ علماً بأن $أ = -٤$ ، $د = ٦$ ، $٩ = ح_n$

(ب) $ح_٢$ علماً بأن $أ = ١٥$ ، $د = -٨$

مثال (٢): اكتب الحد النوني للمتتالية الحسابية في كل مما يأتي:

(أ) ٥ ، -١٣ ، -٣١ ، ، (ب) $ح_٦ = ١٩$ ، $د = ٦$

الحل: (أ) $أ = ٥$ ، $د = -١٣ - ٥ = -١٨$

$ح_n = أ + (ن - ١) د$ ، $ح_n = ٥ + (ن - ١) (-١٨)$

$ح_n = ٥ - ١٨ن + ١٨$ ، $ح_n = ١٣ - ١٨ن$

(ب) $ح_n = أ + (ن - ١) د$ ، $١٩ = أ + (٦ - ١) د$

$١٩ = أ + ٥د$ ، $٥ = أ$ ، $٥ = أ$

$ح_n = أ + (ن - ١) د$ ، $ح_n = ٥ + (ن - ١) ٦$

$ح_n = ٥ + ٦ن - ٦$ ، $ح_n = ١١ + ٦ن$

تحقق من فهمك. ١. ١٢ ، ٣ ، -٦ ، [$ح_n = ٩ - ٢١ن$ ، (لماذا)]

٢. $ح_١٢ = ١٢$ ، $د = ٨$ [$ح_n = ٨ - ٣٦ن$ ، (لماذا)]

مثال (٣): استأجر رجل دراجة نارية داخل إحدى مدن السودان، كانت تكلفة الاستئجار في اليوم الأول ٥٠٠٠ جنيه سوداني، وتزداد التكلفة يومياً. يوضح الجدول الآتي تكلفة الاستئجار حسب عدد الأيام.

أيام الاستئجار	١	٢	٣	٤	٥
تكلفة الاستئجار (بالجنيه السوداني)	٥٠٠٠	٧٠٠٠	٩٠٠٠	١١٠٠٠	١٣٠٠٠

(أ) هل تمثل تكلفة الاستئجار في الجدول متتالية حسابية؟ علل إجابتك.

(ب) اكتب الحد العام (الحد النوني).

(ج) احسب تكلفة الاستئجار لليوم السابع.

الحل: (أ) نحسب الفرق بين كل حدين متتالين (الأساس = د)

$$\therefore د = ٥٠٠٠ - ٧٠٠٠ = ٢٠٠٠ \text{ جنيه سوداني.}$$

$$د = ٧٠٠٠ - ٩٠٠٠ = ٢٠٠٠ \text{ جنيه سوداني.}$$

$$د = ٩٠٠٠ - ١١٠٠٠ = ٢٠٠٠ \text{ جنيه سوداني.}$$

$$د = ١١٠٠٠ - ١٣٠٠٠ = ٢٠٠٠ \text{ جنيه سوداني.}$$

بما أن الفرق ثابت.

إذن تكلفة الاستئجار تمثل متتالية حسابية.

(ب) الحد النوني للمتتالية الحسابية هو:

$$ح_n = أ + (ن - ١) د$$

$$ح_n = ٥٠٠٠ + (ن - ١) (٢٠٠٠) ، \quad ح_n = ٥٠٠٠ + ٢٠٠٠ ن - ٢٠٠٠$$

$$ح_n = ٣٠٠٠ + ٢٠٠٠ ن$$

(ج) تكلفة الاستئجار لليوم السابع.

$$ح_٧ = أ + ٦ د ، \quad ح_٧ = ٥٠٠٠ + ٦ \times ٢٠٠٠ ، \therefore ح_٧ = ١٧٠٠٠ \text{ جنيه سوداني.}$$

$\therefore$ تكلفة الاستئجار لليوم السابع تساوي ١٧٠٠٠ جنيه سوداني.

الأوساط الحسابية:

مثال (٤): جد الأوساط الحسابية في المتتالية -٨ ، ، ، ، ٢٢

الحل: بين الحد الأول والحد الأخير توجد ٤ حدود

$$\therefore ن = ٢ + ٤ = ٦ \text{ حدود ، } أ = -٨ ، \quad ح_n = ٢٢$$

$$\text{ح} = \text{أ} + (\text{ن} - 1) \text{ د} = 22 ، \quad \text{د} = 6 \quad \text{أ} = 30 ، \quad \text{د} = 6$$

الأوساط هي: ١٦ ، ١٠ ، ٤ ، ٢ -

تمرين (٤-٨)

١. جد الحد الأول والأساس والحد الرابع لكل من المتتاليات الحسابية التالية:
 - (أ) ٤ ، ١٠ ، ١٦ ، ... (ب) ١٠ ، ٧ ، ٤ ، ...
 - (ج) ١١ ، ٥ ، ١٠ ، ٨ ، ...
٢. جد الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية ٢ ، ٥ ، ١٢ ، ... ثم جد حدها السادس.
٣. جد عدد حدود المتتالية الحسابية ٦ ، ٢ ، ٢ ، ... ، ١٩٤ .
٤. جد الحد العام لمتتالية الأعداد الصحيحة الفردية.
٥. جد الحد العام لمتتالية الأعداد الصحيحة الزوجية.
٦. جد الحد العام للمتتالية الحسابية ٢ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، ...
٧. جد الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول يساوي ١٣ وحدها السابع يساوي ٢٣ .
٨. جد الحد العشرين في المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٤ وحدها الثالث ١٦ .
٩. جد رتبة أول حد سالب في المتتالية ١٧٠ ، ١٦١ ، ١٥٢ ، ...
١٠. متتالية حسابية حدها الرابع يساوي ٥ ومجموع حديها الثالث والثامن يساوي ١ جد حدها الخامس عشر.
١١. إذا كان أول حدين في متتالية حسابية هما العددان ٢ و ٨ جد حدها الرابع.
١٢. أدخل ستة حدود بين ٢ ، ٢٣ بحيث تكون متتالية حسابية.
١٣. إذا كان الحد الأول لمتتالية حسابية هو العدد ٢ والحد ٣٠ هو العدد ١٤٧ فهل العدد ٩٩٥ أحد حدود هذه المتتالية، إذا كان كذلك ما موقعه فيها؟
١٤. إذا كانت أ ، ب ، ج حدود متتابعة في متتالية حسابية أثبت أن $\frac{أ + ج}{٢} = ب$
١٥. متتالية حسابية مجموع حديها الثاني والسادس يساوي ٣ ، مجموع حديها الخامس والتاسع يساوي ١٨ كون المتتالية ؟
١٦. إذا كوّنت أ ، ب ، ج متتالية حسابية فاثبت أن $ب + ج ، ج + أ ، أ + ب$ تكون متتالية حسابية.

Sum of an Arithmetic Series

(٨-٥) مجموع المتتالية الحسابية:

في المتتالية الحسابية ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ نلاحظ أن:

$$\text{مجموع الحدين الأول والسادس} = ١٣ + ٣ = ١٦$$

$$\text{مجموع الحدين الثاني والخامس} = ١١ + ٥ = ١٦$$

$$\text{مجموع الحدين الثالث والرابع} = ٩ + ٧ = ١٦$$

وإذا كتبنا المتتالية مبتدئة بالحد الأخير ومنتهية بالحد الأول تحت المتتالية الأصلية كما يأتي:

٣	٥	٧	٩	١١	١٣
١٣	١١	٩	٧	٥	٣

نلاحظ أن مجموع كل حدين متقابلين $١٦ =$

أي يساوي الحد الأول + الحد الأخير.

قوانين مجموع المتتالية الحسابية:

المتتالية الحسابية هي: أ ، أ + د ، أ + ٢د ، أ + ٣د ، ... إلى ن من الحدود،

فإذا رمزنا للحد الأخير بالرمز ل وللمجموع المتتالية بالرمز ج_ن :

$$(١) \quad \text{ج}_ن = أ + (أ + د) + (أ + ٢د) + \dots + (أ + (ن-١)د) + ل$$

وبكتابة الطرف الأيسر من المعادلة (١) معكوساً :

$$(٢) \quad \text{ج}_ن = ل + (أ + د) + (أ + ٢د) + \dots + (أ + (ن-١)د) + أ$$

بجمع المعادلتين (١) ، (٢) :

$$\text{ج}_ن + \text{ج}_ن = (أ + ل) + (أ + ل) + \dots + (أ + ل) + (أ + ل) = ن(أ + ل)$$

$$(١) \quad \text{ج}_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$$

بما أن ل = ح_ن = أ + (ن - ١)د ، فبالتعويض عن ل في القانون (١)

$$\text{ج}_ن = \frac{ن}{٢} (أ + أ + (ن - ١)د)$$

$$(٢) \quad \text{ج}_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١)د]$$

ملاحظات:

١. القانون الأول يعطينا مجموع المتتالية الحسابية (ج_ن) بدلالة الحد الأول والحد الأخير وعدد الحدود.

٢. القانون الثاني يعطينا مجموع المتتالية الحسابية (ج_ن) بدلالة الحد الأول والأساس وعدد الحدود.

٣. كل من القانون (١) والقانون (٢) يحتوي على ٤ مجاهيل فإذا علم ثلاثة منها في أي قانون أمكن معرفة الرابع.

مثال (١): جد مجموع المتتالية الحسابية التي حدها الأول = ٥، وحدها الأخير = ١٧، عدد حدودها = ٧.

الحل: أ = ٥ ، ل = ١٧ ، ن = ٧ ، ج_ن = ؟

$$ج_n = \frac{n}{2} (أ + ل) ، ج_v = \frac{v}{2} (١٧ + ٥) = \frac{v}{2} \times ٢٢ = ١١v$$

مثال (٢): جد مجموع المتتالية الحسابية ٢٠ ، ١٦ ، ١٢ ، ... إلى ١٢ حداً.

الحل: أ = ٢٠ ، د = ١٦ - ٢٠ = -٤ ، ن = ١٢ ، ج_ن = ؟

$$ج_n = \frac{n}{2} [أ + (١ - ن) د]$$

$$ج_{١٢} = \frac{١٢}{2} [٢٠ + (١ - ١٢) (-٤)] = ٦ [٢٠ - ٤٠] = ٦ [-٢٠] = -١٢٠$$

مثال (٣): حنفية (ماسورة) تصب الماء في حوض بمعدل ٤٠ لتر في الساعة ثم بعد

ساعة أخذت تصب فيه بزيادة ٣ لترات في كل ساعة عن الساعة السابقة لها فبعد كم ساعة يكون بالحوض ٤٠٤ لتراً؟

الحل: أ = ٤٠ ، د = ٣ ، ج_ن = ٤٠٤ ، ن = ؟

$$ج_n = \frac{n}{2} [أ + (١ - ن) د] ، ٤٠٤ = \frac{n}{2} [٤٠ + (١ - ن) ٣]$$

$$٨٠٨ = n [٣٧ + ن] ، ٨٠٨ = ٣٧ن + ٣$$

$$٨٠٨ - ٣٧ن = ٣ ، (٨٠٨ - ٣٧ن) / ٣ = ١$$

$$ن = \frac{٨٠٨ - ٣٧ن}{٣} \text{ (مرفوضة لماذا؟) ،}$$

∴ ن = ٨ ∴ بعد ٨ ساعات يكون بالحوض ٤٠٤ لتر

تمارين (٨-٥)

١. جد مجموع المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٤ ، وحدها الأخير ٢٥ ، عدد حدودها ٨ .
٢. جد مجموع المتتالية الحسابية ٥ ، ٧ ، ٩ ، ... إلى ٩ حدود.
٣. جد مجموع المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٢ وأساسها ٣ ، عدد حدودها ٢٠ .
٤. جد مجموع المتتالية الحسابية التي حدها الأول = ٤ وحدها السادس = ١٩ ، عدد حدودها = ١٥
٥. كم حداً يلزم أخذه من المتتالية ١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ... ابتداءً من الحد الأول ليكون مجموعها ٣٦ ثم فسر معني الجوابين؟
٦. جد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتالية ٣٢ ، ٢٩ ، ٢٦ ، ... ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالباً.
٧. إذا كوَّنت ٥، س ، ، ٣ س ، ٢٣ متتالية حسابية جد قيمة س ومجموع المتتالية.
٨. أثبت أن
$$2 = \frac{3 + 5 + 7 + \dots \text{ إلى } n \text{ حداً}}{4 + 8 + 12 + \dots \text{ إلى } n \text{ حداً}}$$
٩. في أحد السباقات المدرسية وضعت ٢٠ كرة صغيرة في خط مستقيم واحد وكان البعد بين كل كرة والتي تليها ٤ أمتار. وضعت سلة على نفس المستقيم على بعد ٧ أمتار من أقرب كرة. على المتسابق أن يجمع الكرات واحدة تلو الأخرى في السلة دون تحريك السلة مبتدئاً من موقع السلة. جد المسافة التي يقطعها المتسابق الذي يجمع كل الكرات.
١٠. إذا كان حفر الخمسة أقدام الأولى من بئر يكلف ٤٠٠٠٠ جنيه والخمسة أقدام التالية لها تكلف ٥٠٠٠٠ جنيه والخمسة أقدام التالية تكلف ٦٠٠٠٠ جنيه وهكذا. كم يكلف حفر بئر عمقها ٢٠٠ قدم.

Geometric Sequences

(٦-٨) المتتاليات الهندسية:

يقدم أحد المتاجر برنامج مكافآت لعملائه يعتمد على نوعين من النقاط كما يلي:

العرض أ	العرض ب
١٠ نقاط اليوم الأول الأيام القادمة = $2 \times$ عدد نقاط اليوم السابق	نقطة واحدة اليوم الأول الأيام القادمة = $3 \times$ عدد نقاط اليوم السابق

في أي يوم سيكون عدد النقاط في العرض ب أكبر من عدد النقاط في العرض أ ؟
عدد النقاط في اليوم الأول وفق العرض أ هو ١٠ نقاط وفي اليوم الثاني $20 = 10 \times 2$
وفي اليوم الثالث $40 = 20 \times 2$ وهكذا يمكن الحصول على المتتالية التي حدودها

$$1, 10 = 1 \times 10, 20 = 2 \times 10, 40 = 4 \times 10$$

جد قيمة ح، ح، ح، ح، ح ؟

عدد النقاط في اليوم الأول وفق العرض ب هو نقطة واحدة وفي اليوم الثاني $3 \times 1 = 3$
وفي اليوم الثالث $3 \times 3 = 9$ المتتالية هي

$$1, 1 = 1 \times 1, 3 = 3 \times 1, 9 = 9 \times 1$$

جد قيمة ح، ح، ح، ح، ح ؟

- أيهما أكبر في اليوم السادس عدد النقاط وفق العرض أ أم نقاط العرض ب ؟

- قارن في اليوم السابع بين عدد نقاط العرض أ والعرض ب ؟

- نمط تطور الحدود في المتتالية ب أكبر من نمط تطور الحدود في المتتالية أ ؟ لماذا ؟

المتتاليتين أ ، ب أعلاه مثلاً على المتتالية الهندسية وهو نوع من المتتاليات يكون فيها نسبة كل حد على الحد الذي يسبقه مباشرة تساوي مقداراً ثابتاً يُسمى النسبة الثابتة ويرمز

لها بالرمز (ر)

ففي المتتالية أ تكون النسبة الثابتة هي: $2 = \frac{20}{10} = 2$ ، $2 = \frac{40}{20} = 2$ ، $2 = \frac{80}{40} = 2$

المتتالية ب تكون النسبة الثابتة هي: $3 = \frac{3}{1} = 3$ ، $3 = \frac{9}{3} = 3$ ، $3 = \frac{27}{9} = 3$

يمكن الحصول على الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية عن طريق كتابة الحد ح في

صورة ناتج ضرب الحد الذي يسبقه ح_{ن-١} في النسبة الثابتة (الأساس) ر .

تعريف:

تكون المتتالية (ح_ن) هندسية إذا كانت النسبة بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة ثابتة، وتسمى النسبة الثابتة (الأساس) ويرمز لها بالرمز ر أي أن $r = \frac{ح_n}{ح_{n-1}}$ ، $ح_n \neq 0$ ، صفر

الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية

$$\left. \begin{aligned} ح_n &= ح_1 \times r^{n-1} \\ (الحد الأول) \end{aligned} \right\} \quad 2 \leq n$$

مثال (١): هل المتتالية: ٤ ، ١٢ ، ٣٦ ، ١٠٨ ، ... هندسية ؟

إذا كانت كذلك، أكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية ثم جد حدها الخامس؟
الحل: لاحظ العلاقة بين كل حدين متتالين في المتتالية: $\frac{12}{4} = \frac{36}{12} = \frac{108}{36} = 3$

بما أن النسبة بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة ثابتة.
إذن المتتالية هندسية.

الحد الأول = أ = ٤ ، الأساس = ر = ٣

الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية هي:

$$\left. \begin{aligned} ح_n &= ح_1 \times r^{n-1} \\ 4 &= أ \end{aligned} \right\} \quad 2 \leq n$$

لإيجاد الحد الخامس، نضرب الحد الرابع في النسبة الثابتة (الأساس).

$$\therefore ح_5 = 108 \times 3 = 324$$

مثال (٢): يتضاعف عدد متابعي أحد مواقع التواصل الاجتماعي كل أسبوع، فإذا

كان لديه ٨ متابعين في الأسبوع الأول حيث تمثل المتتالية ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، عدد المتابعين المتوقع كل أسبوع.

(أ) هل هذه المتتالية هندسية؟ إذا كانت كذلك، جد صيغتها الارتدادية .

(ب) جد عدد متابعي الموقع في الأسبوع السادس.

الحل: (أ) بما أن عدد المتابعين يتضاعف كل أسبوع.

$$\text{إذن } ح_n = 2 \times ح_{n-1} \text{ ، أي أن } 2 = \frac{ح_n}{ح_{n-1}}$$

النسبة بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة ثابتة وتساوي ٢

$$\therefore \text{المتتالية هندسية، } ح_1 = 8 \text{ ، } ر = 2$$

الصيغة الارتدادية:

$$\left. \begin{aligned} 8 &= 1 \\ 2 &\leq n \end{aligned} \right\} = \text{ح}_n$$

$$\begin{aligned} \text{(ب) عوض} \quad 32 &= 16 \times 2 = \text{ح}_2 = \text{ح}_3, \quad 16 = 8 \times 2 = \text{ح}_2 = \text{ح}_4 \\ \text{ح}_4 &= \text{ح}_5 = 64 = 32 \times 2 = \text{ح}_5 = \text{ح}_6 \\ 128 &= 64 \times 2 = \text{ح}_6 = \text{ح}_7 \end{aligned}$$

∴ عدد متابعي الموقع في الأسبوع السادس هو 256 متابعاً

الحد العام للمتتالية الهندسية:

كل متتالية هندسية صيغتها الارتدادية هي:

$$\left. \begin{aligned} \text{ح}_1 &= \text{أ} \\ \text{ح}_n &= \text{ح}_{n-1} \times \text{ر} \end{aligned} \right\} \quad 2 \leq n$$

∴ حيث أن أ الحد الأول ، ر النسبة الثابتة

إذن $\text{ح}_1 = \text{أ}$

$$\begin{aligned} \text{ح}_2 &= \text{ح}_1 \times \text{ر} = \text{أ} \times \text{ر} = \text{ح}_2 \\ \text{ح}_3 &= \text{ح}_2 \times \text{ر} = \text{أ} \times \text{ر}^2 = \text{ح}_3 \end{aligned}$$

نلاحظ أن أس (ر) في أي حد من حدود المتتالية ينقص واحد، عن ترتيب هذا الحد .

$$\text{ح}_1 = \text{أ} \times \text{ر}^0 \text{ لماذا ؟}$$

الحد العام للمتتالية الهندسية:

$$\text{ح}_n = \text{أ} \times \text{ر}^{n-1}$$

حيث أ : الحد الأول للمتتالية ، ر : النسبة الثابتة (الأساس)

ن : رتبة الحد ، ح_n : الحد الذي ترتيبه ن

يُسمى ح_n بالحد النوني أو الحد العام في المتتالية الهندسية وإذا كان عدد حدود المتتالية

الهندسية ن فإن حدها الأخير هو ح_n ويرمز له عادة بالرمز ل وعلى ذلك يكون

$$\text{ل} = \text{ح}_n = \text{أ} \times \text{ر}^{n-1}$$

مثال (٢): أوجد الحد العاشر من المتتالية ٦٤ ، -٣٢ ، ١٦ ، ...

$$\text{الحل:} \quad \text{أ} = 64 = \text{ح}_1, \quad \text{ر} = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ح}_n = \text{أ} \times \text{ر}^{n-1} = \text{ح}_1 \times \text{ر}^{n-1} = 64 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

الوسط الهندسي بين هـدين :

إذا كُوت أ ، ب ، ج متتالية هندسية فإن ب يُسمّى الوسط الهندسي بين أ ، ج أو الوسط المتناسب بينهما: بما أن أ ، ب ، ج متتالية هندسية إذن $\frac{ب}{أ} = \frac{ج}{ب}$ (النسبة الثابتة) ، $\therefore ب^2 = أ \times ج$

$$\therefore \sqrt{\frac{ب}{أ}} = \sqrt{\frac{ج}{ب}} \quad \therefore \sqrt{\frac{ب}{أ}} + \sqrt{\frac{ج}{ب}} = ب \quad ، \quad \sqrt{\frac{ب}{أ}} - \sqrt{\frac{ج}{ب}} = ب$$

مثال (٤): أدخل ٤ أوساط هندسية بين ٢٢٤ ، ٧

الحل: عدد الأوساط = ٤ ، عدد الحدود = ن = ٤ + ٢ = ٦
 $٢٢٤ = أ$ ، $٧ = ح$ ، بما أن $ح = أ ر^{٦-١}$ ، $٧ = ٢٢٤ ر^٥$
 $\therefore ر^٥ = \frac{٧}{٢٢٤} = \frac{١}{٣٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^٥$ ، $\therefore ر = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ المتتالية هي ٢٢٤ ، ١١٢ ، ٥٦ ، ٢٨ ، ١٤ ، ٧

$\therefore$ الأوساط هي ١١٢ ، ٥٦ ، ٢٨ ، ١٤

تمرين (٨-٦)

١. متتالية هندسية حدها الأول ٣ ، حدها السادس ٩٦ فما أساس هذه المتتالية؟
٢. جد الحد الثامن للمتتالية الهندسية التي حدها الأول = ٢ س والنسبة الثابتة (الأساس) = ٢ س
٣. ما رتبة الحد الذي قيمته = $\frac{٣٢}{٢٧}$ من المتتالية ٩ ، -٦ ، ٤ ، ...
٤. إذا كانت س - ٦ ، س ، س + ١٨ هي الحدود الثلاثة الأولى من متتالية هندسية فما قيمة س وما حدها السابع؟
٥. إذا كان الحد النوني من متتالية هو $٣ \times ٢^{٥-١}$ جد هذه المتتالية وأثبت أنها متتالية هندسية ثم جد قيمة حدها الثامن.
٦. إذا كانت نسبة الحد النوني إلى الحد السيني في متتالية هندسية أساسها $\frac{٢}{٣}$ هي $\frac{٨}{٢٧}$ أثبت أن ن = س + ٣
٧. متتالية هندسية حدها الخامس ٩٦ وحدها الثامن ٧٦٨ جد حدها الأول والأساس ثم اكتب المتتالية.

٨. مجموع الحدين الأول والثاني من متتالية هندسية ١٢، مجموع الحدين الأول والرابع ٨٤ جد المتتالية.

٩. ثلاثة أعداد تكون متتالية هندسية حاصل ضربها ٢١٦، مجموعها ١٩ جد الأعداد.

١٠. عدنان موجب الفرق بينهما ٥ ووسطهما الهندسي = ٦ جد العدنان.

١١. وجدت طالبة موضوعاً عن العلاج بالأعشاب، قامت بإرساله إلى خمس من صديقاتها عن طريق الواتساب، ومن ثم قامت كل واحدة منهن بإرسال الموضوع إلى خمس صديقات أخريات، وهكذا قامت كل من استملت الرسالة بإرسالها إلى خمس صديقات جدد. إذا استمر إرسال الموضوع بهذا النمط، فما عدد الشخصيات التي يصلها هذا الموضوع في المرحلة الثامنة؟

تحقق من فهمك جد الثمانية حدود الأولى من المتتالية بالضرب في أساس المتتالية.

مراجعة المجلس العلمي

Sum of a Geometric Series

(٧-٨) مجموع المتتالية الهندسية:

لإيجاد المجموع (ج_ن) لمتتالية هندسية حدها الأول (أ) وأساسها (نسبتها الثابتة) (ر)، عدد حدودها (ن) نجد أن

$$(١) \quad ج_n = أ + أر + أر^2 + أر^3 + \dots + أر^{n-1}$$

نضرب في ر (أساس المتتالية)

$$(٢) \quad ر ج_n = أر + أر^2 + أر^3 + \dots + أر^n$$

أطرح (١) من (٢)

$$ج_n - ر ج_n = أ - أر^n \quad \therefore ج_n (١ - ر) = أ (١ - ر^n)$$

$$(١) \quad ج_n = \frac{أ (١ - ر^n)}{١ - ر}, \quad ر \neq ١$$

بضرب كل من حدي الكسر في (١-)

$$(٢) \quad ج_n = \frac{أ (١ - ر^n)}{١ - ر}, \quad ر \neq ١$$

ويستحسن استخدام القانون (١) إذا كانت $١ < ر$ والقانون (٢) إذا كانت $١ > ر$

$$ج_n = \frac{أ (١ - ر^n)}{١ - ر} = \frac{أ (١ - ر^n)}{١ - ر}, \quad ر \neq ١$$

إذا كان $١ = ر$ فهذا يعني أن حدود المتتالية كلها متساوية (تساوي أ)

$$\therefore ج_n = أن, \quad ١ = ر$$

مثال (١): جد مجموع السبعة حدود الأولى من المتتالية ٢، ٤، ٨، ...

الحل: أ = ٢، ر = ٢، ن = ٧، ج_ن = ؟

بما أن $١ < ر$ ، إذن $ج_n = \frac{أ (١ - ر^n)}{١ - ر}$

$$ج_٧ = \frac{٢ (١ - ٢^٧)}{١ - ٢} = ٢ (١٢٨ - ١) = ٢٥٤$$

مجموع المتتالية الهندسية إذا علم حدها الأخير:

القانونان السابقان يستخدمان إذا علم من المتتالية الهندسية حدها الأول والأساس وعدد الحدود ولكن إذا لم يذكر عدد الحدود وذكر بدلاً منها الحد الأخير (ل). كيف نوجد مجموعها؟

بما أن $ل = ح$ ، $أ ر^{ن-1} = ل$ ، نضرب الطرفين في الأساس (ر)
 إذن $ل ر = أ ر^n$ ، بما أن $ج_n = أ (1 - ر^n)$ ، $ج_n = \frac{أ ر^n - أ}{1 - ر}$
 نعوض ل ر بدلاً عن $أ ر^n$.

$$(3) \quad ج_n = \frac{ل ر - أ}{1 - ر} ، \quad 1 \neq ر$$

بضرب كل من حدي الكسر في (-1)

$$(4) \quad ج_n = \frac{أ - ل ر}{1 - ر} ، \quad 1 \neq ر$$

ويستحسن استخدام القانون (3) إذا كانت $ر < 1$ والقانون (4) إذا كانت $ر > 1$

$$\therefore ج_n = \frac{ل ر - أ}{1 - ر} = \frac{أ - ل ر}{1 - ر} ، \quad 1 \neq ر$$

مثال (2): متتالية هندسية حدها الأول 15 وحدها الأخير 240 وأساسها 2 جد مجموعها؟

$$\text{الحل: } أ = 15 ، ل = 240 ، ر = 2 ، ج_n ؟ \quad \text{بما أن } ر < 1$$

$$\therefore ج_n = \frac{ل ر - أ}{1 - ر} = \frac{240 \times 2 - 15}{1 - 2} = 465$$

مثال (2): إذا كان مجموع حدود متتالية هندسية = 364 وحدها الأول = 243 وحدها الأخير = 1 جد المتتالية؟

$$\text{الحل: } ج_n = 364 ، أ = 243 ، ل = 1$$

$$\text{بما أن } ج_n = \frac{ل ر - أ}{1 - ر} ، \quad \frac{243 - ر}{1 - ر} = 364$$

$$\begin{aligned}
 243 - r &= 364 - r \quad , \quad 243 - r = (1 - r) \cdot 364 \\
 \frac{1}{3} &= \frac{121}{363} = r \quad \therefore \quad , \quad 121 = r \cdot 363 \\
 &\dots , 27 , 81 , 243 \text{ المتتالية هي:}
 \end{aligned}$$

نشاط :

اعد الحل باستخدام القاعدة التي يكون فيها $r > 1$ وقارن الإجابتين ماذا تلاحظ ؟

مثال (٤): قرر رجل أن يبدأ الادخار بمبلغ ١٠٠٠٠٠٠ جنيه في الشهر الأول، على أن يزيد مبلغ الادخار كل شهر بنسبة ٢٠٪ عن الشهر السابق، احسب مقدار ما يدّخره في الشهر السادس، وما يدّخره خلال ستة شهور؟

الحل: $100000 = A$ ، $r = 1 + 0,2 = 1,2$ (الأساس) ، $n = 6$
مبالغ الادخار شهرياً:

١٠٠٠٠٠ ، ١٢٠٠٠٠ ، ١٤٤٠٠٠ ، ١٧٢٨٠٠ ، ٢٠٧٣٦٠ ، ٢٤٨٨٣٢

الزيادة $\neq$ النسبة الثابتة

النسبة الثابتة $= r =$ نسبة الزيادة $= 1 + 0,2 = 1,2$

بما أن النسبة ثابتة إذن المتتالية هندسية.

$$A_n = A \cdot r^{n-1}$$

$$A_6 = 100000 \times (1,2)^5 = 2,48832 \times 100000 = 248832$$

∴ المبلغ المدّخر في الشهر السادس = ٢٤٨٨٣٢ جنيه

$$A_n = \frac{A(1 - r^n)}{1 - r} \quad , \quad J_6 = \frac{[1 - (1,2)^6] \cdot 100000}{1 - 1,2} = 992992$$

∴ المبلغ المدّخر خلال ستة شهور = ٩٩٢٩٩٢ جنيه

١. جد مجموع ٦ حدود من المتتالية ٣، ٦، ١٢، ...
٢. جد مجموع ٨ حدود من المتتالية ٢، -٦، ١٨، ...
٣. الحد الأول من متتالية هندسية = ١، الحد الأخير = ٦٤، مجموع حدودها = ٨٥ جد أساسها.
٤. مجموع حدود متتالية هندسية ٣٩٠٥، حدها الأخير ٣١٢٥، أساسها = ٥، جد حدها الأول وما عدد حدودها؟
٥. إذا كان مجموع الستة حدود الأولى من متتالية هندسية يساوي ٩ أمثال مجموع الثلاثة حدود الأولى منها فإذا كان الحد العاشر فيها - ٦٤ جد المتتالية؟
٦. كم حداً يلزم أخذه من المتتالية ٣، ٦، ١٢، ... ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع مساوياً ٩٣ ؟
٧. جد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذها من المتتالية ٣، ٦، ١٢، ... ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع أكبر من ٣٠٠
٨. أثبت أن
$$3 = \frac{3 + 6 + 12 + \dots + 2n \text{ من الحدود}}{3 + 12 + 48 + \dots + n \text{ من الحدود}}$$
٩. جد مجموع السبعة حدود الأولى من المتتالية التي حدها النوني $\frac{3}{4} (2 - 1)^n$.
١٠. متتالية هندسية مجموع الأربعة حدود الأولى منها يساوي ٦٠ و مجموع الأربعة حدود التالية منها يساوي ٩٦٠ جد المتتالية.
١١. كم حداً يلزم أخذه من المتتالية الهندسية ٤، -١٢، ٣٦، ... ليكون المجموع ٢١٨٨
١٢. افترض أن عدد السكان في منطقة ما يزداد سنوياً بنسبة ثابتة قدرها ٢٠٪ و كان عدد السكان في السنة الأولى ١٠٠٠٠ نسمة . افترض أن كمية الغذاء المتاحة تكفي السنة الأولى ١٢٠٠٠ نسمة و تزداد سنوياً بمقدار ثابت قدرة ١٠٠٠ وحدة غذائية:

(أ) اكتب الحد العام لمتتالية عدد السكان و حدد نوع المتتالية .

(ب) اكتب الحد العام لمتتالية الغذاء و حدد نوع المتتالية.

(ج) أكمل الجدول أدناه والذي يوضح عدد السكان و الغذاء المتاح خلال الخمسة سنوات الأولى.

السنة	عدد السكان (ح ن)	الغذاء (ح ن)
١		
٢		
٣		
٤		
٥		

- (د) حدد السنة التي يبدأ فيها عدد السكان يتجاوز كمية الغذاء المتاحة.
- (هـ) كم عدد السكان الكلي بعد ٥ سنوات وكم مجموع وحدات الغذاء فيها ؟
- (و) اقترح توماس مالتوس الحد من التزايد السكاني هل توافقه على ذلك؟ وهل هناك تعارض بين نظرية مالتوس و قوله تعالى: (وَفِي السَّمَاءِ رِزْقُكُمْ وَمَا تُوعَدُونَ * فَوَرَبَّ السَّمَاءِ وَالْأَرْضِ إِنَّهُ لَحَقُّ مِثْلَ مَا أَنْكُمْ تَنْطِقُونَ) ، سورة الذاريات الآيتان (٢٢-٢٣).

مراجعة المجلس العلمي

(٨-٨) المتتاليات الهندسية اللانهائية : Infinite Geometric Sequences

تسمى المتتالية الهندسية التي يزداد عدد حدودها إلى ما لا نهاية متتالية هندسية لا نهائية و إذا كان أساس هذه المتتاليات كسراً حقيقياً (أي كسر بسطه أصغر من مقامه) سميت متتالية هندسية لا نهائية تنازلية يمكن إيجاد مجموعها. أما إذا كان أساس المتتالية الهندسية اللانهائية أكبر من ١ أو يساوي الواحد الصحيح عددياً لا يمكن إيجاد مجموعها إلى ما لا نهاية لها من الحدود.

مجموع المتتالية الهندسية اللانهائية التنازلية:

نفرض ان المتتالية هي أ ، أر ، أر^٢ ، أر^٣ ، ... (ر > ١ عددياً)

$$ج_n = \frac{أ(١-ر^n)}{١-ر} = \frac{أ-أر^n}{١-ر} = \frac{أ}{١-ر} - \frac{أر^n}{١-ر}$$

رⁿ تصغر كلما زادت ن وتبعاً لذلك تصغر قيمة $\frac{أر^n}{١-ر}$ فإذا زادت ن إلى ∞ فإن $\frac{أر^n}{١-ر}$ يصغر صغراً كافياً حتى يؤول إلى الصفر.

$$\therefore ج_\infty = \frac{أ}{١-ر} ، |ر| < ١ ، أي أن ١ > ر > -١$$

تأمل المثال التالي:

لدينا خيط طوله ٤٠٠ متراً قطعناه إلى نصفين كل نصف يساوي ٢٠٠ متر، ثم قطعنا أحد النصفين إلى نصفين آخرين واستمرينا بهذه الطريقة، نلاحظ أن القطع التي تحصلنا عليها تمثل متتالية هندسية لانهاية تنازلية لماذا؟
المتتالية هي ٢٠٠ ، ١٠٠ ، ٥٠ ، ٢٥ ، ...

نريد مجموعها إلى ما لانهاية

$$أ = ٢٠٠ ، ر = \frac{١٠٠}{٢٠٠} = \frac{١}{٢}$$

$$ج_\infty = \frac{أ}{١-ر} = \frac{٢٠٠}{١-\frac{١}{٢}} = ٢٠٠ \times ٢ = ٤٠٠ \text{ متر و هو طول الخيط الفعلي.}$$

مثال (١): جد مجموع المتتالية الهندسية ٤ ، ٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ...

$$\text{الحل: } أ = ٤ ، ر = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

$$ج_\infty = \frac{أ}{١-ر} = \frac{٤}{١-\frac{١}{٢}} = ٨$$

مثال (٢): متتالية هندسية لا نهائية كل حد من حدودها يساوي ثلاثة أمثال مجموع الحدود التالية له فإذا كان الحد السابع منها $\frac{3}{256}$ ، جد المتتالية.

الحل: أفرض أن المتتالية هي $أ$ ، $أر$ ، $أر^2$ ، $أر^3$ ، ... إلى ∞

$$3 = أ (أر + أر^2 + أر^3 + \dots \text{ إلى } \infty)$$

$$أ = 3 \times \frac{أ}{أ - أر} ، \text{ بالقسمة على } أ ، \therefore \frac{3}{أ - أر} = 1 \therefore أر^3 = أر - 1 \therefore أر = 4 \therefore \frac{1}{4}$$

$$ح = \frac{3}{256} = أر^6 ، أر^6 = \left(\frac{1}{4}\right)^6 ، \therefore أر^6 = \frac{1}{64} \therefore أر = \frac{1}{4}$$

المتتالية هي 48 ، 12 ، 3 ، ...

مثال (٢): إذا كان مجموع الحدين الأول والثاني من متتالية هندسية لانهاية يساوي $\frac{3}{8}$ وكان مجموع حدودها $\frac{1}{2}$ جد كلاً من الأساس وحدها الأول.

$$(1) \quad \frac{3}{8} = أ + أر$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} = \frac{أ}{أ - أر}$$

$$\text{من (1)} \quad أر = \frac{3}{8} - أ \therefore أر = \frac{3}{(أ+1)^8} \therefore أر = \frac{3}{(أ+1)^8}$$

$$\text{عوض في (2)} \quad \frac{1}{2} = \frac{أ}{أ - \frac{3}{(أ+1)^8}} ، \text{ بالضرب التبادلي.}$$

$$(أ - 1)^8 = 6 ، \quad 6 = (أ - 1)^8 ، \quad 6 = أر - 1 \therefore أر = 7 \therefore \frac{3}{8} = أر = 7 \therefore أر = \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8} \therefore أر = -\frac{5}{8}$$

$$\text{في حالة } أر = \frac{1}{4} ، \quad \frac{1}{4} = أر ، \quad \text{وفي حالة } أر = -\frac{5}{8} ، \quad \frac{1}{4} = أر$$

الكسر العشري الدائري:

نلاحظ عند تحويل كسر اعتيادي مثل $\frac{1}{3}$ إلى كسر عشري نقسم البسط على المقام فإن

العملية لا تنتهي ويكون خارج القسمة $\infty \rightarrow 0,3333$

أي أن

$$\frac{1}{3} = \infty \rightarrow 0,3333 = 0,\overline{3}$$

$$\frac{2}{9} = \infty \rightarrow 0,2222 = 0,\overline{2}$$

$$\frac{8}{45} = \infty \rightarrow 0,1777 = 0,\overline{17}$$

$$\frac{41}{333} = \infty \rightarrow 0,123123123 = 0,\overline{123}$$

وعلى ذلك نجد أن :

$$0,3\overline{3} \rightarrow \infty = 0,3\overline{3}$$

$$\infty = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots \text{ إلى } \infty$$

$$\infty = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots \text{ إلى } \infty$$

وهي متتالية هندسية لانهاية تتنازلية حدها الأول $\frac{3}{10}$ وأساسها $\frac{1}{10}$

$$\text{ج } \frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{1}{1 - 3} = \infty$$

مثال (٤): حول الكسر العشري الدائري $0,21\overline{8}$ إلى كسر اعتيادي.

$$\text{الحل: } 0,21\overline{8} \rightarrow \infty = 0,21\overline{8}$$

$$\infty = 0,2 + 0,018 + 0,00018 + \dots \text{ إلى } \infty$$

$$\infty = \frac{2}{10} + \frac{18}{1000} + \frac{18}{10000} + \dots \text{ إلى } \infty$$

$$\infty = \frac{2}{10} + \frac{18}{1000} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \text{ إلى } \infty \right)$$

داخل القوسين متتالية هندسية لانهاية حدها الأول $= 1$ ، أساسها $= \frac{1}{10}$

$$\text{ج } \frac{100}{99} = \frac{1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{1}{- \frac{9}{10}} = \infty$$

$$0,21\overline{8} = \frac{12}{55} = \frac{100}{99} \times \frac{18}{1000} + \frac{2}{10}$$

مثال (٥): كرة من المطاط سقطت من ارتفاع ١٢ متراً على أرض أفقية وترتد دائماً

إلى $\frac{3}{4}$ الارتفاع الذي تسقط منه. جد مجموع المسافات التي تقطعها الكرة حتى تسكن.

الحل: الكرة هبطت ١٢ متراً رأسياً إلى أسفل ثم ترتد مسافة $12 \times \frac{3}{4}$ متراً ثم تهبط

$12 \times \frac{3}{4}$ متراً ثم ترتد $12 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ ثم تهبط $12 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ وهكذا .

مجموع المسافات التي تقطعها الكرة حتى تسكن.

$$= 12 + 12 \left[\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots \text{ إلى } \infty \right]$$

داخل القوسين متتالية هندسية لانهاية حدها الأول $12 \times \frac{3}{4}$ وأساسها $\frac{3}{4}$

$$\text{مجموعها} = \frac{\frac{3}{4} \times 12}{\frac{3}{4} - 1} = 36$$

مجموع المسافات التي تقطعها الكرة حتى تسكن = $12 + 36 \times 2 + 12 = 84$ متراً.
حل آخر:

$$\begin{aligned} 48 &= \frac{12}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{1}{r-1} = \infty \text{ ج } , \dots , \frac{81}{16}, \frac{27}{4}, 9, 12 \\ 36 &= \frac{9}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{1}{r-1} = \infty \text{ ج } , \dots , \frac{81}{16}, \frac{27}{4}, 9 \end{aligned}$$

المسافة الكلية التي تقطعها الكرة تساوي $84 = 36 + 48$ متراً.
 إذن مجموع المسافات التي تقطعها الكرة حتى تسكن تساوي ٨٤ متر.

تمرين (٨-٨)

١. جد مجموع المتتالية الهندسية $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots, \infty$
٢. بسط $1 + \text{جا } s + \text{جا}^2 s + \dots + \infty$ (س = 45°)
٣. متتالية هندسية لانهاية، مجموع حديها الأول والثاني يساوي ١٠٠ وحدها الثالث $= \frac{1}{3}$ ٨ جد مجموعها الكلي.
٤. جد المتتالية الهندسية اللانهائية التي كل حد من حدودها يساوي $\frac{1}{4}$ مجموع الحدود التالية له، مجموع الحدين الأول والثاني منها = ٩ .
٥. كرة من المطاط تسقط من ارتفاع ٤٥ قدماً على أرض أفقية وترتد دائماً إلى ارتفاع يساوي $\frac{3}{5}$ الارتفاع الذي تسقط منه. جد مجموع المسافات التي تقطعها حتى تسكن.
٦. مستخدماً مجموع المتتالية الهندسية اللانهائية اكتب الكسور العشرية الدائرية التالية في شكل كسور اعتيادية.

(أ) $0, \overline{6}$ (ب) $0, \overline{2}$ (ج) $0, \overline{17}$ (د) $0, \overline{123}$

المتتالية الحسابية:

في المتتالية الحسابية التي حدها الأول (أ) وأساسها (د) وعدد حدودها (ن).

$$\text{الحد رقم س هو ح س} = \text{أ} + (\text{س} - ١) \text{ د}$$

$$\text{الحد الأخير (الحد النوني)} = \text{ل} = \text{أ} + (\text{ن} - ١) \text{ د}$$

$$\text{مجموع الحدود إلى ن حداً} = \text{ج ن} = \frac{\text{ن}}{٢} (\text{أ} + \text{ل}) = \frac{\text{ن}}{٢} [\text{أ} + (\text{ن} - ١) \text{ د}]$$

المتتالية الهندسية:

في المتتالية الهندسية التي حدها الأول (أ) وأساسها (ر) وعدد حدودها (ن)

$$\text{الحد رقم س هو ح س} = \text{أ ر}^{\text{س}-١}$$

$$\text{الحد الأخير (الحد النوني)} = \text{ل} = \text{أ ر}^{\text{ن}-١}$$

$$\text{مجموع الحدود إلى ن حداً} = \text{ج ن} = \frac{\text{أ} (\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١} = \frac{\text{أ} (\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١} \quad (\text{ر} \neq ١)$$

$$\text{مجموع المتتالية الهندسية اللانهائية ج} = \frac{\text{أ}}{\text{ر} - ١}$$

تمرين (٩-٨)

١. إذا كان الحد الأول من متتالية هندسية ٣٥ والحد الثاني -١٤ ، جد (أ) الحد الرابع.

(ب) مجموع الحدود إلى ما لانهاية.

٢. متتالية هندسية أول ثلاثة حدود فيها هي (٢ ك + ٦) ، (ك + ١٢) ، (ك) على

الترتيب، جميع حدود المتتالية موجبة. جد

(أ) قيمة ك .

(ب) مجموع الحدود إلى ما لانهاية.

٣. إذا كان الحد الخامس عشر في متتالية حسابية ٣ ومجموع أول ثمانية حدود ١٩٤ جد

(أ) الحد الأول في المتتالية وأساسها.

(ب) إذا علمت أن الحد النوني يساوي -٢٢ جد قيمة ن.

٤. إذا كان الحد السادس في متتالية حسابية ٣٥ ومجموع أول عشرة حدود ٣٣٥، جد الحد الثامن.
٥. إذا كان الحد العاشر في متتالية حسابية ٤ ومجموع أول ٧ حدود -٢٨، جد حدها الأول وأساس المتتالية.
٦. إذا كان الحد الأول في متتالية هندسية (أ) وأساسها (ر) ومجموع حدودها إلى ما لانهاية (ج)، والحد الأول في متتالية هندسية أخرى (٣ أ) وأساسها (٢ ر) ومجموع حدودها إلى ما لانهاية (٤ ج) جد قيمة (ر).
٧. توفر امرأة مبلغاً من المبالغ من المال كل شهر إذا بدأت ادخارها بمبلغ ١٠٠٠٠٠٠٠ جنيه سوداني، وكانت تزيد مدخراتها شهرياً بمقدار ٥٠٠٠٠ جنيه سوداني فبعد كم شهر تصبح مدخراتها ١٧٠٠٠٠٠٠ جنيه سوداني.
٨. ضع الكسر $٠,٤٣$ في صورة متتالية هندسية لانهاية ثم جد مجموعها ليصير الكسر عادياً.

مراجعة المجلس العلمي