حل تمارين الكتاب الثاني

في

الرياضيات المتخصصة

لطلاب وطالبات الصف الثالث العلمي

س+ص

جتاهـ

س= 1

د(س)

ظاهـ

إعداد

مجموعة المنهج السوداني

حل تمارين الدوال والنهايات

تمرين (١ - ١)

(١) إذا كان:

$ص=د(س)=س^{٢}-٣س+٥$؛ فجد:

د(٠)؟

$د(٠) = (٠)^{٢}-٣\times٠+٥$

$د(٠) = ٠+٥=\underline{\underline{٥}}$

د(٢)؟

$د(٢) = (٢)^{٢}-٣\times٢+٥$

$د(٠) = ٤-٦+٥=\underline{\underline{٣}}$

$د(-\frac{١}{٢})$؟

$د(-\frac{١}{٢}) = (-\frac{١}{٢})^{٢}-٣\times-\frac{١}{٢}+٥$

$د(-\frac{١}{٢}) = \frac{١}{٤}+\frac{٣}{٢}+٥$

$د(-\frac{١}{٢}) = \frac{١+٦}{٤}+٥$

$د(-\frac{١}{٢}) = \frac{١+٦}{٤}+٥$

$د(-\frac{١}{٢}) = \frac{٧}{٤}+٥$

$د(-\frac{١}{٢}) = \frac{٢٧}{٤}$

د(٣أ)

$د(٣أ) = (٣أ)^{٢}-٣\times٣أ+٥$

$د(٣أ) = ٩أ^{٢}-٩أ+٥$

$د(س^{٢})$

$د(س^{٢}) = س^{٤}-٣س^{٢}+٥$

د(س+أ)

$د(س+أ) = (س+أ)^{٢}-٣(س+أ)+٥$

$د(س+أ)=س^{٢}+٢أس+أ^{٢}+٣س-٣أ+٥$

د(د(٢))

$د((٢)^{٢}-٣\times٢+٥) = د(٣)$

د(٣)

$=٩-٦+٥=٥$

---

(٢) إذا كان:

$د(س) = \frac{١-س}{٢+س^{٢}}$ ؛

فجد:

د(٠)

$د(٠) = \frac{١-٠}{٢+٠^{٢}} = \frac{١}{٢}$

د(−١)

$د(-١) = \frac{١-(-١)}{٢+(-١)^{٢}} = \frac{١+١}{٢+١} = \frac{٢}{٣}$

د(٢و)

$د(٢و) = \frac{١-(٢و)}{٢+(٢و)^{٢}} = \frac{١-٢و}{٢+٤و^{٢}}$

د$\left(\frac{١}{س}\right)$

د$\left(\frac{١}{س}\right) = \frac{١-\frac{١}{س}}{٢+(\frac{١}{س})^{٢}} = \frac{\left(\frac{س-١}{س}\right)}{\left(\frac{٢س^{٢}+١}{س^{٢}}\right)}$

$\left(\frac{س-١}{س}\right) \times \left(\frac{س^{٢}}{٢س^{٢}+١}\right) = \frac{س(س-١)}{٢س^{٢}+١}$

$= \frac{س^{٢}-١}{٢س^{٢}+١}.$

د(س+و)

د(س+و) $= \frac{١-(س+و)}{٢+(س+و)^{٢}}$

د(س+و) $= \frac{١-س-و}{٢+س^{٢}+٢سو+و^{٢}}$

(٣) **جد مجال تعريف الدوال:**

أ) ص= د(س) = $\frac{٥}{س-١}$؛

س −١ ≠ ٠

س ≠ ١

∴ مجال تعريفها هو ح − {١}

أو: $]-\infty, +\infty[$ − {١}

ب) ص = د(س) = $\frac{٣}{س^{٢}-٩}$

س^{٢}−٩≠٠

س^{٢}≠ ٠ ، س ≠ ± ٣

∴ مجال تعريفها هو ح − {+٣، −٣}

أو $]-\infty، +\infty[$ − {٣، −٣}

أو $(-\infty، +\infty)$ − {٣، ٣}

ب) ص= و(س) = ٢س^{٢}+٥س مجال تعريفها هو ح كاملة.

أو: $]-\infty، +\infty[$

أو $(-\infty، +\infty)$

د) ص = د(ل) = $\frac{١}{\sqrt{ل+٥}}$

ل+٥ > ٠.

ل > −٥

∴ مجال تعريفها]−٥، ∞[

هـ) ص = د(س) = $\frac{٢س}{\sqrt{٤-س^{٢}}}$

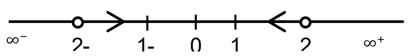
٤ − س^{٢} > ٠

(٢−س)(٢+س) > ٠

إما ٢− س > ٠ ⟸ ٢ > س

∴ س < ٢

أو ٢+س >٠ ⟸ س > −٢



∴ مجال تعريفها هو]−٢، ٢[

و) ق(س) = ظتا س

ظتاس = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

جاس $\neq$ صفر

س $\neq$ صفر، $\pm\pi$ ، $\pm 2\pi$، …

مجال تعريفها هو:

ح − {٠، $\pm 2\pi$، … }

---

(٤) **إذا كانت** د(س)= أس +ب؛ فجد:

$\frac{\text{د(س+و)} - \text{د(س)}}{\text{و}}$ حيث و $\neq$ ٠

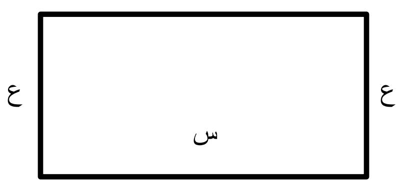
$\frac{\text{أ(س+و)+ب} - \text{(أس+ب)}}{\text{و}}$

$\frac{\text{أس+أو+ب − أس−ب}}{\text{و}}$

$\frac{\text{أو}}{\text{و}}$ = أ

---

(٥) قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٢٠٠٠متر، فإذا كان طولها يساوي س متراً فعبر رمزياً عن الدالة د التي تربط بين المساحة ص والطول س.



المساحة = الطول × العرض= س×ع

المحيط = الطولين + العرضين

المحيط = ٢س + ٢ ع

٢٠٠٠ = ٢(س+ع)

ع = ١٠٠٠ − س

∴ المساحة = س(١٠٠٠−س)

= ١٠٠س + س^{٢}.

ما مجال تعريف المتغير س؟

العرض دائماً كمية موجبة.

الطول$\leq$ العرض

١٠٠٠ −س > ٠ ⇐ س< ١٠٠٠

أو: س $\leq$ ١٠٠٠ − س

٢س $\leq$ ١٠٠٠ ⇐ س $\leq$ ٥٠٠

∴ مجال تعريفها]٥٠٠، ١٠٠٠٠ [

---

(٦) إذا سقط جسم من ارتفاع ٥٧٦قدماً فوق سطح الأرض فإنه بعد مضي ن ثانية يكون ارتفاع الجسم عن سطح الأرض مقدراً بالأقدام مساوياً لـ..:

ف= د(ن) = ٥٧٦ − ١٦ن^{٢}

أ) أحسب كلاً من:

د$\left(\frac{٣}{٢}\right)$ = ٥٧٦ − ١٦ × $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$

= ٥٧٦ − ١٦ × $\frac{٩}{٤}$

= ٥٧٦ − ٣٦ = ٥٤٠.

د(٦) = ٥٧٦− ١٦ (٦)^{٢}

= ٥٧٦ − ١٦× ٣٦ = صفر.

ب) بعد كم من الزمن يكون الجسم على ارتفاع ٣٢٠قدماً عن سطح الأرض.

٣٢٠ = ٥٧٦ − ١٦ن^{٢}

١٦ن^{٢} = ٥٧٦ − ٣٢٠

١٦ن^{٢} = ٢٥٦ .

ن^{٢} = ١٦

إما ن=٤ أو ن = $^{-}$٤ (مرفوضة)

∴ يكون الجسم على ارتفاع ٣٢٠قدماً بعد ٤ ثوانٍ.

تمرين (١ – ٢)

(١) **إذا كانت**:

د(س) = ٣ − ٢س

هـ(س)= س^{٢} +١

جد؛

(أ) (د +هـ) (٢)

(د+هـ)(٢) = د(٢) +هـ(٢)

= (٣−٢×٢) + ((٢)^{٢} +١)

= ٣ − ٤ + ٥ = ٤

(ب)(د−هـ)(٢)

(د−هـ)(٢) = د(٢) −هـ(٢)

= (٣−٢×٢) − ((٢)^{٢} +١)

= (٣−٤) − (٤ +١)

= $^{-}$١ − ٥ = $^{-}$٣

(جـ) $\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$ (س)

= $\frac{\text{د(س)}}{\text{هـ(س)}}$ = $\frac{\text{٣−٢س}}{\text{س}^{٢}\text{+١}}$

(د) هـ(د(٢))

هـ(٣−٢×٢) =هـ(٣−٤) =هـ(−١)

هـ(−١) =(−١)^{٢} +١

هـ(−١) = ١ + ١ = ٢

(٢) **إذا كانت**:

د(س) = ٤س − ٣

هـ(س) = س^{٢} − ٥س + ١

جد:

أ) د+ هـ

(د +هـ) (س) = د(س) + هـ(س)

= ٤س − ٣ + س^{٢} − ٥س+١

= س^{٢} − س − ٢ .

ب) د − هـ

(د − هـ) (س) = د(س) − هـ (س)

= ٤س − ٣ − (س^{٢} −٥س +١)

=٤س−٣ −س^{٢} +٥س−١

= −س^{٢}+٩س−٤

ج) د. هـ

(د.هـ) (س) = د(س) × هـ(س)

=(٤س−٣)(س^{٢} −٥س+١)

=٤س^{٣} − ٢٠س^{٢}٤س −٣س^{٢}+١٥س−٣

=٤س^{٣}−٢٣س^{٢} +١٩س−٣

د) $\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$

$\frac{\text{د(س)}}{\text{هـ(س)}} = \frac{\text{٤ س−٣}}{\text{س}^{٢}\text{ −٥ س+١}}$

هـ) د o هـ

(د o هـ) (س) = د(هـ(س))

= د(س^{٢} −٥ س+ ١)

= ٤(س^{٢}−٥س+١) −٣

= ٤س^{٢}−٢٠س+٤−٣

=٤س^{٢} −٢٠س+١

---

(٣) إذا كانت:

د(س) = س^{٢} − ٣س

جد كلاً من الدوال التالية:

أ) ق(س) = د(د(س))

د(س^{٢} − ٣س)

= (س^{٢} − ٣س)^{٢} −٣(س^{٢} −٣س)

= س^{٤} −٦س^{٣} +٩س^{٢}−٣س^{٢}+٩س

= س^{٤}−٦س^{٣} + ٦س^{٢} +٩س

ب) هـ(س) = $\sqrt{\text{د(س)}}$

هـ(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢}\text{ − ٣ س}}$

ج) د(س) = $\frac{\text{د(س)−د (٦)}}{\text{س−٦}}$

د(س) = $\frac{\text{س}^{٢}\text{ −٣س−٦}^{٢}\text{ −٣×٦}}{\text{س−٦}}$

= $\frac{\text{س}^{٢}\text{ −٣س−(٣٦ −١٨)}}{\text{س−٦}}$

= $\frac{\text{س}^{٢}\text{ −٣س−٣٦ +١٨}}{\text{س−٦}}$

= $\frac{\text{س}^{٢}\text{ −٣س−١٨}}{\text{س−٦}}$

= $\frac{\text{(س−٦)(س+٣)}}{\text{س−٦}}$ = س + ٣

---

(٤) إذا كان

د(س) = س^{٢} ، هـ(س) = جاس؛

جد:

(د+هـ)(س)

= د(س) + هـ(س) = س^{٢} + جاس

(د.هـ) (س)

= د(س) × هـ(س) = س^{٢} جاس

د(هـ(س))

د(جاس) = (جاس)^{٢}

=جا^{٢}س

هـ(د(س))

= هـ(س^{٢}) = جاس^{٢}

تمرين (١ – ٣)

(١) استخدم نظريات النهايات لايجاد نهاية كل من الدوال التالية:

أ) نهـا$_{س \to 3}$ ١٣ = ١٣

ب) نهـا$_{س \to 10}$ (٤س +٣)

= نهـا$_{س \to 10}$ ٤س + نهـا$_{س \to 10}$ ٣

= ٤ × ١٠ + ٣ = ٤٣.

ج) نهـا$_{س \to 1}$ (٢س^{٢} +٥س)(س^{٣} +١)

نهـا$_{س \to 1}$ (٢س^{٢} +٥س)× نهـا$_{س \to 1}$ (س^{٣} +١)

(نهـا$_{س \to 1}$٢س^{٢}+نهـا$_{س \to 1}$٥س)×نهـا$_{س \to 1}$س^{٣}+نهـا$_{س \to 1}$١

(٢(١)^{٢}+٥×١) ((١)^{٣} + ١)

٧ ×٢ = ١٤

---

(٢) **إذا علمت أن:**

نهـا$_{س \to 2}$د(س) = ٥

نهـا$_{س \to 2}$هـ(س) = –٣

فجد قيمة كل من:

أ) نهـا$_{س \to 2}$ (٢د(س) – هـ(س))

= نهـا$_{س \to 2}$ ٢د(س) – نهـا$_{س \to 2}$ هـ(س)

= ٢ × ٥ – $^{-}$٣ = ١٠+٣ = ١٣.

ب) نهـا$_{س \to 2}$ هـ^{٢} (س)

= (نهـا$_{س \to 2}$ هـ(س))^{٢}

= (–٣)^{٢} = ٩.

ج) نهـا$_{س \to 2}$ (د(س) × ٣هـ(س))

نهـا$_{س \to 2}$ د(س) × نهـا$_{س \to 2}$ ٣هـ(س)

= نهـا$_{س \to 2}$ د(س) × ٣ نهـا$_{س \to 2}$هـ(س)

= ٥ ×٣ × –٣ = –٤٥.

---

(٣) أحسب نهـا$_{س \to 1^{-}}$(٣س^{٥}–٢س^{٢} –١)

= ٣(–١)^{٥} –٢(–١)^{٢} –١

= ٣×–١–٢×١–١

=–٣–٢–١ = –٦.

---

(٤) **جد النهايات التالية:**

أ) نهـا$_{س \to 0}$ (٧س^{٢}–٥)

$٧(٠)^٢ - ٥ = ٥ = -٥$

ب) $\lim_{س \to 2} (٢س+٣)(س^٢-١)$

$(٢×٢+٣)((٢)^٢-١)$

$=٧ ×٣ =٢١$

ج) $\lim_{س \to \frac{1}{2}} (٣-٢س)^٥$

$(٣-٢×\frac{1}{2})^٥ = (٢)^٥ =٣٢$

د) $\lim_{س \to 1^-} ٢(س^٥ - ٣س^٣ + ١)$

$٢((-١)^٥-٣(-١)^٣ + ١)$

$٢(-١+٣+١) = ٢ ×٣ =٦$

---

(٥) إذا **علمت أن**:

$\lim_{س \to 3} د(س) = ٧$

فجد النهايات التالية:

أ) $\lim_{س \to 3} (٢د(س) -٥)$

$= \lim_{س \to 3} ٢د(س) - \lim_{س \to 3} ٥$

$= ٢ \lim_{س \to 3} د(س) - \lim_{س \to 3} ٥$

$= ٢ ×٧ - ٥ =١٤-٥ = ٩$

ب) $\lim_{س \to 3} د^٢(س)$

$= (\lim_{س \to 3} د(س))^٢$

$= (٧)^٢ =٤٩$.

تمرين (١ -٤)

جد النهايات التالية:

١) $\lim_{س \to 2} \frac{س-٢}{س^٢ - س-٢}$

بالتعويض:

$\frac{٢-٢}{٢^٢ - ٢-٢} = \frac{صفر}{صفر}$ (ك. غ. م)

نحلل/ نختصر/ نعوض.

$\therefore \lim_{س \to 2} \frac{س-٢}{س^٢ - س-٢} = \lim_{س \to 2} \frac{س-٢}{(س-٢)(س+١)}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{١}{(س+١)} = \frac{١}{(٢+١)} = \frac{١}{٣}$

---

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{(١+س)^٢ -١}{س}$

بالتعويض:

$\frac{(١+٠)^٢ -١}{٠} = \frac{صفر}{صفر}$ (ك. غ. م)

نحلل/ نختصر/ نعوض.

$\therefore \lim_{س \to 0} \frac{(١+س)^٢ -١}{س}$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نهــا}} \frac{(١)^{٢} + ٢\text{س} + \text{س}^{٢} - ١}{\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}(٢+\text{س})}{\text{س}} = \underset{\text{س}\leftarrow 0}{\text{نهــا}} (٢+\text{س})$$

$$= ٢ + ٠ = ٢.$$

---

(٣) $\underset{\text{س}\leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{٤\text{س}^{٢}+٥}{٢\text{س}^{٢}+١}$

بالتعويض:

$$\frac{٤\infty^{٢}+٥}{٢\infty^{٢}+١} = \frac{\infty}{\infty}$$ (ك. غ. م)

نقسم على أكبر أس $(\text{س}^{٢})$

$$\therefore \underset{\text{س}\leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{٤\text{س}^{٢}+٥}{٢\text{س}^{٢}+١}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{\frac{٤\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}+\frac{٥}{\text{س}^{٢}}}{\frac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}+\frac{١}{\text{س}^{٢}}} = \underset{\text{س}\leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{٤+\frac{٥}{\text{س}^{٢}}}{٢+\frac{١}{\text{س}^{٢}}}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{٤+\frac{٥}{\infty}}{٢+\frac{١}{\infty}} = \frac{٤}{٢} = ٢.$$

---

(٤) $\underset{\text{س}\leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{٣\text{س}+٧}{\sqrt{٤\text{س}^{٢}+٥}}$

أقسم البسط و المقام على س

ملحوظة: $\text{س} = \sqrt{\text{س}^{٢}}$

بالتعويض: $\frac{٣\infty+٧}{\sqrt{٤\infty+٥}} = \frac{\infty}{\infty}$ (ك. غ. م)

بالقسمة على س:

$$\therefore \underset{\text{س}\leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{٣\text{س}+٧}{\sqrt{٤\text{س}^{٢}+٥}}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{\frac{٣\text{س}}{\text{س}}+\frac{٧}{\text{س}}}{\sqrt{\frac{٤\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}+\frac{٥}{\text{س}^{٢}}}}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{٣+\frac{٧}{\text{س}}}{\sqrt{٤+\frac{٥}{\text{س}^{٢}}}}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{٣+\frac{٧}{\infty}}{٤+\frac{٥}{\infty^{٢}}}$$

$$= \frac{٣+٠}{\sqrt{٤+٠}} = \frac{٣}{٢}$$

---

(٥) $\underset{\text{س}\leftarrow 15}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{\text{س}-٦}-٣}{\text{س}-١٥}$

بالتعويض

$$\frac{\sqrt{١٥-٦}-٣}{١٥-١٥} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ (ك. غ. م)

بالضرب في مرافق البسط $\sqrt{\text{س}-٦}+٣$

$$\therefore \underset{\text{س}\leftarrow 15}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{\text{س}-٦}-٣}{\text{س}-١٥} =$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow 15}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{\text{س}-٦}-٣}{\text{س}-١٥} \times \frac{\sqrt{\text{س}-٦}+٣}{\sqrt{\text{س}-٦}+٣}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow 15}{\text{نهــا}} \frac{\left(\sqrt{\text{س}-٦}\right)^{٢} - (٣)^{٢}}{(\text{س}-١٥)\left(\sqrt{\text{س}-٦}+٣\right)}$$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 15} \frac{1}{\sqrt{\text{س}-6}+3} = \frac{1}{\sqrt{15-6}+3}$

$= \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$

---

(٦) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt{\text{س}+3}-2}{\text{س}-1}$

بالتعويض:

$\frac{\text{س}+3-2}{\text{س}-1} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

بالضرب في مرافق البسط $\sqrt{\text{س}+3}+2$

$\therefore \lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt{\text{س}-3}-2}{\text{س}-15} \times \frac{\sqrt{\text{س}-3}+2}{\sqrt{\text{س}-3}+2}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}+3-4}{(\text{س}-1)\left(\sqrt{\text{س}-3}+2\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}-1}{(\text{س}-1)\left(\sqrt{\text{س}-3}+2\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{1}{\left(\sqrt{\text{س}-3}+2\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+3}+2\right)} = \frac{1}{4}$

---

(٧) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+4}-2}$

بالتعويض:

$\frac{\text{س}}{\sqrt{0^2+4}-2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \notin \text{ح}$

بالضرب في مرافق البسط $\sqrt{\text{س}+4}+2$

$\therefore \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+4}-2} \times \frac{\sqrt{\text{س}^2+4}+2}{\sqrt{\text{س}^2+4}+2}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}\left(\sqrt{\text{س}^2+4}-2\right)}{\text{س}^2+4-4}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\left(\sqrt{\text{س}^2+4}-2\right)}{\text{س}}$

$= \frac{\left(0^2+4-2\right)}{\text{صفر}} = \frac{4}{\text{صفر}} = \infty$

---

(٨) $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\sqrt{\text{س}-2}-1}{\text{س}-3}$

بالتعويض

$\frac{3-2-1}{3-3} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \notin \text{ح}$

بالضرب في مرافق البسط $\sqrt{\text{س}-2}-1$

$\therefore \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\sqrt{\text{س}-2}-1}{\text{س}-3} \times \frac{\sqrt{\text{س}-2}+1}{\sqrt{\text{س}-2}+1}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}-2-1}{(\text{س}-3)\left(\sqrt{\text{س}-2}+1\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}-3}{(\text{س}-3)\left(\sqrt{\text{س}-2}+1\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{1}{\left(\sqrt{\text{س}-2}+1\right)}$

$= \frac{1}{\left(\sqrt{3-2}+1\right)} = \frac{1}{2}$.

---

(٩) أثبت أن:

$$\underset{\text{و}\to 0}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س}+\text{و})^{٢}-\text{س}^{٢}}{\text{و}} = ٢\text{س}$$

بالتعويض في الأيمن

$$\frac{(\text{س}+٠)^{٢}-\text{س}^{٢}}{٠} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

نحلل/ نختصر/ نعوض

$$\therefore\ \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س}+\text{و})^{٢}-\text{س}^{٢}}{\text{و}} =$$

$$= \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٢}+٢\text{س و}+\text{و}^{٢}-\text{س}^{٢}}{\text{و}}$$

$$= \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{و}(٢\text{س}+\text{و})}{\text{و}}$$

$$= \underset{\text{و}\to 0}{\text{نهـا}}\ (٢\text{س}+\text{و}) = ٢\text{س} + ٠ = ٣\text{س}$$

= الطرف الأيسر

$$(١٠)\ \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{١+٢+٣+\cdots+\text{ن}}{\text{ن}^{٢}}$$

البسط مجموع متالية حسابية، يمكن ايجاد مجموعها بدلالة الحد الأخير.

$$\text{جن} = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{أ}+\text{ل}) = \frac{\text{ن}}{٢}(١+\text{ن})$$

$$= \frac{١}{٢}\text{ن} + \frac{١}{٢}\text{ن}^{٢}$$

$$\therefore\ \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\frac{١}{٢}\text{ن}+\frac{١}{٢}\text{ن}^{٢}}{\text{ن}^{٢}}$$

بالقسمة على أكبر أس:

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\frac{١}{٢}\frac{\text{ن}}{\text{ن}^{٢}}+\frac{١}{٢}\frac{\text{ن}^{٢}}{\text{ن}^{٢}}}{\frac{\text{ن}^{٢}}{\text{ن}^{٢}}}$$

$$= \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\frac{١}{٢}\cdot\frac{١}{\text{ن}}+\frac{١}{٢}}{١}$$

$$= \frac{١}{٢(\infty)} + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

تمرين (١ −٥)

جد النهايات التالية:

$$(١)\ \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٣}-١}{\text{س}-١}$$

بالتعويض: $\frac{١^{٣}-١}{١-١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \nexists\ \text{ح}$

$$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٣}-١^{٣}}{\text{س}-١} = ٣\ (١)^{٣-١} = ٣$$

$$(٢)\ \underset{\text{س}\to -1}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٥}+١}{\text{س}+١}$$

بالتعويض

$$\frac{-١^{٥}+١}{-١+١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \nexists\ \text{ح}$$

$$= \underset{\text{س}\to -1}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٥}-(-١)^{٥}}{\text{س}-(-١)} = ٥(-١)^{٥-١} = ٥.$$

(٣) $\lim\limits_{س \to -3} \frac{س+٣}{س^{٣}+٢٧}$

بالتعويض

$\frac{-٣+٣}{-٣^{٣}+٢٧} = \frac{صفر}{صفر} \nexists ح$

$\lim\limits_{س \to -3} \frac{س-(-٣)}{س^{٣}-(-٣)^{٣}} = \frac{١}{٣}\,(-٣)^{١-٣}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٩} = .٢٧$

---

(٤) $\lim\limits_{س \to -2} \frac{س^{٥}+٣٢}{س^{٣}+٨}$

بالتعويض

$\frac{(-٢)^{٥}+٣٢}{(-٢)^{٣}+٨} = \frac{صفر}{صفر} \nexists ح$

$\lim\limits_{س \to -2} \frac{س^{٥}-(-٢)^{٥}}{س^{٣}-(-٢)^{٣}} = \frac{٥}{٣}\,(-٢)^{٥-٣}$

$= \frac{٥}{٣} \times ٤ = \frac{٢٠}{٣}.$

---

(٥) $\lim\limits_{س \to 2} \frac{س^{٦}-٦٤}{س-٢}$

بالتعويض

$\frac{٢^{٦}-٦٤}{٢-٢} = \frac{صفر}{صفر} \nexists ح$

$\lim\limits_{س \to 2} \frac{س^{٦}-٢^{٦}}{س-٢} = ٦\,(٢)^{٦-١}$

$= ٦ \times (٢)^{٥} = ٦\times٣٢ = ١٩٢.$

(٦) $\lim\limits_{س \to 1} \frac{\sqrt{س}-١}{س-١}$

بالتعويض

$\frac{١-١}{١-١} = \frac{صفر}{صفر} \nexists ح$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{س^{\frac{١}{٢}}-١^{\frac{١}{٢}}}{س-١} = \frac{١}{٢}\,(١)^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٢}$

---

(٧) $\lim\limits_{س \to -2} \frac{س+٢}{س^{٣}+٨}$

بالتعويض

$\frac{-٢+٢}{-٢^{٣}+٨} = \frac{صفر}{صفر} \nexists ح$

$= \lim\limits_{س \to -2} \frac{س-(-٢)}{س^{٣}-(-٢)^{٣}}$

$= \frac{١}{٣}\,(-٢)^{١-٣} = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٢}$

---

(٨) $\lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} \frac{٢٧س^{٣}-١}{٣س-١}$

بالتعويض

$\frac{٢٧\left(\frac{١}{٣}\right)^{٣}-١}{٣\left(\frac{١}{٣}\right)-١} = \frac{صفر}{صفر} \nexists ح$

$= \lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} \frac{(٣س)^{٣}-(١)^{٣}}{٣س-١} = ٣\,(١)^{٣-١}$

$= ٣\times١ = ٣$

٣س ← ١ لأن:

س ← 1

س ← $\frac{١}{٣}$

∴ ٣ × س ← ٣ × $\frac{١}{٣}$

∴ ٣س ← ١.

---

(٩) $\underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{(١+س)^{٢} -١}{س}$

بالتعويض:

$\frac{(١+٠)^{٢} -١}{٠} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \nexists$ ح

$= \underset{1+س \leftarrow 1}{\text{نهـا}} \frac{(١+س)^{٢} - ١^{٢}}{س - ١}$

$= ٢ \; (١)^{٢-١} = ٢ \times ١ = ٢$

---

(١٠) $\underset{و \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{(س+و)^{٢} - س^{٢}}{و}$

$\frac{(س+٠)^{٢} - س^{٢}}{٠} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \nexists$ ح

$= \underset{س+و \leftarrow س}{\text{نهـا}} \frac{(س+و)^{٤} - س^{٤}}{(س+و) - س}$

$= ٤ \; (س)^{٤-١} = ٤س^{٣}$.

تمرين (١ −٦)

جد النهايات التالية:

(١) $\underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{جا٣س}{جا٥س}$

$\frac{جا ٣\times٠}{ج ٥\times٠} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \nexists$ ح

$= \underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{\frac{جا٣س}{س}}{\frac{جا٥س}{س}} = \frac{٣ \underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{جا٣س}{٣س}}{٥ \underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{جا٥س}{٥س}}$

$= \frac{٣ \times ١}{٥ \times ١} = \frac{٣}{٥}$.

---

(٢) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} س \; جا \frac{١}{س} = \infty \times$ صفر (ك غ م)

س ← ∞

∴ $\frac{١}{س} \leftarrow \frac{١}{\infty} \Longleftarrow \frac{١}{س} \leftarrow$ صفر

∴ $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} س \; جا \frac{١}{س} =$

$\underset{\frac{1}{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{جا \frac{١}{س}}{\frac{١}{س}} = ١$

---

(٣) $\underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{جا ٥س}{س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \nexists$ ح

ضع ع =٥س، ع ← صفر عندما س←٠

∴ $\underset{ع \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{جا ع}{\frac{ع}{٥}} = ٥ \underset{ع \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{جا ع}{ع} = ٥\times١ = ٥$

(٤) $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا ٣ س}}{\text{س}}$

$= ٣ \underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا ٣ س}}{\text{٣س}} = ٣ \times ١ = ٣$

---

(٥) $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{١−جتا س}}{\text{س}^٢}$

$\dfrac{\text{١−جتا صفر}}{\text{صفر}^٢} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \notin \text{ح}$

بالضرب ×(١+جتاس)

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{١−جتا س}}{\text{س}^٢} =$

$\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{١−جتا س})(\text{١+جتا س})}{\text{س}^٢ (\text{١+جتا س})}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{١−جتا}^٢\text{ س}}{\text{س}^٢ (\text{١+جتا س})}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}^٢\text{ س}}{\text{س}^٢ (\text{١+جتا س})}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}^٢\text{ س}}{\text{س}^٢} \times \underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهــا}} \dfrac{١}{(\text{١+جتا س})}$

$= ١ \times \dfrac{١}{(\text{١+جتا صفر})} = ١ \times \dfrac{١}{(١+١)} = \dfrac{١}{٢}$

تمرين (١ – ٧)

بيّن فيما إذا كانت كل من الدوال التالية متصلة عند النقطة المذكورة إزاء كل منها:

(١) $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & \text{س} \neq ٤ \\ ١٥ & \text{س} = ٤ \end{cases}$

ق(٤) = ١٥ معرّفة.

$\underset{\text{س} \leftarrow 4}{\text{نهــا}} (\text{س}^٢ + ١) = (٤)^٢ + ١ = ١٧.$

$\because \underset{\text{س} \leftarrow 4}{\text{نهــا}} \text{ق(س)} \neq \text{ق(٤)}$

∴ الدالة غير متصلة عند س = ٤.

---

(٢) $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ & \text{س} > ٣ \\ ٣\text{س}^٢ & \text{س} \leq ٣ \end{cases}$ ؛

عند س= ٣

$\text{د(٣)} = ٣(٣)^٢ = ٣ \times ٩ = ٢٧$

$\underset{\text{س} \leftarrow 3^+}{\text{نهــا}} \text{س}^٢ = (٣)^٢ = ٩$

$\underset{\text{س} \leftarrow 3^-}{\text{نهــا}} ٣\text{س}^٢ = ٣(٣)^٢ = ٢٧$

$\because \underset{\text{س} \leftarrow 3^+}{\text{نهــا}} \text{د(س)} \neq \underset{\text{س} \leftarrow 3^-}{\text{نهــا}} \text{د(س)}$

∴ الدالة غير متصلة.

---

(٣) $\text{هـ(س)} = \begin{cases} \text{٣} - \text{س}^{\text{٢}} & \text{١} \leq \text{س} < \text{١} \\ \text{س} + \text{١} & \text{١} \leq \text{س} \leq \text{٢} \end{cases}$

في الفترة [⁻٢ ، ٢]

(٣ −س$^{\text{٢}}$) متصلة في الفترة [٤، ١[لأنها كثيرة حدود.

(س+١) متصلة في الفترة [١، ٢] لأنها كثيرة حدود.

هـ(١) = ١ + ١ = ٢

$\lim\limits_{\text{س} \to 1^+} (\text{س}+\text{١}) = \text{١} + \text{١} = \text{٢}$

$\lim\limits_{\text{س} \to 1^-} (\text{٣}-\text{س}^{\text{٢}}) = \text{٣} - (\text{١})^{\text{٢}} = \text{٢}$

∵ $\lim\limits_{\text{س} \to 1^+} \text{هـ(س)} \neq \lim\limits_{\text{س} \to 1^-} \text{هـ(س)}$

∴ الدالة متصلة في الفترة [⁻٢ ، ٢]

---

(٤) $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}}{\text{س} - \text{٢}} & \text{س} \neq \text{٢} \text{ ؛} \\ \text{٠} & \text{س} = \text{٢} \end{cases}$

عند س=٢

د(٢) = صفر ؛ معرفة.

$\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}}{\text{س} - \text{٢}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{(\text{س}-\text{٢})(\text{س}-\text{٣})}{\text{س}-\text{٢}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 2} (\text{س} - \text{٣}) = \text{٢} - \text{٣} = -\text{١}$

∵ $\text{د(٢)} \neq \lim\limits_{\text{س} \to 2} \text{د(س)}$

∴ الدالة غير متصلة عند س =٢.

---

(٥) $\text{ل(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢٥}}{\text{س} - \text{٥}} & \text{س} \neq \text{٥} \text{ ؛} \\ \text{٣س} - \text{٥} & \text{س} = \text{٥} \end{cases}$

عند س = ٥

ل(٥) = ٣ ×٥ − ٥ = ١٠ معرفة

$\lim\limits_{\text{س} \to 5} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥}^{\text{٢}}}{\text{س} - \text{٥}} = \dfrac{\text{٥}^{\text{٢}} - \text{٥}^{\text{٢}}}{\text{٥} - \text{٥}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نحلل/ نختصر/ نعوض

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to 5} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥}^{\text{٢}}}{\text{س} - \text{٥}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 5} \dfrac{(\text{س}-\text{٥})(\text{س}+\text{٥})}{\text{س}-\text{٥}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 5} (\text{س}+\text{٥}) = \text{٥} + \text{٥} = \text{١٠}$

∵ $\text{د(٥)} = \lim\limits_{\text{س} \to 5} \text{د(س)}$

∴ الدالة متصلة عند س =٥.

(٦) $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{جا ٢ س جتا س}}{\text{س}} & \text{س} \neq ٠ \ ؛ \\ \dfrac{١}{٢} & \text{س} = ٠ \end{cases}$

عند س = ٠

د(٠) = $\frac{١}{٢}$ معرفة.

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا ٢ س جتا س}}{\text{س}}$

$= ٢ \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا ٢ س}}{\text{س}} \times \lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{جتا س}$

= ٢×١×جتاصفر =٢×١×١ =٢

∵ د(٠) ≠ $\lim\limits_{\text{س}\to 0}$ د(س)

∴ الدالة غير متصلة.

---

(٧) $\text{هـ(س)} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{٣\text{س}-٢}-\sqrt{\text{س}+٢}}{\text{س}-٢} & \text{س} \neq ٢ \\ ٣ & \text{س} = ٢ \end{cases}$

عند س = ٢

هـ(٢) =٣ معرفة

$\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\sqrt{٣\text{س}-٢}-\sqrt{\text{س}+٢}}{\text{س}-٢} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

بالضرب في مرافق البسط

$\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\sqrt{٣\text{س}-٢}-\sqrt{\text{س}+٢}}{\text{س}-٢} = \dfrac{\sqrt{٣\text{س}-٢}+\sqrt{\text{س}+٢}}{\sqrt{٣\text{س}-٢}+\sqrt{\text{س}+٢}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{٣\text{س}-٢-(\text{س}+٢)}{(\text{س}-٢)\left(\sqrt{٣\text{س}-٢}+\sqrt{\text{س}+٢}\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{٢\text{س}-٤}{(\text{س}-٢)\left(\sqrt{٣\text{س}-٢}+\sqrt{\text{س}+٢}\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{٢(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٢)\left(\sqrt{٣\text{س}-٢}+\sqrt{\text{س}+٢}\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{٢}{\left(\sqrt{٣\text{س}-٢}+\sqrt{\text{س}+٢}\right)}$

$= \dfrac{٢}{٢+٢} = \dfrac{٢}{٤} = \dfrac{١}{٢}$

∵ هـ(٢) ≠ $\lim\limits_{\text{س}\to 2}$ هـ (س)

∴ الدالة غير متصلة.

---

(٨) ضع قيمة ك التي تجعل الدالة التالية متصلة عند س = صفر.

$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{جتا٢ س} - ١ & \text{س} \neq \text{صفر} \\ \text{ك} & \text{س} = \text{صفر} \end{cases}$

عند س = صفر

د(٠) = ك

$\lim\limits_{\text{س}\to 0}$ (جتا٢س −١)

جتا ٢×٠ −١= ١−١ =صفر

∵ الدالة متصلة

∴ $\text{د}(٠) \neq \lim\limits_{\text{س} \to 2} \text{د(س)}$

∴ ك = صفر.

---

(٩) أعد تعريف الدالة التالية بحيث تكون متصلة عند س = ٣

$$\text{د(س)} = \left\{ \frac{\sqrt{\text{٢س+٣}}}{\text{س}-١} \right.$$

القوس لا داعي له ومفترض ناتج نهاية الدالة المعطى $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (ك. غ. م)

الصواب: أعد تعريف الدالة التالية بحيث تكون متصلة عند س = ٣.

$$\text{د(س)} = \frac{\sqrt{\text{٢س+٣}} - ٣}{\text{س}-٣}$$

الحل

∵ الدالة متصلة عند س= ٣

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{د(س)} = \text{د(٣)}$

$$\lim\limits_{\text{س} \to 3} \frac{\sqrt{\text{٢س+٣}} - ٣}{\text{س}-٣}$$

$$= \frac{\sqrt{٢ \times ٣ + ٣} - ٣}{٣-٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \text{ (ك. غ. م)}$$

بالضرب في مرافق البسط

$$\lim\limits_{\text{س} \to 3} \frac{\sqrt{\text{٢س+٣}} - ٣}{\text{س}-٣} \times \frac{\sqrt{\text{٢س+٣}} + ٣}{\sqrt{\text{٢س+٣}} + ٣}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to 3} \frac{\text{٢س+٣} - ٣^2}{(\text{س}-٣)(\sqrt{\text{٢س+٣}} + ٣)}$$

$$=٢ \lim\limits_{\text{س} \to 3} \frac{١}{(\sqrt{\text{٢س+٣}} + ٣)}$$

$$= ٢ \times \frac{١}{(\sqrt{٢(٣)+٣} + ٣)} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

$$\text{التعريف:} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{\text{٢س+٣}} - ٣}{\text{س}-٣} & \text{س} \neq ٣ \\ \frac{١}{٣} & \text{س} = ٣ \end{array} \right.$$

والله ولي التوفيق،،،

حل تمارين التفاضل وتطبيقاته

علمي

إعداد:
مجموعة المنهج السوداني

تمرين (٢-١)

التفاضل

[1] جد متوسط معدل التغير للدوال المذكورة

أ) د(س) = ٢س − ١ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٤

الحل

س١ = ٣ ، س٢ = ٣,٤

Δس = س٢ − س١

Δس = ٣,٤ − ٣ = ٠,٤

Δص = د(س٢) − د(س١)

Δص = د(٣,٤) − د(٣)

Δص = (٢(٣,٤) − ١) − (٢×٣ − ١)

Δص = (٦,٨ − ١) − (٦ − ١)

Δص = ٥,٨ − ٥

Δص = ٠,٨

Δص / Δس = ٠,٨ / ٠,٤ = ٢

ب) د(ر) = √(ر + ٣) عندما تتغير ر من ٠ إلى −٢

الحل

ر١ = ٠ ، ر٢ = −٢

Δر = ر٢ − ر١

Δر = −٢ − ٠ = −٢

Δص = د(ر٢) − د(ر١)

Δص = د(−٢) − د(٠)

Δص = (√(−٢ + ٣)) − (√(٠ + ٣))

Δص = √١ − √٣ = ١ − ١,٧ = −٠,٧

Δص / Δر = −٠,٧ / −٢ = ٠,٣٥

ج) د(س) = س³ + ١ عندما تتغير س من صفر إلى ١/٢

الحل

س١ = ٠ ، س٢ = ١/٢

Δس = س٢ − س١

Δس = ١/٢ − ٠

Δس = ١/٢

Δص = د(س٢) − د(س١)

Δص = د(١/٢) − د(٠)

Δص = ((١/٢)³ + ١) − ((٠)³ + ١)

Δص = ١/٨ + ١ − ١

Δص = ١/٨

Δص / Δس = ١/٨ ÷ ١/٢ = ١/٨ × ٢/١

Δص / Δس = ١/٤

⑤ يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث يكون بعده ف عن نقطة ثابتة بعد ن ثانية معطى بالعلاقة:

$$\text{ف} = \text{ن}^{٢} - ٢\text{ن} + ٥$$

أحسب سرعته المتوسطة (أي متوسط تغير ف بالنسبة لـ ن) خلال التغير من ن = ١ ث إلى ن = ٣ ث

__الحل__

$\text{ن}_{١} = ١$ ، $\text{ن}_{٢} = ٣$

$\Delta \text{ن} = \text{ن}_{٢} - \text{ن}_{١}$

$\Delta \text{ن} = ٣ - ١$

$\Delta \text{ن} = ٢$

$\Delta \text{ف} = \text{د}(\text{ن}_{٢}) - \text{د}(\text{ن}_{١})$

$\Delta \text{ف} = \text{د}(٣) - \text{د}(١)$

$\Delta \text{ف} = \left((٣)^{٢} - ٢ \times ٣ + ٥\right) - \left((١)^{٢} - ٢ \times ١ + ٥\right)$

$\Delta \text{ف} = (٩ - ٦ + ٥) - (١ - ٢ + ٥)$

$\Delta \text{ف} = ٨ - ٤$

$\Delta \text{ف} = ٤$

$\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{٤}{٢}$

$\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = ٢$ متر/ث

③ فقاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد محافظة على شكلها الكروي، أحسب متوسط معدل التغير في مساحة السطح الكروي للفقاعة عندما يتغير طول نصف قطرها من ٦ مم إلى ٦,٢ مم.

(مساحة سطح الكرة بدلالة نصف قطرها نق تساوي $٤\pi \text{نق}^{٢}$)

__الحل__

$\text{نق}_{١} = ٦$ ، $\text{نق}_{٢} = ٦,٢$

$\Delta \text{نق} = \text{نق}_{٢} - \text{نق}_{١}$

$\Delta \text{نق} = ٦,٢ - ٦$

$\Delta \text{نق} = ٠,٢$

$\Delta \text{م} = \text{د}(\text{نق}_{٢}) - \text{د}(\text{نق}_{١})$

$\Delta \text{م} = \text{د}(٦,٢) - \text{د}(٦)$

$\Delta \text{م} = ٤\pi(٦,٢)^{٢} - ٤\pi(٦)^{٢}$

$\Delta \text{م} = ٤\pi\left((٦,٢)^{٢} - (٦)^{٢}\right)$

$\Delta \text{م} = (٤\pi)(٦,٢ - ٦)(٦,٢ + ٦)$

$\Delta \text{م} = ٤\pi \times ٠,٢ \times ١٢,٢$

$\Delta \text{م} = ٩,٧٦\pi$

$\frac{\Delta \text{م}}{\Delta \text{نق}} = \frac{٩,٧٦\pi}{٠,٢}$

$\frac{\Delta \text{م}}{\Delta \text{نق}} = ٤٨,٨\pi$

__أو__: يمكن حل كل مسائل التمرين بالقانون:

$$\boxed{\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{د}(\text{س}_{٢}) - \text{د}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}}$$

تمرين (٢-٤)

جد المشتقات الاولى للدوال التالية من المبادئ الأولية:

① $\text{ص} = ٥ - ٣\text{س}$

الحل

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{د}(\text{س}+\Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٥ - ٣(\text{س}+\Delta\text{س}) - (٥ - ٣\text{س})}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٥ - ٣\text{س} - ٣\Delta\text{س} - ٥ + ٣\text{س}}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{-٣\Delta\text{س}}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} -٣ = -٣$$

② $\text{ص} = \text{س}^٢ - ٢$

الحل

$$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\Delta\text{س})^٢ - ٢ - (\text{س}^٢ - ٢)}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\Delta\text{س})^٢ - ٢ - \text{س}^٢ + ٢}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\Delta\text{س})^٢ - \text{س}^٢}{\Delta\text{س}}$$

③ $$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}(\Delta\text{س}) + (\Delta\text{س})^٢ - \text{س}^٢}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\Delta\text{س}(٢\text{س} + \Delta\text{س})}{\Delta\text{س}} = \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} (٢\text{س} + \Delta\text{س}) = ٢\text{س}$$

③ $\text{ص} = (\text{س}+١)(\text{س}-٤)$

الحل

$$\text{ص} = \text{س}^٢ - ٤\text{س} + \text{س} - ٤$$

$$\text{ص} = \text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{د}(\text{س}+\Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\Delta\text{س})^٢ - ٣(\text{س}+\Delta\text{س}) - ٤ - (\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤)}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}\Delta\text{س} + (\Delta\text{س})^٢ - ٣\text{س} - ٣\Delta\text{س} - ٤ - \text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٤}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}\Delta\text{س} + (\Delta\text{س})^٢ - ٣\Delta\text{س}}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\Delta\text{س}(٢\text{س} + \Delta\text{س} - ٣)}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} (٢\text{س} + \Delta\text{س} - ٣)$$

$$= ٢\text{س} + ٠ - ٣$$

$$= ٢\text{س} - ٣$$

(٤) $\text{ص} = \dfrac{1}{(٢\text{س}+٥)^{٢}}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\left(\dfrac{1}{(٢(\text{س}+\Delta\text{س})+٥)^{٢}} - \dfrac{1}{(٢\text{س}+٥)^{٢}}\right)}{\Delta\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{(٢\text{س}+٥)^{٢} - (٢\text{س}+٢\Delta\text{س}+٥)^{٢}}{(٢\text{س}+٢\Delta\text{س}+٥)^{٢}(٢\text{س}+٥)^{٢}}\right) \div \Delta\text{س}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(٢\text{س}+٥+٢\text{س}+٢\Delta\text{س}+٥)((٢\text{س}+٥) - (٢\text{س}+٢\Delta\text{س}+٥))}{(٢\text{س}+٢\Delta\text{س}+٥)^{٢}(٢\text{س}+٥)^{٢}} \times \frac{1}{\Delta\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(٤\text{س}+٢\Delta\text{س}+١٠)(٢\text{س}+٥-٢\text{س}-٢\Delta\text{س}-٥)}{(٢\text{س}+٢\Delta\text{س}+٥)^{٢}(٢\text{س}+٥)^{٢}} \times \frac{1}{\Delta\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{-٢\Delta\text{س}\,(٤\text{س}+٢\Delta\text{س}+١٠)}{(٢\text{س}+٢\Delta\text{س}+٥)^{٢}(٢\text{س}+٥)^{٢}} \times \frac{1}{\Delta\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢(٢\text{س}+\Delta\text{س}+٥)}{(٢\text{س}+٢\Delta\text{س}+٥)(٢\text{س}+٢\Delta\text{س}+٥)(٢\text{س}+٥)^{٢}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٤\underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{1}{(٢\text{س}+٢\Delta\text{س}+٥)(٢\text{س}+٥)^{٢}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٤ \times \frac{1}{(٢\text{س}+٢\times٠+٥)(٢\text{س}+٥)^{٢}} = -٤ \times \frac{1}{(٢\text{س}+٥)^{٣}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٤}{(٢\text{س}+٥)^{٣}}$$

(٥) $\text{ص} = \dfrac{\text{ج}}{\text{س}^2 + ٣}$ ، ج ثابت

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \lim_{\Delta\text{س} \to ٠} \left(\frac{\text{ج}}{(\text{س} + \Delta\text{س})^2 + ٣} - \frac{\text{ج}}{\text{س}^2 + ٣} \right) \div \Delta\text{س}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ج} \lim_{\Delta\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}^2 + ٣ - (\text{س}^2 + ٢\text{س}\Delta\text{س} + (\Delta\text{س})^2 + ٣)}{(\text{س}^2 + ٣)((\text{س} + \Delta\text{س})^2 + ٣)} \times \frac{١}{\Delta\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ج} \lim_{\Delta\text{س} \to ٠} \left(\frac{\text{س}^2 + ٣ - \text{س}^2 - ٢\text{س}\Delta\text{س} - (\Delta\text{س})^2 - ٣}{(\text{س}^2 + ٣)((\text{س} + \Delta\text{س})^2 + ٣)} \right) \frac{١}{\Delta\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ج} \lim_{\Delta\text{س} \to ٠} \left(\frac{-٢\text{س}\Delta\text{س} + (\Delta\text{س})^2}{(\text{س}^2 + ٣)((\text{س} + \Delta\text{س})^2 + ٣)} \right) \frac{١}{\Delta\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ج} \lim_{\Delta\text{س} \to ٠} \frac{\Delta\text{س}(-٢\text{س} + \Delta\text{س})}{(\text{س}^2 + ٣)((\text{س} + \Delta\text{س})^2 + ٣)} \times \frac{١}{\Delta\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ج} \lim_{\Delta\text{س} \to ٠} \frac{-٢\text{س} + \Delta\text{س}}{(\text{س}^2 + ٣)((\text{س} + \Delta\text{س})^2 + ٣)}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ج} \times \frac{-٢\text{س} + ٠}{(\text{س}^2 + ٣)((\text{س} + ٠)^2 + ٣)}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{س}\text{ج}}{(\text{س}^2 + ٣)^2}$$

(٥)

(٦) $ع = \frac{1}{ن^2} + \frac{1}{4ن}$

$ع = ن^{-2} + \frac{1}{4} ن^{-1}$

$$\frac{دع}{دن} = \lim_{\Delta ن \to 0} \frac{(ن+\Delta ن)^{-2} + \frac{1}{4}(ن+\Delta ن)^{-1} - \left(ن^{-2} + \frac{1}{4} ن^{-1}\right)}{\Delta ن}$$

$$\frac{دع}{دن} = \lim_{\Delta ن \to 0} \frac{(ن+\Delta ن)^{-2} + \frac{1}{4}(ن+\Delta ن)^{-1} - ن^{-2} - \frac{1}{4} ن^{-1}}{\Delta ن}$$

$$\frac{دع}{دن} = \lim_{\Delta ن \to 0} \frac{(ن+\Delta ن)^{-2} - ن^{-2} + \frac{1}{4}(ن+\Delta ن)^{-1} - \frac{1}{4} ن^{-1}}{\Delta ن}$$

$$\frac{دع}{دن} = \lim_{\Delta ن \to 0} \frac{(ن+\Delta ن)^{-2} - ن^{-2}}{\Delta ن} + \frac{1}{4} \lim_{\Delta ن \to 0} \frac{(ن+\Delta ن)^{-1} - ن^{-1}}{\Delta ن}$$

$$\frac{دع}{دن} = \lim_{(ن+\Delta ن) \to ن} \frac{(ن+\Delta ن)^{-2} - ن^{-2}}{(ن+\Delta ن) - ن} + \frac{1}{4} \lim_{(ن+\Delta ن) \to ن} \frac{(ن+\Delta ن)^{-1} - ن^{-1}}{(ن+\Delta ن) - ن}$$

$$\frac{دع}{دن} = -2 ن^{-2-1} + \frac{1}{4} \times -1 \times ن^{-1-1}$$

$$\frac{دع}{دن} = -2ن^{-3} - \frac{1}{4} ن^{-2} = \frac{-2}{ن^3} - \frac{1}{4ن^2}$$

تمرين (٢-٣)

جد قيمة $\frac{دص}{دس}$ في كل من الحالات التالية :

① $ص = -٧$

$\frac{دص}{دس} = صفر$

② $ص = س^{٥}$

$\frac{دص}{دس} = ٥ س^{٤}$

③ $ص = \sqrt{س}$

$ص = س^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢} س^{\frac{١}{٢}-١}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}$

④ $ص = ٥ س^{\frac{١}{٥}}$

$\frac{دص}{دس} = ٥ \times \frac{١}{٥} س^{\frac{١}{٥}-١} = س^{-\frac{٤}{٥}}$

⑤ $ص = ٣ جتا س$

$\frac{دص}{دس} = -٣ جا س$

⑥ $ص = \frac{٧}{س^{٤}}$

$ص = ٧ س^{-٤}$

$\frac{دص}{دس} = -٤ \times ٧ س^{-٤-١} = -٢٨ س^{-٥}$

⑦ $ص = ٢ س^{-٣}$

$\frac{دص}{دس} = -٣ \times ٢ س^{-٣-١} = -٦ س^{-٤}$

⑧ $ص = \frac{١}{\sqrt{س}}$

$ص = س^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{دص}{دس} = -\frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}-١}$

$\frac{دص}{دس} = -\frac{١}{٢} س^{-\frac{٣}{٢}}$

تمرين (٢-٤)

جد قيمة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ في كل من الحالات التالية :-

① $\text{ص} = \text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢} + ٥$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤\text{س}^{٣} + ٦\text{س}$

② $\text{ص} = ٥\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + \text{س} + ١$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٥\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١$

③ $\text{ص} = ١ + \text{س} + \text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١ + \text{جتاس}$

④ $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}} + ٥\,\text{جاس}$

$\text{ص} = \text{س}^{-١} + ٥\,\text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{س}^{-٢} + ٥\,\text{جتاس}$

⑤ $\text{ص} = \frac{\text{س}}{١ + \text{جاس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{[\text{المقام}]^{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(١+\text{جاس})(١) - \text{س} \times \text{جتاس}}{(١+\text{جاس})^{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١ + \text{جاس} - \text{س جتاس}}{(١+\text{جاس})^{٢}}$

⑥ $\text{ص} = \text{س}^{٢}\,\text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{الاولى} \times \text{مشتقة الثانية} + \text{الثانية} \times \text{مشتقة الاولى}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^{٢} \times \text{جتاس} + \text{جاس} \times ٢\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^{٢}\,\text{جتاس} + ٢\text{س}\,\text{جاس}$

⑦ $\text{ص} = \frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}-٢)(٢) - [(٢\text{س}+٣)(١)]}{(\text{س}-٢)^{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢\text{س} - ٤ - ٢\text{س} - ٣}{(\text{س}-٢)^{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٧}{(\text{س}-٢)^{٢}}$

⑧ $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}^{٢}-٥\text{س})(٢\text{س}) - [(\text{س}^{٢}-٩)(٢\text{س}-٥)]}{(\text{س}^{٢}-٥\text{س})^{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢\text{س}^{٣} - ١٠\text{س}^{٢} - ٢\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} + ١٨\text{س} - ٤٥}{(\text{س}^{٢}-٥\text{س})^{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٥\text{س}^{٢} + ١٨\text{س} - ٤٥}{(\text{س}^{٢}-٥\text{س})^{٢}}$

⑨ $\text{ص} = (\text{جاس} + ١)(\text{س}^{٢} - \text{س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{جاس}+١)(٢\text{س}-١) + (\text{س}^{٢}-\text{س})(\text{جتاس})$

$= ٢\text{س جاس} - \text{جاس} + ٢\text{س} - ١ + \text{س}^{٢}\,\text{جتاس} - \text{س جتاس}$

(10) $\text{ص} = \frac{3\text{س}^2}{\text{س}+1}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}+1)(6\text{س}) - [(3\text{س}^2)(1)]}{(\text{س}+1)^2}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{6\text{س}^2 + 6\text{س} - 3\text{س}^2}{(\text{س}+1)^2}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{3\text{س}^2 + 6\text{س}}{(\text{س}+1)^2}$

(11) $\text{ص} = \frac{\text{س}^5 + \text{س}^4 + 3\text{س}^2}{2\text{س}+7}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(2\text{س}+7)(5\text{س}^4 + 4\text{س}^3 + 6\text{س}) - [(\text{س}^5 + \text{س}^4 + 3\text{س}^2)(2)]}{(2\text{س}+7)^2}$

$= \frac{10\text{س}^5 + 8\text{س}^4 + 12\text{س}^2 + 35\text{س}^4 + 28\text{س}^3 + 42\text{س} - 2\text{س}^5 - 2\text{س}^4 - 6\text{س}^2}{(2\text{س}+7)^2}$

$= \frac{8\text{س}^5 + 41\text{س}^4 + 28\text{س}^3 + 6\text{س}^2 + 42\text{س}}{(2\text{س}+7)^2}$

(12) $\text{ص} = \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2 + 1}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}^2+1)(2\text{س}) - [(\text{س}^2-1)(2\text{س})]}{(\text{س}^2+1)^2}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{2\text{س}^3 + 2\text{س} - 2\text{س}^3 + 2\text{س}}{(\text{س}^2+1)^2}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{4\text{س}}{(\text{س}^2+1)^2}$

(13) $\text{ص} = \text{جاس} + \text{جتاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس} - \text{جاس}$

(14) $\text{ص} = \text{س}^3\,\text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^3\,\text{جتاس} + (\text{جاس})(3\text{س}^2)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^3\,\text{جتاس} + 3\text{س}^2\,\text{جاس}$

(15) $\text{ص} = \frac{3 + 4\,\text{جاس}}{4 + 3\,\text{جاس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(4 + 3\,\text{جاس})(4\,\text{جتاس}) - [(3 + 4\,\text{جاس})(3\,\text{جتاس})]}{(4 + 3\,\text{جاس})^2}$

(9) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{16\,\text{جتاس} + 12\,\text{جاس}\,\text{جتاس} - 9\,\text{جتاس} - 12\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}{(4 + 3\,\text{جاس})^2}$

$= \frac{7\,\text{جتاس}}{(4 + 3\,\text{جاس})^2}$

(16) $ص = \frac{1 - جاس}{1 + جتاس}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{(1+جتاس)(-جتاس) - [(1-جاس)(-جاس)]}{(1+جتاس)^2}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-جتاس - جتا^2س + جاس + جا^2س}{(1+جتاس)^2}$

(17) اذا كان:
$ص = جاس\, جتاس$

أثبت أن $\frac{دص}{دس} = جتا2س$

الحل

$\frac{دص}{دس} = (جاس)(-جاس) + (جتاس)(جتاس)$

$\frac{دص}{دس} = -جا^2س + جتا^2س$

$\frac{دص}{دس} = جتا^2س - جا^2س$

$\frac{دص}{دس} = جتا2س$

وهو الأيسر

تمرين (2-5)

(1) جد مشتقات الدوال التالية:

(أ) $ص = (2س^2 + 3)^5$

$\frac{دص}{دس} =$ تفاضل القوس × تفاضل ما بداخل القوس

$\frac{دص}{دس} = 5(2س^2+3)^4 (4س)$

$\frac{دص}{دس} = 20س(2س^2+3)^4$

(ب) $ص = \left(2س - \frac{1}{س^3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$ص = (2س - س^{-3})^{\frac{1}{2}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2}(2س - س^{-3})^{-\frac{1}{2}}(2 + 3س^{-4})$

$\frac{دص}{دس} = \left(1 + \frac{3}{2}س^{-4}\right)(2س - س^{-3})^{-\frac{1}{2}}$

(جـ) $ص = (1 + 2س - س^2)^3$

$\frac{دص}{دس} = 3(1+2س-س^2)^2(2-2س)$

$\frac{دص}{دس} = (6-6س)(1+2س-س^2)^2$

(د) $ص = جا^2س$

$ص = (جاس)^2$

$\frac{دص}{دس} =$ تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

$\frac{دص}{دس} = 2جاس\, جتاس$

أو: باستخدام قانون ضرب الدالتين

$\text{ص} = \text{جا}^{2}\text{س}$

$\text{ص} = (\text{جا س})(\text{جا س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{جا س})(\text{جتا س}) + (\text{جا س})(\text{جتا س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جا س جتا س} + \text{جا س جتا س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\ \text{جا س جتا س}$

وهى نفس النتيجة السابقة

(و) $\text{ص} = \frac{\sqrt{\text{س}^{2} + ١}}{\text{جا س}}$

$\text{ص} = \frac{(\text{س}^{2} + ١)^{\frac{1}{2}}}{\text{جا س}}$

* لاحظ أن البسط دالة د الة.

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{جا س})(٢\text{س})(\frac{1}{2})(\text{س}^{2}+١)^{-\frac{1}{2}} - (\text{س}^{2}+١)^{\frac{1}{2}}\ \text{جتا س}}{\text{جا}^{2}\text{س}}$

$= \frac{\text{س}(\text{س}^{2}+١)^{-\frac{1}{2}}\ \text{جا س} - (\text{س}^{2}+١)^{\frac{1}{2}}\ \text{جتا س}}{\text{جا}^{2}\text{س}}$

(ه) $\text{ص} = \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}}$

$\text{ص} = (\text{س} + \text{س}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{2}(\text{س} + \text{س}^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{2}\text{س}^{-\frac{1}{2}})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\text{س}^{-\frac{1}{2}})(\text{س} + \text{س}^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$

(ز) $\text{ص} = \text{جا}(\text{س}^{3} + \text{س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = تفاضل الزاوية × تفاضل النسبة المثلثية

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٣\text{س}^{2} + ١)\ \text{جتا}(\text{س}^{3} + \text{س})$

(ح) $\text{ص} = \frac{\sqrt{\text{س} - ١}}{\text{س} + ١}$

$\text{ص} = \frac{(\text{س} - ١)^{\frac{1}{2}}}{\text{س} + ١}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}+١)(\frac{1}{2})(\text{س}-١)^{-\frac{1}{2}} - (\text{س}-١)^{\frac{1}{2}}(١)}{(\text{س}+١)^{2}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{2})(\text{س}-١)^{-\frac{1}{2}} - (\text{س}-١)^{\frac{1}{2}}}{(\text{س}+١)^{2}}$

② اذا كان ص دالة في ل ، ل دالة في ع و ع دالة في س ،

أثبت أن :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دل}} \cdot \frac{\text{دل}}{\text{دع}} \cdot \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} \times \frac{\Delta \text{ل}}{\Delta \text{ل}} \times \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{س}}$$

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{ل}} \times \frac{\Delta \text{ل}}{\Delta \text{ع}} \times \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{س}}$$

$\Delta \text{س} \to ٠ \Leftarrow \Delta \text{ع} \to ٠ \text{ ، } \Delta \text{ل} \to ٠$

$$\lim_{\Delta \text{س} \to ٠} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \lim_{\Delta \text{ل} \to ٠} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{ل}} \times \lim_{\Delta \text{ع} \to ٠} \frac{\Delta \text{ل}}{\Delta \text{ع}} \times \lim_{\Delta \text{س} \to ٠} \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{س}}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دل}} \times \frac{\text{دل}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

ومن ثم جد :

(أ) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{جا}^٢(\text{س}^٥+٥)\right)$

$\text{ص} = \left(\text{جا}(\text{س}^٥+٥)\right)^٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢(\text{جا}(\text{س}^٥+٥))(٥\text{س}^٤)(\text{جتا}(\text{س}^٥+٥))$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (١٠\text{س}^٤)(\text{جا}(\text{س}^٥+٥))(\text{جتا}(\text{س}^٥+٥))$

(ب) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{ظا}\sqrt{\text{س}^٢+٣}\right) \Leftarrow \text{ص} = \text{ظا}(\text{س}^٢+٣)^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢}(\text{س}^٢+٣)^{-\frac{١}{٢}}(٢\text{س})\,\text{قا}^٢(\text{س}^٢+٣)^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}(\text{س}^٢+٣)^{-\frac{١}{٢}}\,\text{قا}^٢\sqrt{\text{س}^٢+٣}$

١٢

تمرين (٢-٦)

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ في كل من الدوال التالية:

① $٣\text{س} + ٤\text{ص} = ٦$

$٣ + ٤\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

$\frac{١}{٤} \times ٤\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٣ \times \frac{١}{٤}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٣}{٤}$

② $٤\text{س}^٢ + ٣\text{س}\text{ص} = ٠$

$٨\text{س} + ٣\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} \times ٣ = ٠$

$٣\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٨\text{س} - ٣\text{ص}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٨\text{س} - ٣\text{ص}}{٣\text{س}}$

③ $\text{س} + \sqrt{\text{ص}} = \text{جاص}$

$\text{س} + \text{ص}^{\frac{١}{٢}} = \text{جاص}$

$١ + \frac{١}{٢}\text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{١}{٢}\text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{جتاص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -١$

$\text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٢\text{جتاص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\left[\text{ص}^{-\frac{١}{٢}} - ٢\text{جتاص}\right] = -٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢}{\text{ص}^{-\frac{١}{٢}} - ٢\text{جتاص}}$

④ $\text{س} = \text{س}^{2} + \text{ص}^{3}$

$$1 = 2\text{س} + 3\text{ص}^{2}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$3\text{ص}^{2}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 - 2\text{س}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1 - 2\text{س}}{3\text{ص}^{2}}$$

⑤ $\text{س} + \text{ص}\,\text{ظاس} = ٠$

$$1 + \text{ص} \times \text{قا}^{2}\text{س} + \text{ظاس}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$$

$$\text{ظاس}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -1 - \text{ص}\,\text{قا}^{2}\text{س}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1 - \text{ص}\,\text{قا}^{2}\text{س}}{\text{ظاس}}$$

⑥ $\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} = \text{س}\,\text{ص}$

$$2\text{س} + 2\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} \times 1$$

$$2\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{س}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -2\text{س} + \text{ص}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\left[2\text{ص} - \text{س}\right] = -2\text{س} + \text{ص}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-2\text{س} + \text{ص}}{2\text{ص} - \text{س}}$$

⑦ $\text{س}^{4} + 1 = \text{س} + \text{ص}^{2}$

$$4\text{س}^{3} = 1 + 2\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$2\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\text{س}^{3} - 1$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{4\text{س}^{3} - 1}{2\text{ص}}$$

⑧ $\text{س}^{3} + \text{ص}^{3} - 4\text{س}\,\text{ص} = ٠$

$$3\text{س}^{2} + 3\text{ص}^{2}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \left(4\text{س}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} \times 4\right) = ٠$$

$$3\text{س}^{2} + 3\text{ص}^{2}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 4\text{س}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 4\text{ص} = ٠$$

$$3\text{ص}^{2}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 4\text{س}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -3\text{س}^{2} + 4\text{ص}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\left[3\text{ص}^{2} - 4\text{س}\right] = -3\text{س}^{2} + 4\text{ص}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-3\text{س}^{2} + 4\text{ص}}{3\text{ص}^{2} - 4\text{س}}$$

⑨ $\frac{1}{\text{ص}} + \frac{1}{\text{س}} = 1$

$$\text{ص}^{-1} + \text{س}^{-1} = 1$$

$$-\text{ص}^{-1-1}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + -\text{س}^{-1-1} = \text{صفر}$$

$$-\text{ص}^{-2}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^{-2}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{س}^{-2}}{\text{ص}^{-2}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{\text{ص}^{2}}{\text{س}^{2}}$$

(١٠) $\text{ص} = \text{جا}(\text{س ص})$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \left(\text{س}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص}\right)\left(\text{جتا}(\text{س ص})\right)$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س جتا}(\text{س ص})\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص جتا}(\text{س ص})$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{س جتا}(\text{س ص})\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص جتا}(\text{س ص})$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\left[1 - \text{س جتا}(\text{س ص})\right] = \text{ص جتا}(\text{س ص})$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص جتا}(\text{س ص})}{1 - \text{س جتا}(\text{س ص})}$$

(١١) $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = 1$

$$\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{ص}^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\frac{1}{2}\,\text{س}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,\text{ص}^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$$

$$\frac{1}{2}\,\text{ص}^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{1}{2}\,\text{س}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{ص}^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\,\text{س}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\,\frac{\text{س}^{-\frac{1}{2}}}{\text{ص}^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\,\frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\text{س}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\sqrt{\frac{\text{ص}}{\text{س}}}$$

(١٢) $\text{ص} = \dfrac{\text{جاس}}{\text{جتاس} + 1}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{جتاس}+1)(\text{جتاس}) - (\text{جاس})(-\text{جاس})}{(\text{جتاس}+1)^2}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جتاس} + \text{جا}^2\text{س}}{(\text{جتاس}+1)^2}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1 + \text{جتاس}}{(\text{جتاس}+1)^2}$$

(١٣) $\text{جاس} + \text{جتاص} = ٠$

$$\text{جتاس} - \text{جاص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$$

$$-\text{جاص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جتاس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاص}}$$

(١٤)

(١٤) س جتا ص = جا(س+ص)

−س جا ص دص/دس + جتا ص = (١ + دص/دس) جتا(س + ص)

−س جا ص دص/دس + جتا ص = جتا(س+ص) + جتا(س+ص) دص/دس

−س جا ص دص/دس − جتا(س+ص) دص/دس = جتا(س+ص) − جتا ص

دص/دس (−س جا ص − جتا(س+ص)) = جتا(س+ص) − جتا ص

دص/دس = (جتا(س+ص) − جتا ص) / (−س جا ص − جتا(س+ص))

(١٥) اذا كان:

س^٢ + ص^٢ − ٢س − ٤ص = ٥

فجد دص/دس عند النقطة (٢، −١)

٢س + ٢ص دص/دس − ٢ − ٤ دص/دس = ٠

٢ص دص/دس − ٤ دص/دس = −٢س + ٢

بالقسمة على ٢

ص دص/دس − ٢ دص/دس = −س + ١

دص/دس (ص − ٢) = −س + ١

دص/دس = (−س + ١) / (ص − ٢)

عند (٢، −١)

دص/دس = (−٢ + ١) / (−١ − ٢) = −١ / −٣

= −١ / −٣ = ١ / ٣

(١٦) اذا كان:

٣ص جا س + ٥ص^٢ جتا س − س^٣ = ٠

جد دص/دس.

٣ص جتا س + جا س × ٣ دص/دس + ٥ص^٢ × −جا س +

جتا س × ١٠ص دص/دس − ٣س^٢ = ٠

٣ جا س دص/دس + ١٠ص جتا س دص/دس = ٥ص^٢ جا س −

٣ص جتا س + ٣س^٢

دص/دس (٣ جا س + ١٠ص جتا س) = ٥ص^٢ جا س − ٣ص جتا س + ٣س^٢

دص/دس = (٥ص^٢ جا س − ٣ص جتا س + ٣س^٢) / (٣ جا س + ١٠ص جتا س)

(١٧) جد دص/دس في كل من الآتي:

(أ) √ص + √س = ٢

ص^(١/٢) + س^(١/٢) = ٢

(١٥)

١/٢ ص^(−١/٢) دص/دس + ١/٢ س^(−١/٢) = صفر

ص^(−١/٢) دص/دس = − س^(−١/٢)

دص/دس = − س^(−١/٢) / ص^(−١/٢)

(ب) $س^{٣} - ٢س ص^{٢} + ص^{٣} = ٧$

$$٣س^{٢} - ٢س \times ٢ص \frac{دص}{دس} + ص^{٢} \times -٢ + ٣ص^{٢} \frac{دص}{دس} = ٠$$

$$-٤س ص \frac{دص}{دس} + ٣ص^{٢} \frac{دص}{دس} = -٣س^{٢} + ٢ص^{٢}$$

$$\frac{دص}{دس}\left(-٤س ص + ٣ص^{٢}\right) = -٣س^{٢} + ٢ص^{٢}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{-٣س^{٢} + ٢ص^{٢}}{-٤س ص + ٣ص^{٢}}$$

(ج) $(س + ص)^{٤} = س^{٤} + ص^{٤}$

$$٤(س + ص)^{٣}\left(١ + \frac{دص}{دس}\right) = ٤س^{٣} + ٤ص^{٣} \frac{دص}{دس}$$

بالقسمة على ٤

$$(س + ص)^{٣}\left(١ + \frac{دص}{دس}\right) = س^{٣} + ص^{٣} \frac{دص}{دس}$$

$$(س + ص)^{٢}(س + ص)\left(١ + \frac{دص}{دس}\right) = س^{٣} + ص^{٣} \frac{دص}{دس}$$

$$\left(س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}\right)\left(س + س \frac{دص}{دس} + ص + ص \frac{دص}{دس}\right) = س^{٣} + ص^{٣} \frac{دص}{دس}$$

$$س^{٣} + س^{٣} \frac{دص}{دس} + س^{٢}ص + س^{٢}ص \frac{دص}{دس} + ٢س^{٢}ص + ٢س^{٢}ص \frac{دص}{دس} + ٢س ص^{٢} + ٢س ص^{٢} \frac{دص}{دس} +$$
$$س ص^{٢} + س ص^{٢} \frac{دص}{دس} + ص^{٣} + ص^{٣} \frac{دص}{دس} = س^{٣} + ص^{٣} \frac{دص}{دس}$$

$$س^{٣} \frac{دص}{دس} + ٣س^{٢}ص \frac{دص}{دس} + ٣س^{٢}ص + ٣س ص^{٢} \frac{دص}{دس} + ٣س ص^{٢} + ص^{٣} = صفر$$

$$\frac{دص}{دس}\left(س^{٣} + ٣س^{٢}ص + ٣س ص^{٢}\right) = -٣س^{٢}ص - ٣س ص^{٢} - ص^{٣}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{-٣س^{٢}ص - ٣س ص^{٢} - ص^{٣}}{س^{٣} + ٣س^{٢}ص + ٣س ص^{٢}}$$

(د) $قتا(س+ص) = س$

$(1+\frac{دص}{دس})(-ظتا(س+ص)قتا(س+ص)) = 1$

$-ظتا(س+ص)قتا(س+ص) - ظتا(س+ص)قتا(س+ص)\frac{دص}{دس} = 1$

$ظتا(س+ص)قتا(س+ص)\frac{دص}{دس} = -1 - ظتا(س+ص)قتا(س+ص)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-1 - ظتا(س+ص)قتا(س+ص)}{ظتا(س+ص)قتا(س+ص)}$

(18) أثبت أن :-

$\frac{د}{دس}(جا^{-1}س) = \frac{1}{\sqrt{1-س^2}}$

$ص = جا^{-1}س$

$\therefore جا ص = س$

$جتا ص \frac{دص}{دس} = 1$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{جتا ص}$

من العلاقة الأساسية

$جتا^2 ص = 1 - جا^2 ص$

$\sqrt{جتا^2 ص} = \sqrt{1 - جا^2 ص}$

$جتا ص = \sqrt{1 - جا^2 ص}$

$جتا ص = \sqrt{1 - س^2}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{1}{\sqrt{1-س^2}}$

تمرين (2-7)

(1) جد المشتقة الثانية لكل من الدوال التالية عند النقطة المبينة أمام كل منها:

(أ) $ص = س + \frac{1}{س}$ عند $(1، 2)$

$ص = س + س^{-1}$

$\frac{دص}{دس} = 1 - س^{-2}$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = 2س^{-3}$

عند $س = 1$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = 2(1)^{-3} = 2$

(ب) $ص = جا س - جتا س$ ، عند $س = \frac{\pi}{4}$

$\frac{دص}{دس} = جتا س + جا س$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = -جا س + جتا س$

عند $س = \frac{\pi}{4} = 45°$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = صفر$

(17)

(ج) ص = س جتا ٢س

عند س = $\frac{\pi}{٢}$

دص/دس = (س)(٢)(−جا ٢س) + (جتا ٢س)(١)

دص/دس = −٢س جا ٢س + جتا ٢س

د²ص/دس² = (−٢س)(٢)(جتا ٢س) + (جا ٢س)(−٢) + (٢)(−جا ٢س)

د²ص/دس² = −٤س جتا ٢س − ٢جا ٢س − ٢جا ٢س

د²ص/دس² = −٤س جتا ٢س − ٤جا ٢س

عند س = $\frac{\pi}{٢}$

د²ص/دس² = −٤($\frac{\pi}{٢}$) جتا(٢$\frac{\pi}{٢}$) − ٤جا ٢$\frac{\pi}{٢}$

د²ص/دس² = −٢π جتا π − ٤جا π

د²ص/دس² = −٢π × −١ − ٤ × صفر

د²ص/دس² = ٢π

(٢) اذا كان:

ص = ٣س⁴ − ٢س³ + ٤س

فجد:

٢ دص/دس − ٥ د²ص/دس² + ٣ د³ص/دس³ عند س = ١

دص/دس = ١٢س³ − ٦س² + ٤

د²ص/دس² = ٣٦س² − ١٢س

د³ص/دس³ = ٧٢س − ١٢

٢ دص/دس − ٥ د²ص/دس² + ٣ د³ص/دس³ =

٢(١٢س³ − ٦س² + ٤) − ٥(٣٦س² − ١٢س) + ٣(٧٢س − ١٢) =

٢٤س³ − ١٢س² + ٨ − ١٨٠س² + ٦٠س + ٢١٦س − ٣٦ =

(١٨)

٢٤س³ − ١٩٢س² + ٢٧٦س − ٢٨

عند س = ١

(٢٤)(١)³ − (١٩٢)(١) + (٢٧٦)(١) − ٢٨

= ٢٤ − ١٩٢ + ٢٧٦ − ٢٨ = ٨٠

(٣) إذا كان:

$\text{ص} = \frac{1}{3}\text{س}^3 + \frac{1}{12}\text{س}^2 - \frac{1}{6}\text{س}$

فجد قيم س التي يكون عندها $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

ثم أحسب قيم $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ عند هذه القيم

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^2 + \frac{1}{6}\text{س} - \frac{1}{6}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{س}^2 + \frac{1}{6}\text{س} - \frac{1}{6} = 0$$

$$6\text{س}^2 + \text{س} - 1 = 0$$

$$(3\text{س} - 1)(2\text{س} + 1) = 0$$

إما $3\text{س} - 1 = 0$

$\therefore \text{س} = \frac{1}{3}$

أو $2\text{س} + 1 = 0$

$\therefore \text{س} = \frac{-1}{2}$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2\text{س} + \frac{1}{6}$$

عند $\text{س} = \frac{1}{3}$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}$$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4+1}{6}$$

$$= \frac{5}{6}$$

عند $\text{س} = \frac{-1}{2}$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{6}$$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = -1 + \frac{1}{6} = \frac{-6+1}{6}$$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{-5}{6}$$

(٤) إذا كان $\text{ص} = \text{جا}3\text{س}$

أثبت أن $\frac{\text{د}^4\text{ص}}{\text{دس}^4} = 81\text{ص}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\,\text{جتا}3\text{س}$$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = -9\,\text{جا}3\text{س}$$

$$\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{دس}^3} = -27\,\text{جتا}3\text{س}$$

$$\frac{\text{د}^4\text{ص}}{\text{دس}^4} = -27 \times 3 \times -\text{جا}3\text{س}$$

$$\frac{\text{د}^4\text{ص}}{\text{دس}^4} = 81\,\text{جا}3\text{س}$$

$$\frac{\text{د}^4\text{ص}}{\text{دس}^4} = 81\text{ص}$$

⑤ إذا كان: $ص = \frac{1}{س+1}$

أثبت أن:

$\frac{د^3ص}{دس^3} + 6ص^4 = صفر$

$ص = (س+1)^{-1}$

$\frac{دص}{دس} = -(س+1)^{-2}(1)$

$\frac{دص}{دس} = -(س+1)^{-2}$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = 2(س+1)^{-3}$

$\frac{د^3ص}{دس^3} = -6(س+1)^{-4}$

$\frac{د^3ص}{دس^3} + 6ص^4 =$

$-6(س+1)^{-4} + 6\left((س+1)^{-1}\right)^4$

$= -6(س+1)^{-4} + 6(س+1)^{-4}$

$=$ صفر #

⑥ إذا كان: $ص = س ظاس$

أثبت أن:

$\frac{د^2ص}{دس^2} = 2(1+ص)قا^2س$

$\frac{دص}{دس} = س قا^2س + ظا^2س$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = س \times 2قاس \times قاس ظاس + قا^2س + قا^2س$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = 2س قا^2س ظاس + 2قا^2س$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = 2قا^2س(س ظاس + 1)$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = 2(1+ص)قا^2س$

#

⑦ اذا كان: $س^2 + ص^2 = 1$

أثبت أن:

$$ص^3 \frac{د^2ص}{دس^2} + 1 = 0$$

* تعدل كالتالي:

اثبت أن: $ص^3 \frac{د^2ص}{دس^2} + 1 = 0$

الحل

$$2س + 2ص \frac{دص}{دس} = 0$$

بالقسمة على 2

$$س + ص \frac{دص}{دس} = 0 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-س}{ص}$$

وبالتفاضل

$$1 + ص \frac{د^2ص}{دس^2} + \frac{دص}{دس} \times \frac{دص}{دس} = 0$$

$$1 + ص \frac{د^2ص}{دس^2} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 = 0 \quad \times ص^2$$

$$ص^2 + ص^3 \frac{د^2ص}{دس^2} + ص^2 \left(\frac{-س}{ص}\right)^2 = 0$$

∴ $ص^2 + س^2 + ص^3 \frac{د^2ص}{دس^2} = 0$

∴ $ص^3 \frac{د^2ص}{دس^2} + 1 = 0$

حل آخر:

$$2س + 2ص \frac{دص}{دس} = 0 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-س}{ص}$$

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{ص \times -1 + س \frac{دص}{دس}}{ص^2}$$

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{-ص + س \times \frac{-س}{ص}}{ص^2} = \frac{-ص - \frac{س^2}{ص}}{ص^2}$$

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{-ص^2 - س^2}{ص^3} = \frac{-(س^2 + ص^2)}{ص^3}$$

∴ $\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{-1}{ص^3}$

∴ $ص^3 \frac{د^2ص}{دس^2} + 1 = ص^3 \times \frac{-1}{ص^3} + 1$

$= -1 + 1 = 0$

⑧ اذا كان: ص = جتا س، أثبت أن $\left(\frac{دص}{دس}\right)^2 - \frac{د^2ص}{دس^2} = 1$

* تعدل كالتالي: اثبت أن $\left(\frac{دص}{دس}\right)^2 + \left(\frac{د^2ص}{دس^2}\right)^2 = 1$

الحل

$$\frac{دص}{دس} = -جا س \quad ، \quad \frac{د^2ص}{دس^2} = -جتا س$$

$$\left(\frac{دص}{دس}\right)^2 + \left(\frac{د^2ص}{دس^2}\right)^2 = (-جا س)^2 + (-جتا س)^2$$

$= جا^2 س + جتا^2 س = 1$ وهو الطرف الأيسر

مع خالص الأماني

تطبيقات التفاضل

تمرين (٣-١)

① جد ميل المماس لمنحنى الدالة د(س) = س² - ٣س + ١ عند النقطة (٠،١)

م = دص/دس

م = ٢س - ٣

عند (٠،١)

م = ٢×٠ - ٣

م = -٣

② جد ميل منحنى الدالة: د(س) = ٣ - س عند النقطة س = ١

م = دص/دس

م = -١

عند س = ١ ، م = -١

③ اكتب معادلة المماس و العمودي على المماس لمنحنى الدالة: ص = ٣س² عند س = ٢

ميل المماس = دص/دس

م = ٦س

عند س = ٢

م = ٦×٢

م = ١٢

ص = ٣(٢)² = ١٢

∴ النقطة (٢،١٢)

∴ معادلة المماس هي:

ص - ص١ = م(س - س١)

ص - ١٢ = ١٢(س - ٢)

ص - ١٢ = ١٢س - ٢٤

١٢س - ص - ١٢ = ٠

ميل العمودي = -١/١٢

معادلة العمودي هي:

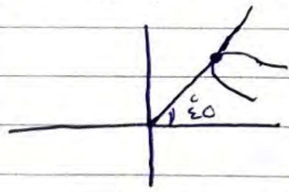
ص - ص١ = م(س - س١)

ص - ١٢ = -١/١٢ (س - ٢)

١٢ص - ١٤٤ = -س + ٢

س + ١٢ص - ١٤٦ = ٠

④ اذا كان المماس لمنحنى الدالة د(س) = س² + ٥س عند س = س١ يصنع مع محور السينات الموجب زاوية قياسها ٤٥° ، جد إحداثي نقطة التماس.



م = دص/دس ⟸ م = ٢س + ٥

ايضا م = ظاθ ⟸ م = ظا٤٥° = ١

∴ ٢س + ٥ = ١

٢س = ١ - ٥

٢س = -٤ ⟸ س = -٢

ص = (-٢)² + ٥×-٢

ص = ٤ - ١٠ = -٦

∴ احداثي نقطة التماس (-٢،-٦)

⑤ جد احداثيات النقطة الواقعة على المنحنى:

$\text{ص} = \text{س}^{2} + ٥\text{س} + ٣$

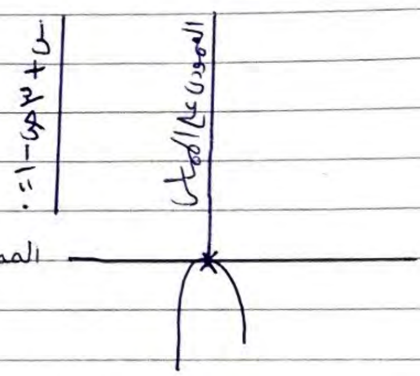
بحيث يكون العمودي للمماس عندها موازيا المستقيم

$\text{ص} = \frac{-\text{س} + ١}{٣}$

معادلة المستقيم

$-\text{س} + ١ = ٣\text{ص}$

$\text{س} + ٣\text{ص} - ١ = ٠$



ميل المستقيم = $\frac{-١}{٣}$

∴ ميل العمودي = $\frac{-١}{٣}$ (شرط التوازي)

∴ ميل المماس = ٣ (شرط التعامد)

ايضا ميل المماس = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} + ٥$

∴ $٢\text{س} + ٥ = ٣$

$٢\text{س} = -٢ \Leftarrow \text{س} = -١$

$\text{ص} = (-١)^{2} + ٥ \times -١ + ٣ = -١$

∴ احداثي النقطة $(-١ ، -١)$

⑥ جد معادلتي المماس والعمودي عليه لمنحنى الدالة:

ص = جاس + جتاس

عندما $\text{س} = \frac{٣\pi}{٤}$

ميل المماس = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

م = جتاس − جاس

عند $\text{س} = \frac{٣\pi}{٤}$

م = جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ − جا $\frac{٣\pi}{٤}$

م = جتا ١٣٥° − جا ١٣٥°

$\text{م} = \frac{-١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}} = -\sqrt{٢}$

ص = جا $\frac{٣\pi}{٤}$ + جتا $\frac{٣\pi}{٤}$

ص = جا ١٣٥° + جتا ١٣٥°

$\text{ص} = \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{-١}{\sqrt{٢}} = \text{صفر}$

∴ النقطة $(\frac{٣\pi}{٤} ، \text{صفر})$

∴ معادلة المماس:

$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١})$

$\text{ص} - ٠ = -\sqrt{٢}(\text{س} - \frac{٣\pi}{٤})$

$\text{ص} = -\sqrt{٢}\text{س} + \frac{٣\sqrt{٢}\pi}{٤}$

$\sqrt{٢}\text{س} + \text{ص} - \frac{٣\sqrt{٢}\pi}{٤} = \text{صفر}$

$٤\sqrt{٢}\text{س} + ٤\text{ص} - ٣\sqrt{٢}\pi = \text{صفر}$

∴ ميل العمودي = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ معادلة العمودي: $\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١})$

$\text{ص} - ٠ = \frac{١}{\sqrt{٢}}(\text{س} - \frac{٣\pi}{٤})$

$\sqrt{٢}\text{ص} = \text{س} - \frac{٣\pi}{٤} \Leftarrow \text{س} - \sqrt{٢}\text{ص} - \frac{٣\pi}{٤} = $ ∴

(٧) جد معادلتي المماسين للمنحني $س^٢ + ص^٢ = ٥٢$

الموازيين للمستقيم

$٢س + ٣ص = ج$

ميل المماس $= \frac{دص}{دس}$

$٢س + ٢ص \frac{دص}{دس} = صفر$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-٢س}{٢ص} = \frac{-س}{ص}$

ميل المستقيم $٢س + ٣ص - ج = ٠$

$م = \frac{-٢}{٣}$

∴ ميل المماس $= \frac{-٢}{٣}$ (شرط التوازي)

∴ $\frac{-س}{ص} = \frac{-٢}{٣}$

∴ $٣س = ٢ص$

∴ $س = \frac{٢}{٣} ص$

عوض قيمة س في معادلة المنحني

$(\frac{٢}{٣} ص)^٢ + ص^٢ = ٥٢$

$\frac{٤}{٩} ص^٢ + ص^٢ = ٥٢$

$\frac{١٣}{٩} ص^٢ = ٥٢$

$ص^٢ = \frac{٥٢ \times ٩}{١٣}$

$ص^٢ = ٣٦$

$ص = \pm ٦$

عندما $ص = ٦ \Leftarrow س = \frac{٢}{٣} \times ٦ = ٤$

∴ نقطة التماس للمماس الاول $(٤ ، ٦)$

∴ معادلة المماس الاول:

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٦ = \frac{-٢}{٣}(س - ٤)$

$٣ص - ١٨ = -٢س + ٨$

$٢س + ٣ص - ٢٦ = ٠$

عندما $ص = -٦ \Leftarrow س = \frac{٢}{٣} \times -٦$

$س = -٤$

∴ نقطة التماس للمماس الثاني $(-٤ ، -٦)$

∴ معادلة المماس الثاني:

$ص - -٦ = \frac{-٢}{٣}(س - -٤)$

$٣ص + ١٨ = -٢س - ٨$

$٢س + ٣ص + ٢٦ = ٠$

(٨) جد معادلتي المماسين للمنحني $س ص = ٨$ واللذين يوازيان المستقيم $ص + ٢س = ٩$

$م = \frac{دص}{دس}$

$س \frac{دص}{دس} + ص = ٠ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-ص}{س}$

ميل المستقيم $= \frac{-٢}{١} = -٢$

ميل المماس = ميل المستقيم

$\frac{-ص}{س} = -٢$

∴ $ص = ٢س \leftarrow (١)$

عوض (١) في معادلة المنحني

$س \times ٢س = ٨$

$٢س^٢ = ٨ \Leftarrow س^٢ = ٤$

∴ $س = \pm ٢$

عندما س = ٢

ص = ٢ × ٢ = ٤

نقطة التماس (٢، ٤)

عندما س = -٢

ص = ٢ × -٢ = -٤

نقطة التماس (-٢، -٤)

معادلة المماس الأول:

ص - ص$_1$ = م(س - س$_1$)

ص - ٤ = -٢(س - ٢)

ص - ٤ = -٢س + ٤

٢س + ص - ٨ = ٠

معادلة المماس الثاني:

ص - -٤ = -٢(س - -٢)

ص + ٤ = -٢س - ٤

٢س + ص + ٨ = ٠

(٩) اذا كان المستقيم

١٣س - ص - ٧ = ٠

يمس المنحنى أس^2 + ب س^2

عند النقطة (١، ٦) فما قيمة أ و ب.

تحول معادلة المنحنى إلى

أس^2 + ب س

ميل المماس = $\frac{دص}{دس}$

م = ٢أس + ب

عند س = ١

م = ٢أ + ب

ميل المستقيم = $\frac{-١٣}{-١}$ = ١٣

∴ ٢أ + ب = ١٣ ← (١)

النقطة (١، ٦) تحقق معادلة المنحنى

٦ = أ(١)^2 + ب × ١

أ + ب = ٦ ← (٢)

بحل (١) و (٢) آنيا

٢أ + ب = ١٣ ← (١)

أ + ب = ٦ ← (٢)

أ = ٧

بالتعويض في (٢)

٧ + ب = ٦

ب = -١

(١٠) جد معادلة العمودي للمنحنى

ص = س^2 - س عند س = ٢

ص = (٢)^2 - ٢ = ٢

∴ نقطة التماس (٢، ٢)

ميل المماس = $\frac{دص}{دس}$

م = ٢س - ١

عند س = ٢

م = ٢ × ٢ - ١

م = ٣

∴ ميل العمودي = $-\frac{١}{٣}$

∴ معادلة العمودي هي:

ص - ص$_1$ = م(س - س$_1$)

ص - ٢ = $-\frac{١}{٣}$(س - ٢)

٣ص - ٦ = -س + ٢

س + ٣ص - ٨ = ٠

(11) جد الزاوية بين المنحنيين

$د_1(س) = س^2$

$د_2(س) = \sqrt{س}$

عند النقطة (1،1)

* المقصود الزاوية بين المماسين للمنحنيين

ميل المماس للمنحني الاول ($م_1$) $= \frac{دص}{دس}$

$م_1 = 2س$

عند س = 1

$م_1 = 2 \times 1 = 2$

ميل المماس للمنحني الثاني ($م_2$) $= \frac{دص}{دس}$

$م_2 = \frac{1}{2} س^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{س}}$

عند س = 1

$م_2 = \frac{1}{2 \times \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

$ظا ه = \frac{م_2 - م_1}{1 + م_1 م_2}$

$ظا ه = \frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} \div 2$

$= -\frac{3}{4}$

$\therefore ه = ظا^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$

تمرين (3-3)

(1) اذا كانت المسافة ف لجسم مادي متحرك تعطى ب

$ف = 5ن^3 + 2ن^2 + 3ن$

جد السرعة والعجلة اللحظية لهذا الجسم بدلالة ن .

$ع = \frac{دف}{دن}$

$ع = 15ن^2 + 4ن + 3$ وحدة/ث

$جـ = \frac{دع}{دن}$

$جـ = 30ن + 4$ وحدة/$ث^2$

(2) اذا كانت المسافة ف لجسم متحرك تعطى ب :

$ف = أن^3 + ب ن$ (أ، ب ثابتان)

وكانت السرعة عند ن = 3 ثانية تساوي 10 متر/ث وكانت العجلة عند ن = 1 ثانية تساوي 5 متر/$ث^2$ جد أ و ب .

$ع = \frac{دف}{دن} = 3أن^2 + ب$

$ع = 10$ عند ن = 3

$\therefore 3أ(3)^2 + ب = 10$

$27أ + ب = 10 \leftarrow (1)$

$جـ = \frac{دع}{دن} = 6أن$

$جـ = 5$ عند ن = 1

$\therefore 6أ \times 1 = 5$

$6أ = 5 \Leftarrow أ = \frac{5}{6}$

عوض في ①

٢٧ × ٥/٦ + ب = ١٠

٤٥/٢ + ب = ٢٠

٤٥ + ٢ب = ٢٠

٢ب = ٢٠ − ٤٥

٢ب/٢ = −٢٥/٢

ب = −٢٥/٢

③ يتحرك جسم في خط مستقيم فيقطع مسافة ف قدما بعد ن ثانية بحيث:

ف = ن⁴ − ٢ن³ + ن² − ٥

جد الزمن الذي تنعدم فيه سرعته وعجلته عندئذ.

ع = دف/دن

ع = ٤ن³ − ٦ن² + ٢ن

تنعدم السرعة ← ع = ٠

∴ ٤ن³ − ٦ن² + ٢ن = ٠

٢ن(٢ن² − ٣ن + ١) = ٠

٢ن ، −١

ن ، −١

(٢ن)(٢ن − ١)(ن − ١) = ٠

إما ٢ن = ٠ ⇐ ن = صفر

أو ٢ن − ١ = ٠ ⇐ ن = ١/٢

أو ن − ١ = ٠ ⇐ ن = ١

∴ الزمن الذي تنعدم فيه السرعة هو ١/٢ و ١ ثانية

جـ = دع/دن

جـ = ١٢ن² − ١٢ن + ٢

العجلة عند ن = ١/٢

جـ = ١٢(١/٢)² − ١٢ × ١/٢ + ٢

جـ = ٣ − ٦ + ٢ = −١ قدم/ث²

العجلة عند ن = ١

جـ = ١٢(١)² − ١٢ × ١ + ٢

جـ = ٢ قدم/ث²

④ يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث يكون بعده بالأمتار بعد ن ثانية من النقطة و هو

ف = ٢ن³ − ٢١ن² + ٦٠ن − ٢

جد أقصى بعد يصل إليه الجسيم من النقطة و ، وعجلة الجسيم عندئذ.

ع = دف/دن

ع = ٦ن² − ٤٢ن + ٦٠

عند أقصى بعد ع = صفر

٦ن² − ٤٢ن + ٦٠ = ٠

ن² − ٧ن + ١٠ = ٠

(ن − ٥)(ن − ٢) = ٠

إما ن − ٥ = ٠ ⇐ ن = ٥ ثواني

أو ن − ٢ = ٠ ⇐ ن = ٢ ثانية

عند ن = ٥

ف = ٢(٥)³ − ٢١(٥)² + ٦٠ × ٥ − ٢

ف = ٢ × ١٢٥ − ٢١ × ٢٥ + ٣٠٠ − ٢ = ٢٣ متر

عند ن = ٢

ف = ٢(٢)³ − ٢١(٢)² + ٦٠ × ٢ − ٢

ف = ٢ × ٨ − ٢١ × ٤ + ١٢٠ − ٢ = ٥٠ متر

جـ = دع/دن = ١٢ن − ٤٢

عند ن = ٥

جـ = ١٢ × ٥ − ٤٢ = ١٨ متر/ث²

عند ن = ٢

جـ = ١٢ × ٢ − ٤٢ = −١٨ متر/ث²

⑤ يتحرك حجر رأسيا لأعلى ولأسفل في خط مستقيم بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بعد ن ثانية هو:
ف = ١٢٨ن − ١٦ن² قدم جد:

أ) سرعة الحجر عند أي لحظة

ع = دف / دن

ع = ١٢٨ − ٣٢ن

ب) أقصى ارتفاع يصل إليه الحجر

عند أقصى ارتفاع ع = صفر

١٢٨ − ٣٢ن = صفر

١٢٨ = ٣٢ن

ن = ١٢٨ / ٣٢ ⟸ ن = ٤ ثوان

∴ ف = ١٢٨(٤) − ١٦(٤)²

ف = ٥١٢ − ٢٥٦ = ٢٥٦ قدم

جـ) سرعة الحجر الابتدائية

ن = صفر

ع = ١٢٨ − ٣٢ × صفر

ع. = ١٢٨ قدم/ث

⑥ يتحرك جسم بحيث تعطى إزاحته ف عن نقطة ثابتة بدلالة الزمن بالعلاقة:

ف = أ جتا(ب ن + هـ) حيث أ، ب، هـ ثوابت،

أثبت أن العجلة تتناسب طرديا مع مقدار الإزاحة.

ع = دف / دن

ع = أ × ب × −جا(ب ن + هـ)

ع = −أ ب جا(ب ن + هـ)

جـ = دع / دن

جـ = −أ ب (ب × جتا(ب ن + هـ))

جـ = −أ ب² جتا(ب ن + هـ)

لكن ف = أ جتا(ب ن + هـ)

∴ جـ = −ب² ف (ب² ثابت)

∴ جـ ∝ −ف

أي: ∴ العجلة تتناسب طرديا مع مقدار الإزاحة.

نهاية باب التفاضل وتطبيقاته

مع خالص الأماني الطيبة

حل تمارين التكامل

و

التكامل المحدد مع التطبيقات

إعداد:
مجموعة المنهج السوداني

مبادرة الرياضيات محلية
جبل أولياء

بالتعاون مع الأستاذ:
أبومزن مصطفى عوض الله

تمرين (٤-١)

① جد التكاملات الآتية :-

أ/ $\int \text{س}^{٧}\ \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{٧+١}}{٧+١} + \text{ث} = \frac{١}{٨}\text{س}^{٨} + \text{ث}$

ب/ $\int \left(\frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س}^{٢}}\right) \text{دس}$

$= \int \left(\frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right) \text{دس}$

$= \int \left(\text{س} - \text{س}^{-٢}\right) \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{١+١}}{١+١} - \frac{\text{س}^{-٢+١}}{-٢+١} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{س}^{-١} + \text{ث}$

ج/ $\int \left(\frac{١}{\text{ن}} + \text{ن}\right)^{٢} \text{دن}$

$= \int \left(\text{ن}^{-١} + \text{ن}\right)^{٢} \text{دن}$

$= \int \left(\text{ن}^{-٢} + ٢ + \text{ن}^{٢}\right) \text{دن}$

$= \frac{\text{ن}^{-٢+١}}{-٢+١} + ٢\text{ن} + \frac{\text{ن}^{٢+١}}{٢+١} + \text{ث}$

$= -\text{ن}^{-١} + ٢\text{ن} + \frac{١}{٣}\text{ن}^{٣} + \text{ث}$

د/ $\int (١ - ٣\text{س})(١ + \text{س})\ \text{دس}$

$= \int \left(١ + \text{س} - ٣\text{س} - ٣\text{س}^{٢}\right) \text{دس}$

$= \int \left(١ - ٢\text{س} - ٣\text{س}^{٢}\right) \text{دس}$

$= \text{س} - \frac{٢\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{٣\text{س}^{٣}}{٣} + \text{ث}$

$= \text{س} - \text{س}^{٢} - \text{س}^{٣} + \text{ث}$

هـ/ $\int \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \left(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١\right) \text{دس}$

$= \text{ظاس} - \text{س} + \text{ث}$

و/ $\int \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

تلميح : $\text{جتا}٢\text{س} = ١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س}$

$= \int \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س}\right) \text{دس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٤}\text{جا}٢\text{س} + \text{ث}$

تمرين (٤-٢)

① ص = د(س) منحنى يمر بالنقطة (٤، ٣) ويساوي ميله ٢س+١ عند كل نقطة (س، ص). جد د(س)

$$\text{ص} = \int \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\text{ص} = \int (\text{٢س} + ١)\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{٢س}^٢}{٢} + \text{س} + \text{ث}$$

عوض ص = ٣ ، س = ٤

$$٣ = (٤)^٢ + ٤ + \text{ث}$$

$$٣ = ٢٠ + \text{ث}$$

$$\therefore \text{ث} = ٣ - ٢٠ \Leftarrow \text{ث} = -١٧$$

$$\therefore \text{ص} = \text{س}^٢ + \text{س} - ١٧$$

② جد معادلة المنحنى الذي ميله عند أي نقطة عليه يساوي $(٢-\text{س})^٢$ اذا كان المنحنى يمر بالنقطة (٢، ٣)

$$\text{ص} = \int \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\text{ص} = \int (٢-\text{س})^٢\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \int (٤ - \text{٤س} + \text{س}^٢)\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{٤س} - \frac{\text{٤س}^٢}{٢} + \frac{\text{س}^٣}{٣} + \text{ث}$$

$$\text{ص} = \text{٤س} - \text{٢س}^٢ + \frac{١}{٣}\text{س}^٣ + \text{ث}$$

$$٣ = ٤(٢) - ٢(٢)^٢ + \frac{١}{٣}(٢)^٣ + \text{ث}$$

$$٣ = ٨ - ٨ + \frac{٨}{٣} + \text{ث}$$

$$\text{ث} = ٣ - \frac{٨}{٣} \Leftarrow \text{ث} = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore \text{ص} = \text{٤س} - \text{٢س}^٢ + \frac{١}{٣}\text{س}^٣ + \text{ث}$$

② اذا كان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س}^٢$ جد العلاقة بين س و ص عندما ص = ١ ، س = ١

$$\text{ص} = \int \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\text{ص} = \int \text{٢س}^٢\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{٢س}^٣}{٣} + \text{ث}$$

عوض ص = ١ ، س = ١

$$١ = \frac{٢}{٣}(١)^٣ + \text{ث}$$

$$\text{ث} = ١ - \frac{٢}{٣}$$

$$\text{ث} = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{٢}{٣}\text{س}^٣ + \frac{١}{٣}$$

$$\text{٣ص} = \text{٢س}^٣ + ١$$

③ ص = د(س) منحنى يمر بالنقطة (٣، ٤) ويساوي ميله ٢س−١ عند كل نقطة (س، ص) جد د(س)

$$\text{د(س)} = \int \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\text{د(س)} = \int (\text{٢س} - ١)\,\text{دس}$$

$$\text{د(س)} = \frac{\text{٢س}^٢}{٢} - \text{س} + \text{ث}$$

$$\text{د(س)} = \text{س}^٢ - \text{س} + \text{ث}$$

عوض س = ٣ ، ص = ٤

$$٤ = (٣)^٢ - ٣ + \text{ث}$$

$$\text{ث} = ٤ - ٦ \Leftarrow \text{ث} = -٢$$

$$\therefore \text{ص} = \text{س}^٢ - \text{س} - ٢$$

③ اذا كان ميل المماس لمنحنى ما عند أي نقطة عليه علما بأنه يمر بالنقطة (٣، -١)

تعدل المسألة كالتالي:

اذا كان ميل المماس لمنحنى ما عند أي نقطة عليه (س، ص) يساوي ٣س^{٢} جد معادلة المنحنى علما بأنه يمر بالنقطة (٣، -١)

م = دص / دس

ص = ∫ دص / دس

ص = ∫ ٣س^{٢}

ص = ٣ س^{٣} / ٣ + ث

ص = س^{٣} + ث

عوض س = ٣ ، ص = -١

-١ = (٣)^{٣} + ث

ث = -١ - ٢٧

ث = -٢٨

∴ معادلة المنحنى هي:

ص = س^{٣} - ٢٨

④ منحنى يمر بالنقطة (٢، ٨) وميله عند أي نقطة عليه يساوي (٣س+١)^{٢}

جد معادلته.

م = دص / دس

ص = ∫ دص / دس

ص = ∫ (٣س + ١)^{٢} دس

ص = ∫ ((٣س)^{٢} + ٢(٣س)(١) + (١)^{٢}) دس

ص = ∫ (٩س^{٢} + ٦س + ١) دس

ص = ٩س^{٣} / ٣ + ٦س^{٢} / ٢ + س + ث

ص = ٣س^{٣} + ٣س^{٢} + س + ث

عوض س = ٢ ، ص = ٨

٨ = ٣(٢)^{٣} + ٣(٢)^{٢} + ٢ + ث

٨ = ٢٤ + ١٢ + ٢ + ث

ث = ٨ - ٣٨

ث = -٣٠

∴ معادلة المنحنى هي:

ص = ٣س^{٣} + ٣س^{٢} + س + -٣٠

ص = ٣س^{٣} + ٣س^{٢} + س - ٣٠

⑤ جد معادلة المنحنى الذى يقطع المحور السينى عند $س = ١ ، \frac{-٤}{٣}$

اذا علمنا أن:

$س^{٤}(ص'' - ١٨) = ١٩٢$

عند أى نقطة (س، ص) على المنحنى

$$\frac{س^{٤}(ص'' - ١٨)}{س^{٤}} = \frac{١٩٢}{س^{٤}}$$

$$ص'' - ١٨ = ١٩٢ س^{-٤}$$

$$ص'' = ١٩٢ س^{-٤} + ١٨$$

$$ص' = \int (١٩٢ س^{-٤} + ١٨) \, دس$$

$$ص' = \frac{١٩٢ س^{-٣}}{-٣} + ١٨ س + ث_{١}$$

$$ص' = -٦٤ س^{-٣} + ١٨ س + ث_{١}$$

$$ص = \int (-٦٤ س^{-٣} + ١٨ س + ث_{١}) \, دس$$

$$ص = \frac{-٦٤ س^{-٢}}{-٢} + \frac{١٨ س^{٢}}{٢} + ث_{١} س + ث_{٢}$$

$$ص = ٣٢ س^{-٢} + ٩ س^{٢} + ث_{١} س + ث_{٢}$$

المنحنى يقطع المحور السينى عند س يساوى ١ و $\frac{-٤}{٣}$

∴ يمر بالنقاط $(١، ٠)$، $(\frac{-٤}{٣}، ٠)$

النقطة (١، ٠) تحقق معادلة المنحنى

$$٠ = ٣٢(١)^{-٢} + ٩(١)^{٢} + ث_{١} \times ١ + ث_{٢}$$

$$٣٢ + ٩ + ث_{١} + ث_{٢} = ٠$$

$$∴ ث_{١} + ث_{٢} = -٤١ \leftarrow ①$$

النقطة $(\frac{-٤}{٣}، ٠)$ تحقق معادلة المنحنى

$$٠ = ٣٢\left(\frac{-٤}{٣}\right)^{-٢} + ٩\left(\frac{-٤}{٣}\right)^{٢} + ث_{١} \times \frac{-٤}{٣} + ث_{٢}$$

$$٠ = ٣٢\left(\frac{-٣}{٤}\right)^{٢} + ٩ \times \frac{١٦}{٩} - \frac{٤}{٣} ث_{١} + ث_{٢}$$

$$٠ = ٣٢ \times \frac{٩}{١٦} + ١٦ - \frac{٤}{٣} ث_{١} + ث_{٢}$$

$$٠ = ١٨ + ١٦ - \frac{٤}{٣} ث_{١} + ث_{٢}$$

$$٠ = ٣٤ - \frac{٤}{٣} ث_{١} + ث_{٢}$$

بالضرب فى ٣

$$-٤ ث_{١} + ٣ ث_{٢} = -١٠٢ \leftarrow ②$$

بضرب المعادلة ① × ٣

$$٣ ث_{١} + ٣ ث_{٢} = -١٢٣ \leftarrow ③$$

وبحل ③ و ② آنيا

$$-٤ ث_{١} + ٣ ث_{٢} = -١٠٢ \leftarrow ②$$

$$٣ ث_{١} + ٣ ث_{٢} = -١٢٣ \leftarrow ③$$

$$-٧ ث_{١} = ٢١ \Leftarrow ث_{١} = -٣$$

عوض فى المعادلة ①

$$-٣ + ث_{٢} = -٤١$$

$$ث_{٢} = -٤١ + ٣ \Leftarrow ث_{٢} = -٣٨$$

∴ معادلة المنحنى هى:

$$ص = ٣٢ س^{-٢} + ٩ س^{٢} - ٣ س - ٣٨$$

④

٦ إذا كان $ص' = س^٢ - أ س \sqrt{٣}$ أ ثابت، ص = ٠ عندما س = ٠، وعندما س = $\sqrt{٣}$. جد ص بدلالة س ثم ارسم منحنى الدالة ص.

$ص' = س^٢ - \sqrt{٣}\, أ\, س$

$ص = \int (س^٢ - \sqrt{٣}\, أ\, س)\, دس$

$ص = \frac{١}{٣} س^٣ - \frac{\sqrt{٣}}{٢} أ\, س^٢ + ث$

عوضنا س = ٠، ص = ٠

$٠ = \frac{١}{٣}(٠)^٣ - \frac{\sqrt{٣}}{٢} أ (٠)^٢ + ث$

∴ ث = صفر

∴ $ص = \frac{١}{٣} س^٣ - \frac{\sqrt{٣}}{٢} أ\, س^٢$

عوضنا س = $\sqrt{٣}$، ص = ٠

$٠ = \frac{١}{٣}(\sqrt{٣})^٣ - \frac{\sqrt{٣}}{٢} أ (\sqrt{٣})^٢$

بالضرب × ٦

$٩\sqrt{٣}\, أ = ٢ \times ٣^{\frac{٣}{٢}}$

$أ = \frac{٢ \times ٣^{\frac{٣}{٢}}}{٩\sqrt{٣}} \Leftarrow أ = \frac{٢}{٣}$

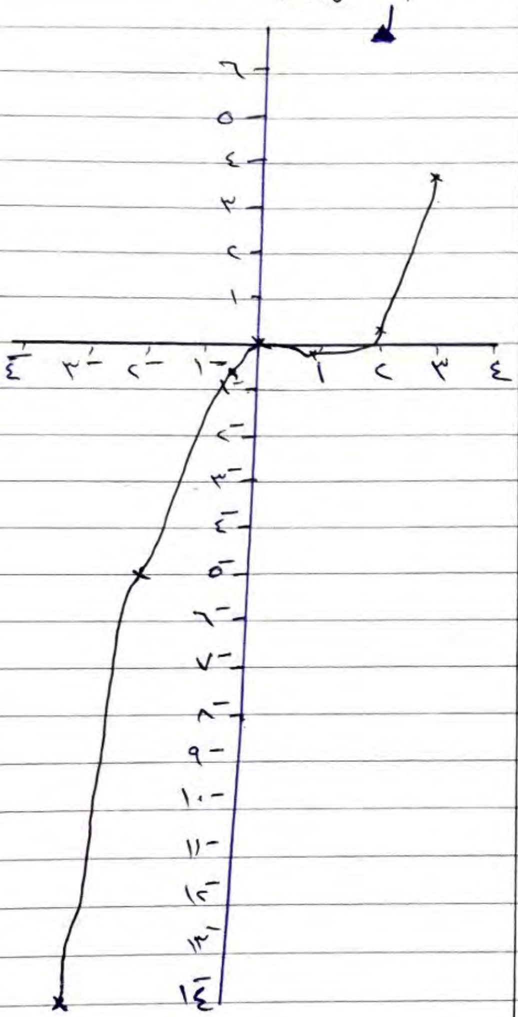
عوضنا قيمة أ

$ص = \frac{١}{٣} س^٣ - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٢}{٣} س^٢$

$ص = \frac{١}{٣} س^٣ - \frac{١}{\sqrt{٣}} س^٢$

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص	١٤-	٥-	٫٩-	٠	٫٣-	٫٣	٣٫٧

رسم تقريبي.



* نتائج ص مقربة لأقرب منزلة عشرية.

إيجاد قيم ص من الجدول السابق

$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = ٠$ معطى

نعوض با $٣ = \frac{١٧}{١٠}$

* $\text{س} = -٣$

$\text{ص} = \frac{١}{٣}(-٣)^{٣} - \frac{١٠}{١٧}(-٣)^{٢}$

$\text{ص} = (-٣)^{٢}\left[-١ - \frac{١٠}{١٧}\right]$

$\text{ص} = ٩\left(\frac{-١٧-١٠}{١٧}\right)$

$\text{ص} = ٩ \times \frac{-٢٧}{١٧} = \frac{-٢٤٣}{١٧}$

$\text{ص} = -١٤$

* $\text{س} = ٢$

$\text{ص} = \frac{١}{٣}(٢)^{٣} - \frac{١٠}{١٧}(٢)^{٢}$

$\text{ص} = \frac{-٨}{٣} - \frac{٤٠}{١٧}$

$\text{ص} = \frac{-١٣٦-١٢٠}{٥١}$

$\text{ص} = \frac{-٢٥٦}{٥١}$

$\text{ص} = -٥$

* $\text{س} = -١$

$\text{ص} = \frac{١}{٣}(-١)^{٣} - \frac{١٠}{١٧}(-١)^{٢}$

$\text{ص} = -\frac{١}{٣} - \frac{١٠}{١٧}$

$\text{ص} = \frac{-١٧-٣٠}{٥١}$

$\text{ص} = \frac{-٤٧}{٥١} \Leftarrow \text{ص} = -٫٩$

* $\text{س} = ١$

$\text{ص} = \frac{١}{٣}(١)^{٣} - \frac{١٠}{١٧}(١)^{٢}$

$\text{ص} = \frac{١}{٣} - \frac{١٠}{١٧}$

$\text{ص} = \frac{١٧-٣٠}{٥١} = \frac{-١٣}{٥١}$

$\text{ص} = -٫٣$

* $\text{س} = ٢$

$\text{ص} = \frac{١}{٣}(٢)^{٣} - \frac{١٠}{١٧}(٢)^{٢}$

$\text{ص} = \frac{٨}{٣} - \frac{٤٠}{١٧}$

$\text{ص} = \frac{١٣٦-١٢٠}{٥١} = \frac{١٦}{٥١}$

$\text{ص} = ٫٣$

* $\text{س} = ٣$

$\text{ص} = \frac{١}{٣}(٣)^{٣} - \frac{١٠}{١٧}(٣)^{٢}$

$\text{ص} = ٣^{٢}\left(١ - \frac{١٠}{١٧}\right)$

$\text{ص} = ٩\left(\frac{١٧-١٠}{١٧}\right) = ٩ \times \frac{٧}{١٧}$

$\text{ص} = \frac{٦٣}{١٧} \Leftarrow \text{ص} = ٣٫٧$

(٧) ميل منحنى يمر بالنقطة (١، ٢) هو $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

جد معادلة المنحنى

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

بالضرب العكسي

ص دص = س دس

بتكامل الطرفين

$\int \text{ص دص} = \int \text{س دس}$

$\frac{\text{ص}^{2}}{2} = \frac{\text{س}^{2}}{2} + \text{ث}$

عوض س = ١ ، ص = ٢

$\frac{(2)^{2}}{2} = \frac{(1)^{2}}{2} + \text{ث}$

$2 = \frac{1}{2} + \text{ث}$

∴ $\text{ث} = \frac{3}{2}$

∴ معادلة المنحنى

$\text{ص}^{2} = \frac{1}{2}\text{س}^{2} + \frac{3}{2}$

تمرين (٤-٣)

(١) تعطى السرعة ع متر لنقطة مادية تتحرك على خط مستقيم في نهاية زمن قدره ن ثانية بالعلاقة:

$\text{ع} = 3\text{ن}^{2} + 2\text{ن} + 1$

جد العجلة عند ن = ٢ ث والمسافة التي تقطعها بين ن = ٢ث و ن = ٣ث

$\text{جـ} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

جـ = ٦ن + ٢

عند ن = ٢

جـ = ٦(٢) + ٢

جـ = ١٤ متر/ث^{2}

$\text{ف} = \int (3\text{ن}^{2} + 2\text{ن} + 1)\,\text{دن}$

$\text{ف} = \frac{3\text{ن}^{3}}{3} + \frac{2\text{ن}^{2}}{2} + \text{ن} + \text{ث}$

$\text{ف} = \text{ن}^{3} + \text{ن}^{2} + \text{ن} + \text{ث}$

عند ن = ٠ ⟸ ف = صفر

$0 = (0)^{3} + (0)^{2} + 0 + \text{ث}$

∴ ث = صفر

$\text{ف} = \text{ن}^{3} + \text{ن}^{2} + \text{ن}$

المسافة بعد ٢ث

$\text{ف} = (2)^{3} + (2)^{2} + 2$ ⟸ ف = ١٤ متر

المسافة بعد ٣ث

$\text{ف} = (3)^{3} + (3)^{2} + 2$ ⟸ ف = ٣٨ متر

المسافة بين ٢ث و ٣ث تساوي

٣٨ − ١٤ = ٢٤ متر

② تتحرك سيارة من السكون بعجلة متغيرة تساوي (١ − ٣ن) متر/ث² بعد زمن قدره ن ثانية حدد كلا من السرعة و المسافة التي تقطعها بدلالة الزمن ن

جـ = ١ − ٣ن

ع = ∫ جـ دن

ع = ∫ (١ − ٣ن) دن

ع = ن − ٣/٢ ن² + ث

ف = ∫ ع دن

ف = ∫ (ن − ٣/٢ ن² + ث) دن

ف = ١/٢ ن² − ٣/٦ ن³ + ث١ س + ث٢

ف = ١/٢ ن² − ١/٢ ن³ + ث١ س + ث٢

③ يتحرك جسم على المحور السيني (و س) مبتدئا حركته من نقطة الأصل و. وبعد ن ثانية كانت سرعته (٣ن² + ٢) متر/ث

حد بعده عن نقطة الأصل بعد ثانيتين

ع = ٣ن² + ٢

ف = ∫ ع دن

ف = ∫ (٣ن² + ٢) دن

ف = ٣ن³/٣ + ٢ن + ث

ف = ن³ + ٢ن + ث

عند ن = ٠ ⟸ ف = ٠

٠ = (٠)³ + ٢(٠) + ث

∴ ث = صفر

ف = ن³ + ٢ن

عوض ن = ٢

ف = (٢)³ + ٢(٢)

ف = ٨ + ٤

ف = ١٢ متر

④ تتحرك نقطة مادية من السكون عند الانطلاق بعجلة قدرها (١٢ − ٦ن) متر/ث²، حد أقصى بعد لها عن نقطة الانطلاق قبل أن يعود لها مرة أخرى. حد ايضا زمن العودة إلى نقطة الانطلاق.

جـ = ١٢ − ٦ن

ع = ∫ (١٢ − ٦ن) دن

ع = ١٢ن − ٣ن² + ث

عند ن = صفر ⟸ ع = صفر ∴ ث = صفر

ع = ١٢ن − ٣ن²

ف = ∫ (١٢ن − ٣ن²) دن

ف = ٦ن² − ن³ + ث

عند ن = صفر ⟸ ف = صفر ∴ ث = صفر

ف = ٦ن² − ن³

عند أقصى بعد ع = صفر

١٢ن − ٣ن² = صفر

ن(١٢ − ٣ن) = صفر

اما ن = صفر أو ن = ٤

يصل الجسم أقصى بعد بعد ٤ ثوان

عوض ن = ٤ في ف

ف = ٦(٤)² − (٤)³

ف = ٩٦ − ٦٤

ف = ٣٢ متر

زمن العودة إلى نقطة الانطلاق = ٤ + ٤
= ٨ ثواني

⑤ إذا كانت عجلة جسم جـ بعد ن من الثواني تعطى بالقاعدة: جـ = ٦ن + ٤
جد المسافة التي يقطعها بعد ٣ ثوان من بدء الحركة إذا كانت سرعته الابتدائية ٢ متر/ث وأنه قطع مسافة ٢١ مترا في أول ثانيتين من بدء الحركة

جـ = ٦ن + ٤
ع = ∫ جـ دن
ع = ٣ن² + ٤ن + ث
ع. = ٢ متر/ث ، ن = صفر
٢ = ٣(٠)² + ٤(٠) + ث
∴ ث = ٢
ع = ٣ن² + ٤ن + ٢

ف = ∫ (٣ن² + ٤ن + ٢) دن
ف = ن³ + ٢ن² + ٢ن + ث
عند ن = ٢ ف = ٢١
٢١ = (٢)³ + ٢(٢)² + ٢(٢) + ث
٢١ = ٨ + ٨ + ٤ + ث
ث = ٢١ − ٢٠ ⟸ ث = ١
ف = ن³ + ٢ن² + ٢ن + ١
بعد ٣ ثوان
ف = (٣)³ + ٢(٣)² + ٢(٣) + ١
ف = ٥٢ متر

⑥ يتحرك جسم على المحور السيني بسرعة ابتدائية ع.
وإذا كانت مسافته من نقطة البداية عند الزمن ن تساوي ف وسرعته تساوي ع وكان يتحرك بعجلة ثابتة مقدارها جـ ، أثبت أن:

أ) ع = ع. + جـ ن
ب) ف = ع. ن + ½ جـ ن²

واستنتج أن:

جـ) ع² = ع.² + ٢جـ ف

البرهان:
أ) ع = ∫ جـ دن
ع = جـ ن + ث
عند ن = صفر ⟸ ع = ع.
ع. = جـ × صفر + ث
∴ ث = ع.
∴ ع = جـ ن + ع.
ع = ع. + جـ ن وهو المطلوب

ب)
ف = ∫ ع دن
ف = ∫ (ع. + جـ ن) دن
ف = ع. ن + ½ جـ ن² + ث
عند ن = ٠ ⟸ ف = ٠ ⟸ ث = صفر
∴ ف = ع. ن + ½ جـ ن²

حل/

$\text{ع}^2 = (\text{ع}_. + \text{جـ ن})^2$

$\text{ع}^2 = \text{ع}_.^2 + ٢\text{ع}_.\text{جـ ن} + (\text{جـ ن})^2$

$\text{ع}^2 = \text{ع}_.^2 + ٢\text{جـ}(\text{ع}_.\text{ن} + \frac{١}{٢}\text{جـ ن}^2)$

$\because \text{ف} = \text{ع}_.\text{ن} + \frac{١}{٢}\text{جـ ن}^2$

$\therefore \text{ع}^2 = \text{ع}_.^2 + ٢\text{جـ ف}$

وهو المطلوب

تمرين (٤-٤)

أجر التكاملات الآتية:

① $\int \frac{\text{دس}}{\sqrt{٥\text{س}-١}}$

$= \int (٥\text{س}-١)^{-\frac{١}{٢}}\ \text{دس}$

$= \frac{(٥\text{س}-١)^{-\frac{١}{٢}+١}}{٥(-\frac{١}{٢}+١)} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٥}(٥\text{س}-١)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

② $\int \text{قتا}^2(٢\text{س}+٥)\ \text{دس}$

ضع $\text{ع} = ٢\text{س}+٥$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٢$

$\therefore \text{دس} = \frac{\text{دع}}{٢}$

$\therefore \int \text{قتا}^2(٢\text{س}+٥)\ \text{دس} = \int \text{قتا}^2\text{ع}\ \frac{\text{دع}}{٢}$

$= \frac{١}{٢}\int \text{قتا}^2\text{ع}\ \text{دع}$

$= \frac{١}{٢} \times -\text{ظتا ع} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٢}\text{ظتا}(٢\text{س}+٥) + \text{ث}$

③ $\int \text{جا}^2(٢\text{س}+٥)\ \text{دس}$

ضع $\text{ع} = ٢\text{س}+٥$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٢$

$\text{دس} = \frac{\text{دع}}{٢}$

$\therefore \int \text{جا}^2(٢\text{س}+٥)\text{دس} = \int \text{جا}^2\text{ع}\ \frac{\text{دع}}{٢}$

$= \frac{١}{٢}\int \text{جا}^2\text{ع}\ \text{دع}$

$= \frac{١}{٢}\int (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{ع})\ \text{دع}$

$= \frac{١}{٢}[\frac{١}{٢}\text{ع} - \frac{١}{٢\times٢}\text{جا}٢\text{ع}] + \text{ث}$

$= \frac{١}{٤}\text{ع} - \frac{١}{٨}\text{جا}٢\text{ع} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٤}(٢\text{س}+٥) - \frac{١}{٨}\text{جا}٢(٢\text{س}+٥) + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢}\text{س} + \frac{٥}{٤} - \frac{١}{٨}\text{جا}(٤\text{س}+١٠) + \text{ث}$

④ $\int \frac{\text{٢س} + 1}{\sqrt{\text{س}^2 + \text{س} - 1}}\ \text{دس}$

نفرض ع = $\text{س}^2 + \text{س} - 1$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{٢س} + 1$

$\text{دع} = (\text{٢س} + 1)\ \text{دس}$

$\therefore \int \frac{\text{٢س} + 1}{\sqrt{\text{س}^2 + \text{س} - 1}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{1}{\text{ع}^{\frac{1}{2}}}\ \text{دع}$

$= \int \text{ع}^{-\frac{1}{2}}\ \text{دع}$

$= \frac{\text{ع}^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \text{ث}$

$= 2\ \text{ع}^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

$= 2(\text{س}^2 + \text{س} - 1)^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

$= 2\sqrt{\text{س}^2 + \text{س} - 1} + \text{ث}$

⑤ $\int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^3\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}\right) \text{دس}$

$= \int (\text{ظاس}\ \text{قا}^2\text{س})\ \text{دس}$

$= \frac{\text{ظا}^2\text{س}}{2} + \text{ث}$

حل آخر :

نفرض ع = ظاس

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س}$

$\text{دع} = \text{قا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$\therefore \int \text{ظاس}\ \text{قا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{ع}\ \text{دع}$

$= \frac{\text{ع}^2}{2} + \text{ث}$

$= \frac{\text{ظا}^2\text{س}}{2} + \text{ث}$

٦) $\int (\text{جتا}^4\text{س}\ \text{جاس})\ \text{دس}$

نفرض ع = جتاس

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = -\text{جاس}$

$\text{دع} = -\text{جاس}\ \text{دس}$

$\therefore \int (\text{جتا}^4\text{س}\ \text{جاس})\ \text{دس}$

$= \int \text{ع}^4\ \text{دع} \times -1$

$= -\int \text{ع}^4\ \text{دع}$

$= -\frac{\text{ع}^5}{5} + \text{ث}$

$= -\frac{1}{5}\ \text{جتا}^5\text{س} + \text{ث}$

٧) $\int \text{ظتا}^3\text{س}\ \text{قتا}^2\text{س}\ \text{دس}$

نفرض ع = ظتاس

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = -\text{قتا}^2\text{س}$

$\text{دع} = -\text{قتا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$\therefore \int \text{ظتا}^3\text{س}\ \text{قتا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{ع}^3\ \text{دع} \times -1$

$= -\int \text{ع}^3\ \text{دع}$

$= -\frac{\text{ع}^4}{4} + \text{ث}$

$= -\frac{1}{4}\ \text{ظتا}^4\text{س} + \text{ث}$

⑧ $\int$ جا٥س جا٣س دس

$= \int \frac{1}{2}$ (جتا(٥س − ٣س) − جتا(٥س + ٣س)) دس

$= \frac{1}{2} \int$ (جتا٢س − جتا٨س) دس

$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \right.$ جا٢س $- \frac{1}{8}$ جا٨س $\left. \right]$ + ث

$= \frac{1}{4}$ جا٢س $- \frac{1}{16}$ جا٨س + ث

⑨ $\int$ س $\sqrt{٢ - س}$ دس

عوضًا بـ ع = ٢ − س

نضع ع = ٢ − س

∴ س = ٢ − ع

$\frac{دع}{دس} = -١ \Leftarrow$ دس = −دع

∴ $\int$ س $\sqrt{٢ - س}$ دس

$= \int$ (٢ − ع)($\sqrt{ع}$) دع

$= \int$ (٢ع$^{\frac{1}{2}}$ − ع$^{\frac{3}{2}}$) دع

$= \frac{٢ع^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{ع^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$ + ث

$= \frac{4}{3}$ ع$^{\frac{3}{2}}$ $- \frac{2}{5}$ ع$^{\frac{5}{2}}$ + ث

$= \frac{4}{3}$ (٢ − س)$^{\frac{3}{2}}$ $- \frac{2}{5}$ (٢ − س)$^{\frac{5}{2}}$ + ث

⑩ مستخدمًا التكامل بالتجزئة جد ما يأتي:

أ/ $\int$ س² جتاس دس

نضع ع = س² $\Leftarrow \frac{دع}{دس}$ = ٢س

$\frac{دل}{دس}$ = جتاس $\Leftarrow$ ل = جاس

∵ $\int$ ع $\frac{دل}{دس}$ دس = ع ل − $\int$ ل $\frac{دع}{دس}$ دس

∴ $\int$ س² جتاس دس

= س² جاس − $\int$ ٢س جاس دس

= س² جاس − ٢$\int$ س جاس دس

وباستخدام التكامل بالتجزئة مرة أخرى:

نضع ع = س $\Leftarrow \frac{دع}{دس}$ = ١

$\frac{دل}{دس}$ = جاس $\Leftarrow$ ل = −جتاس

∴ $\int$ س² جتاس دس

= س² جاس − ٢[س × −جتاس − $\int$ (−جتاس)(١) دس]

= س² جاس + ٢س جتاس + جاس + ث

(ب) $\int \text{س جا}^2\text{س دس}$

$= \int \text{س} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{ جتا ٢س}\right) \text{دس}$

$= \int \left(\frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{2}\text{س جتا ٢س}\right) \text{دس}$

$= \int \frac{1}{2}\text{س} - \int \frac{1}{2}\text{س جتا ٢س دس}$

$= \int \frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{2}\int \text{س جتا ٢س دس}$

$= \frac{1}{4}\text{س}^2 - \frac{1}{2}\int \text{س جتا ٢س دس}$

نفرض $\text{ع} = \text{س} \Leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ١$

$\frac{\text{دل}}{\text{دس}} = \text{جتا ٢س} \Leftarrow \text{ل} = \frac{1}{2}\text{جا ٢س}$

$\therefore \int \text{س جا}^2\text{س دس}$

$= \frac{1}{4}\text{س}^2 - \frac{1}{2}\left[\text{س} \times \frac{1}{2}\text{جا ٢س} - \int \frac{1}{2}\text{جا ٢س} \times (١)\text{ دس}\right]$

$\frac{1}{4}\text{س}^2 - \frac{1}{4}\text{س جا ٢س} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\text{ جتا ٢س} + \text{ث}$

$\frac{1}{4}\text{س}^2 - \frac{1}{4}\text{س جا ٢س} + \frac{1}{8}\text{جتا ٢س} + \text{ث}$

(ج) $\int \text{س جتا أس دس}$

نفرض $\text{ع} = \text{س} \Leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ١$

$\frac{\text{دل}}{\text{دس}} = \text{جتا أس} \Leftarrow \text{ل} = \frac{1}{\text{أ}}\text{جا أس}$

$\therefore \int \text{س جتا أس دس}$

$= \text{س} \times \frac{1}{\text{أ}}\text{جا أس} - \int \frac{1}{\text{أ}}\text{جا أس دس}$

$= \frac{1}{\text{أ}}\text{س جا أس} - \frac{1}{\text{أ}}\int \text{جا أس دس}$

$= \frac{1}{\text{أ}}\text{س جا أس} - \frac{1}{\text{أ}} \times \frac{-1}{\text{أ}}\text{جتا أس} + \text{ث}$

$= \frac{1}{\text{أ}}\text{س جا أس} + \frac{1}{\text{أ}^2}\text{جتا أس} + \text{ث}$

التكامل المحدد

تمرين (٥-١)

جد قيمة ما يأتي

① $\int_{-٢}^{٣} س^{٢}\, دس$

$= \left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{-٢}^{٣}$

$= \left[\frac{(٣)^{٣}}{٣}\right] - \left[\frac{(-٢)^{٣}}{٣}\right]$

$= \frac{٢٧}{٣} - \frac{-٨}{٣}$

$= \frac{٢٧+٨}{٣} = \frac{٣٥}{٣} = ١٠\frac{٥}{٣}$

② $\int_{-٢}^{-١} س^{٣}\, دس$

$\left[\frac{س^{٤}}{٤}\right]_{-٢}^{-١}$

$\left[\frac{(-١)^{٤}}{٤}\right] - \left[\frac{(-٢)^{٤}}{٤}\right]$

$= \frac{١}{٤} - \frac{١٦}{٤} = \frac{١}{٤} - ٤$

$= -٣\frac{٣}{٤}$

③ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جاس\, دس$

$\left[-جتاس\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$-جتا\frac{\pi}{٢} - -جتا صفر$

$-جتا ٩٠^{\circ} + ١ = صفر + ١$

$= صفر$

④ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جاس جتاس\, دس$

$= \left[\frac{جا^{٢}س}{٢}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= \frac{جا^{٢}\frac{\pi}{٢}}{٢} - \frac{جا^{٢}صفر}{٢}$

$= \frac{جا^{٢}٩٠^{\circ}}{٢} - \frac{٠}{٢}$

$= \frac{(١)^{٢}}{٢} - ٠ = \frac{١}{٢}$

⑤

$$\int_{-١}^{٣} \sqrt{٢س+٣}\ دس$$

$$= \int_{-١}^{٣} (٢س+٣)^{\frac{١}{٢}}\ دس$$

$$\left[\frac{(٢س+٣)^{\frac{١}{٢}+١}}{٢(\frac{١}{٢}+١)} \right]_{-١}^{٣}$$

$$\left[\frac{(٢س+٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} \right]_{-١}^{٣}$$

$$\frac{(٢(٣)+٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} - \frac{(٢(-١)+٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٣}$$

$$\frac{(٩)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} - \frac{١^{\frac{٣}{٢}}}{٣}$$

$$\frac{(٣^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{٣} - \frac{١}{٣}$$

$$\frac{٢٧}{٣} - \frac{١}{٣} = ٩ - \frac{١}{٣}$$

$$= ٨\frac{٢}{٣}$$

⑥

$$\int_{١}^{٩} \frac{(١-س)^{٢}}{\sqrt{١-س}}\ دس$$

$$= \int_{١}^{٩} \frac{(١-س)^{٢}}{(١-س)^{\frac{١}{٢}}}\ دس$$

$$= \int_{١}^{٩} (١-س)^{٢-\frac{١}{٢}}\ دس$$

$$= \int_{١}^{٩} (١-س)^{\frac{٣}{٢}}\ دس$$

$$= (١-٩)^{\frac{٣}{٢}} - (١-١)^{\frac{٣}{٢}}$$

$$= (-٨)^{\frac{٣}{٢}} - صفر$$

$$= (-٨)^{\frac{٣}{٢}}$$

(٧)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ٨ س \, جاس \, دس$$

$$= ٨ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} س \, جاس \, دس$$

نفرض ع = س $\Leftarrow$ $\frac{دع}{دس} = ١$

$\frac{دل}{دس} =$ جاس $\Leftarrow$ ل = $-$جتاس

$$\therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ٨ س \, جاس \, دس$$

$$= ٨ \left[س \times -جتاس - \int (-جتاس)(١) \, دس \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= ٨ \left[-س \, جتاس - -جتاس \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$٨ \left[-س \, جتاس + جتاس \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$٨ \left[\left[-\frac{\pi}{2} \, جتا \frac{\pi}{2} + جتا \frac{\pi}{2} \right] - \left[-٠ \times جتا صفر + جتا صفر \right] \right]$$

$$٨ \left[\left[-\frac{\pi}{2} \times صفر + صفر \right] - ١ \right]$$

$$٨ \times -١$$

$$= -٨$$

(٨)

$$\int_{0}^{٣} \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ٢}} \, دس$$

$$= \int_{0}^{٣} (س^{٢} + ٢)^{-\frac{1}{2}} \, س \, دس$$

نفرض ع = $س^{٢} + ٢$

$$\frac{دع}{دس} = ٢س$$

$$س \, دس = \frac{دع}{٢}$$

$$\therefore \int_{0}^{٣} (س^{٢} + ٢)^{-\frac{1}{2}} \, س \, دس$$

$$= \int_{0}^{٣} ع^{-\frac{1}{2}} \, \frac{دع}{٢}$$

$$\frac{1}{2} \int_{0}^{٣} ع^{-\frac{1}{2}} \, دع$$

$$= \frac{1}{2} \left[٢ ع^{\frac{1}{2}} \right]_{0}^{٣} = \frac{1}{2} \left[٢ (س^{٢} + ٢)^{\frac{1}{2}} \right]_{0}^{٣}$$

$$= \frac{1}{2} \left[٢((٣)^{٢} + ٢)^{\frac{1}{2}} - ٢((٠)^{٢} + ٢)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\frac{1}{2} \left[٢(١١)^{\frac{1}{2}} - ٢ \times ٢^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= (١١)^{\frac{1}{2}} - ٢^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{١١} - \sqrt{٢}$$

$$= ٣٫٣ - ١٫٤ = ١٫٩$$

٩)

$$\int_{٠}^{٢} \text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٣}+١}\ \text{دس}$$

$$= \int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٣}+١)^{\frac{١}{٢}}\ \text{س}^{٢}\ \text{دس}$$

نفرض $\text{ع} = \text{س}^{٣} + ١$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢}$$

$$\text{س}^{٢}\ \text{دس} = \frac{\text{دع}}{٣}$$

$$\therefore \int \text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٣}+١}\ \text{دس}$$

$$= \int_{٠}^{٢} \text{ع}^{\frac{١}{٢}}\ \frac{\text{دع}}{٣}$$

$$= \frac{١}{٣}\int_{٠}^{٢} \text{ع}^{\frac{١}{٢}}\ \text{دع}$$

$$= \frac{١}{٣}\left[\frac{٢}{٣}\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{١}{٣}\left[\frac{٢}{٣}(\text{س}^{٣}+١)\right]_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{١}{٣}\left[\left[\frac{٢}{٣}\left((٢)^{٣}+١\right)\right] - \left[\frac{٢}{٣}\left((٠)^{٣}+١\right)\right]\right]$$

$$\left[\frac{١}{٣}\times\frac{١٦}{٣}+\frac{٢}{٩}\right] - \left[\frac{٢}{٣}\right]\left[\frac{١}{٣}\right]$$

$$\frac{١٦}{٩}+\frac{٢}{٩}-\frac{٢}{٩} = \frac{١٦}{٩}$$

١٠)

$$\int_{-٣}^{٣} (\text{س}^{٥}+٢\text{س}^{٣}+\text{س})\ \text{دس}$$

$$\left[\frac{١}{٦}\text{س}^{٦}+\frac{١}{٢}\text{س}^{٤}+\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{-٣}^{٣}$$

$$\left[\frac{١}{٦}(٣)^{٦}+\frac{١}{٢}(٣)^{٤}+\frac{١}{٢}(٣)^{٢}\right] - \left[\frac{١}{٦}(-٣)^{٦}+\frac{١}{٢}(-٣)^{٤}+\frac{١}{٢}(-٣)^{٢}\right]$$

$$٩\left[\frac{١}{٦}(٣)^{٦}+\frac{١}{٢}(٣)^{٤}+\frac{١}{٢}(٣)^{٢}\right] - ٩\left[\frac{١}{٦}(-٣)^{٦}+\frac{١}{٢}(-٣)^{٤}+\frac{١}{٢}(-٣)^{٢}\right]$$

$$(٩-٩)\left[\frac{١}{٦}(٣)^{٦}+\frac{١}{٢}(٣)^{٤}+\frac{١}{٢}(٣)^{٢}-\frac{١}{٦}(-٣)^{٦}-\frac{١}{٢}(-٣)^{٤}-\frac{١}{٢}(-٣)^{٢}\right]$$

صفر × صفر = صفر

(11)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{جتا}\, س + س^{4})\, دس$$

$$\left[\text{جا}\, س + \frac{1}{5} س^{5}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left[\text{جا}\, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{5}\right] - \left[\text{جا}\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{-\pi}{2}\right)^{5}\right]$$

$$\left[\text{جا}\, 90 + \frac{\pi^{5}}{160}\right] - \left[-\text{جا}\, 90 + \frac{-\pi^{5}}{160}\right]$$

$$\left(1 + \frac{\pi^{5}}{160}\right) - \left(-1 - \frac{\pi^{5}}{160}\right)$$

$$1 + 1 + \frac{\pi^{5}}{160} + \frac{\pi^{5}}{160}$$

$$\frac{2\pi^{5}}{160} + 2 = \frac{\pi^{5}}{80} + 2$$

(12) اذا كان :

$$\int_{-1}^{ج} س\, دس = \text{صفر}$$

جد قيمة الثابت ج

$$\left[\frac{1}{2} س^{2}\right]_{-1}^{ج} = \text{صفر}$$

$$\left(\frac{1}{2} ج^{2}\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)^{2}\right) = \text{صفر}$$

$$\frac{1}{2} ج^{2} - \frac{1}{2} = \text{صفر}$$

بالضرب $\times 2$

$$ج^{2} - 1 = \text{صفر}$$

$$ج^{2} = 1$$

$$\therefore ج = 1$$

مع خالص الأماني

حل تمارين الدائرة

إعداد:

مجموعة المنهج السوداني

مبادرة الرياضيات محلية جبل أولياء

بالتعاون مع الاستاذ:

أبو مزن مصطفى عوض الله

تمرين (٦ – ١)

① اكتب معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٦ وحدات.

س^2 + ص^2 = نق^2
س^2 + ص^2 = (٦)^2
س^2 + ص^2 = ٣٦

② اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (٠، –٣) وطول نصف قطرها ٧ وحدات.

(س – د)^2 + (ص – هـ)^2 = نق^2
(س – ٠)^2 + (ص – –٣)^2 = (٧)^2
س^2 + (ص + ٣)^2 = ٤٩

③ اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (–٥، ٢) وطول نصف قطرها √٧ وحدة

(س – د)^2 + (ص – هـ)^2 = نق^2
(س – –٥)^2 + (ص – ٢)^2 = (√٧)^2
(س + ٥)^2 + (ص – ٢)^2 = ٧

④ جد مركز وطول نصف قطر الدائرة في كل من الحالات التالية:

أ/ س^2 + (ص – ١)^2 = ٤
(س – ٠)^2 + (ص – ١)^2 = (٢)^2
المركز (٠، ١)
طول نصف القطر ٢ وحدة

ب/ (س + ٤)^2 + ص^2 = ١
(س – –٤)^2 + (ص – ٠)^2 = (١)^2
المركز (–٤، ٠)
طول نصف القطر وحدة واحدة.

جـ/ (س + ٣)^2 + (ص – ٥)^2 = ٦٤
(س – –٣)^2 + (ص – ٥)^2 = (٨)^2
المركز (–٣، ٥)
طول نصف القطر ٨ وحدات

⑤ جد معادلة الدائرة التي مركزها (–٢، –٧) وتمر بالنقطة (٢، –٤)

أولا نوجد طول نصف القطر بقانون البعد بين نقطتين:
√((س٢ – س١)^2 + (ص٢ – ص١)^2)
طول نق = √((٢ – –٢)^2 + (–٤ – –٧)^2)
= √((٤)^2 + (٣)^2) = √٢٥ = ٥ وحدات

∴ معادلة الدائرة هي:
(س – د)^2 + (ص – هـ)^2 = نق^2
(س – –٢)^2 + (ص – –٧)^2 = (٥)^2
(س + ٢)^2 + (ص + ٧)^2 = ٢٥

※ يمكن مواصلة الحل ووضعه في الصورة العامة وذلك بفك المربع الكامل مع الترتيب كما سنعلم في الدرس القادم إن شاء الله.

س^2 + ٢ × س × ٢ + (٢)^2 + ص^2 + ٢ × ص × ٧ + (٧)^2 = ٢٥
س^2 + ٤س + ٤ + ص^2 + ١٤ص + ٤٩ – ٢٥ = ٠
س^2 + ص^2 + ٤س + ١٤ص + ٢٨ = ٠

⑥ جد معادلة الدائرة التي $\overline{\text{أب}}$ قطر فيها حيث أ(٧، ١٢) ب(-٥، -٤).

∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة

∴ احداثيات المركز (د، هـ) هي منتصف $\overline{\text{أب}}$

$\text{د} = \frac{\text{س}_1+\text{س}_2}{2} \Leftarrow \text{د} = \frac{7+{}^{-}5}{2}$

$\text{د} = \frac{2}{2} \Leftarrow \text{د} = 1$

$\text{هـ} = \frac{\text{ص}_1+\text{ص}_2}{2} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{12+{}^{-}4}{2}$

$\text{هـ} = \frac{8}{2} \Leftarrow \text{هـ} = 4$

∴ احداثيات المركز هي (١، ٤)

نوجد طول نصف القطر بقانون البعد بين نقطتين.

نأخذ اي نقطة من القطر $\overline{\text{أب}}$ ونوجد البعد بينها وبين المركز مثلاً (٧، ١٢)، (١، ٤)

$\text{طول نق} = \sqrt{(\text{س}_2-\text{س}_1)^2+(\text{ص}_2-\text{ص}_1)^2}$

$\text{طول نق} = \sqrt{(1-7)^2+(4-12)^2}$

$\text{طول نق} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$

طول نق = ١٠ وحدات

∴ معادلة الدائرة:

$(\text{س}-\text{د})^2+(\text{ص}-\text{هـ})^2 = \text{نق}^2$

$(\text{س}-1)^2+(\text{ص}-4)^2 = (10)^2$

$(\text{س}-1)^2+(\text{ص}-4)^2 = 100$

⊛ لاحقاً سندرس قانون ايجاد المعادلة بمعلومية نهايتي القطر

تمرين (٦-٢)

① جد المركز ونصف القطر لكل من الدوائر التالية:

أ/ $\text{س}^2+\text{ص}^2-2\text{س}-6\text{ص}-26=0$

بالمقارنة بالصورة العامة:

$\text{س}^2+\text{ص}^2+2\text{ل}\text{س}+2\text{ك}\text{ص}+\text{ج}=\text{صفر}$

$2\text{ل} = {}^{-}2 \Leftarrow \text{ل} = {}^{-}1$

$2\text{ك} = {}^{-}6 \Leftarrow \text{ك} = {}^{-}3$

$\text{ج} = {}^{-}26$

∴ المركز (-ل، -ك) = (١، ٣)

$\text{نق} = \sqrt{\text{ل}^2+\text{ك}^2-\text{ج}}$

$\text{نق} = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2-{}^{-}26}$

$\text{نق} = \sqrt{1+9+26} = \sqrt{36} = 6$ وحدات

ب/ $\text{س}^2+\text{ص}^2-4\text{س}-4\text{ص}+8=0$

$2\text{ل} = {}^{-}4 \Leftarrow \text{ل} = {}^{-}2$

$2\text{ك} = {}^{-}4 \Leftarrow \text{ك} = {}^{-}2$

$\text{ج} = 8$

المركز (٢، ٢)

$\text{نق} = \sqrt{(2)^2+(-2)^2-8}$

$\text{نق} = \sqrt{4+4-8} = \text{صفر}$

جـ/ $\text{س}^2+\text{ص}^2-10\text{ص}=0$

$2\text{ل} = 0 \Leftarrow \text{ل} = 0$

$2\text{ك} = {}^{-}10 \Leftarrow \text{ك} = {}^{-}5$

$\text{ج} = 0$

المركز (٠، ٥)

$\text{نق} = \sqrt{(0)^2+(-5)^2-0} = \sqrt{25} = 5$ وحدات

د/ $\text{س}^2+\text{ص}^2-\text{أ}\text{س}+\text{أ}\text{ص}=0$

$2\text{ل} = -\text{أ} \Leftarrow \text{ل} = -\frac{\text{أ}}{2}$

$2\text{ك} = \text{أ} \Leftarrow \text{ك} = \frac{\text{أ}}{2}$

ج = صفر

∴ المركز $\left(\frac{\text{أ}}{2}, -\frac{\text{أ}}{2}\right)$

نق $= \sqrt{\left(\frac{-\text{أ}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\text{أ}}{2}\right)^2 - 0}$

نق $= \sqrt{\frac{\text{أ}^2}{4} + \frac{\text{أ}^2}{4}} = \sqrt{\frac{\text{أ}^2 + \text{أ}^2}{4}}$

نق $= \sqrt{\frac{2\text{أ}^2}{4}} = \sqrt{\frac{\text{أ}^2}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$ أ وحدة

و/ $9\text{س}^2 + 9\text{ص}^2 + 24\text{ص} - 38 = 0$

بالقسمة على ٩

$\frac{9\text{س}^2}{9} + \frac{9\text{ص}^2}{9} + \frac{24\text{ص}}{9} - \frac{38}{9} = 0$

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \frac{8}{3}\text{ص} - \frac{38}{9} = 0$

$2\text{ل} = 0 \Leftarrow \text{ل} =$ صفر

$2\text{ك} = \frac{8}{3} \Leftarrow \text{ك} = \frac{8}{3} \div 2$

$\text{ك} = \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\text{جـ} = \frac{-38}{9}$

المركز $(0 ، \frac{-4}{3})$

نق $= \sqrt{(0)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{-38}{9}}$

نق $= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{38}{9}} = \sqrt{\frac{38+16}{9}}$

نق $= \sqrt{\frac{54}{9}} = \sqrt{6}$ وحدة

و/ $\text{س}^2 + 2\text{س} + 5 = \text{ص}(4 - \text{ص})$

$\text{س}^2 + 2\text{س} + 5 = 4\text{ص} - \text{ص}^2$

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + 2\text{س} - 4\text{ص} + 5 = 0$

$2\text{ل} = 2 \Leftarrow \text{ل} = 1$

$2\text{ك} = -4 \Leftarrow \text{ك} = -2$

$\text{جـ} = 5$

المركز $(-1 ، 2)$

نق $= \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 - 5}$

نق $= \sqrt{1 + 4 - 5} =$ صفر

ز/ $\text{ص}(1 - \text{ص}) = \text{س}^2$

$\text{ص} - \text{ص}^2 = \text{س}^2$

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{ص} =$ صفر

$2\text{ل} = 0 \Leftarrow \text{ل} = 0$

$2\text{ك} = -1 \Leftarrow \text{ك} = -\frac{1}{2}$

$\text{جـ} = 0$

المركز $(0 ، \frac{1}{2})$

نق $= \sqrt{(0)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 0}$

نق $= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ وحدة

② جد نصف قطر الدائرة:
س² + ص² + ٨س − ١٠ص + ٢١ = ٠
وجد بعد مركزها عن المستقيم
س − ٢ص + ٤ = ٠

٢ل = ٨ ⟸ ل = ٤
٢ك = −١٠ ⟸ ك = −٥
جـ = ٢١
المركز (−٤، ٥)

نق = √((٤)² + (−٥)² − ٢١)
نق = √(١٦ + ٢٥ − ٢١) = √٢٠ وحدة

بعد المركز عن المستقيم يساوي

|أس + ب ص + جـ| / √(أ² + ب²)

= |١×−٤ − ٢×٥ + ٤| / √((١)² + (−٢)²)

= |−٤ − ١٠ + ٤| / √٥ = ١٠ / √٥

= ٥×٢ / √٥ = ٢√٥ وحدة

③ جد قيمة ك التي تجعل طول نصف قطر الدائرة ن التالية ٦ وحدات.

ن: س² + ص² − ٦س + ٢ك ص − ٢٣ = ٠
٢ل = −٦ ⟸ ل = −٣
٢ك = ٢ك ⟸ ك = ك
جـ = −٢٣

نق = √(ل² + ك² − جـ)
٦ = √((−٣)² + ك² − −٢٣)
٦ = √(٩ + ك² + ٢٣)
٦ = √(٣٢ + ك²)
٣٦ = ٣٢ + ك²
ك² = ٣٦ − ٣٢ ⟸ ك² = ٤
ك = ±٢

④ دائرة معادلتها:
س² + ص² + ٢أس + ٢أص − ١٧ = ٠
جد قيمة أ بحيث يكون نصف قطرها ٥ وحدات ثم عين مركزها

٢ل = ٢أ ⟸ ل = أ
٢ك = ٢أ ⟸ ك = أ
جـ = −١٧

٥ = √(أ² + أ² − −١٧)
٥ = √(٢أ² + ١٧) ⟸ ٢٥ = ٢أ² + ١٧
٢أ² = ٢٥ − ١٧
٢أ² = ٨ ⟸ أ² = ٤
أ = ±٢

∴ المركز (+٢، +٢) أو (−٢، −٢)

تمرين (٦ – ٣)

① جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط

أ) (٠،٠)، (٨،٠)، (٠،$\bar{}$٦)

* يمكنك استخدام أي طريقة من الطرق الثلاث المذكورة في الكتاب المدرسي.

نفرض أن المعادلة هي:

س² + ص² + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

النقطة (٠،٠) تحقق معادلة الدائرة

(٠)² + (٠)² + ٢ل × ٠ + ٢ك × ٠ + جـ = ٠

∴ جـ = ٠

النقطة (٨،٠) تحقق معادلة الدائرة

(٨)² + (٠)² + ٢ل × ٨ + ٢ك × ٠ + ٠ = ٠

٦٤ + ١٦ل = ٠

١٦ل = ٦٤⁻ ⟸ ل = ٤⁻

النقطة (٠،٦⁻) تحقق المعادلة

(٠)² + (٦⁻)² + ٢ × ٤⁻ × ٠ + ٢ك × ٦⁻ + ٠ = ٠

٣٦ − ١٢ك = ٠

١٢ك = ٣٦

ك = ٣

بتعويض قيم ل، ك، جـ في الصورة العامة:

∴ معادلة الدائرة هي:

س² + ص² + ٢ × ٤⁻س + ٢ × ٣ص + ٠ = ٠

س² + ص² − ٨س + ٦ص = ٠

ب) (٤،٠)، (٢⁻،٥)، (٠،٢⁻)

* دوماً نعوض النقاط التي فيها صفر أولاً

نفرض أن معادلة الدائرة هي:

س² + ص² + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

النقطة (٤،٠) تحقق معادلة الدائرة

(٤)² + (٠)² + ٢ل × ٤ + ٢ك × ٠ + جـ = ٠

٨ل + جـ = ١٦⁻ ← ①

النقطة (٠،٢⁻) تحقق المعادلة

(٠)² + (٢⁻)² + ٢ل × ٠ + ٢ك × ٢⁻ + جـ = ٠

٤ − ٤ك + جـ = ٠

٤⁻ك + جـ = ٤⁻ ← ②

النقطة (٢⁻،٥) تحقق المعادلة

(٢⁻)² + (٥)² + ٢ل × ٢⁻ + ٢ك × ٥ + جـ = ٠

٤ + ٢٥ − ٤ل + ١٠ك + جـ = ٠

٤⁻ل + ١٠ك + جـ = ٢٩⁻ ← ③

بطرح ① − ②

٨ل + ٤ك = ١٢⁻

∴ ٢ل + ك = ٣⁻

ك = ٢⁻ل − ٣ ← ④

بطرح ③ − ②

٤⁻ل + ١٤ك = ٢٥⁻ ← ⑤

عوض ④ في ⑤

٤⁻ل + ١٤(٢⁻ل − ٣) = ٢٥⁻

٤⁻ل − ٢٨ل − ٤٢ = ٢٥⁻

− ٣٢ل = ١٧ ⟸ ل = $\frac{١٧⁻}{٣٢}$

عوض في ④:

ك = ٢⁻ × $\frac{١٧⁻}{٣٢}$ − ٣ = $\frac{٣٤}{٣٢}$ − ٣

ك = ١,١ − ٣ ⟸ ك = ١,٩

عوض قيم ل، ك في المعادلة ③

٤⁻ × $\frac{١٧⁻}{٣٢}$ + ١٠ × ١,٩ + جـ = ٢٩⁻

٢,١ + ١٩ + جـ = ٢٩⁻

جـ = ⁻٢٩ − ٢١و١
جـ = ٥٠و١

∴ معادلة الدائرة هي :

س² + ص² + ٢ × ⁻١٧/٣٢ س + ٢ × ١و٩ ص + ٥٠و١ = ٠

س² + ص² − ١٧/١٦ س + ٣و٨ ص + ٥٠و١ = ٠

س² + ص² − ١و١ س + ٣و٨ ص + ٥٠و١ = ٠

جـ / (١،٠) ، (١،٥) ، (٢، ⁻٣)

نفرض ان معادلة الدائرة هي
س² + ص² + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠
النقطة (١،٠) تحقق المعادلة :
(٠)² + (١)² + ٢ل × ٠ + ٢ك × ١ + جـ = ٠
١ + ٢ك + جـ = ٠
٢ك + جـ = ⁻١ ← ١
النقطة (١،٥) تحقق المعادلة :
(٥)² + (١)² + ٢ل × ٥ + ٢ك × ١ + جـ = ٠
٢٦ + ١٠ل + ٢ك + جـ = ٠
١٠ل + ٢ك + جـ = ⁻٢٦ ← ٢
عوض ١ في ٢
∴ ١٠ل + ⁻١ = ⁻٢٦
١٠ل = ⁻٢٥ ⇐ ل = ⁻٢و٥
النقطة (٢، ⁻٣) تحقق المعادلة :
(٢)² + (⁻٣)² + ٢ل × ٢ + ٢ك × ⁻٣ + جـ = ٠
١٣ + ٤ل − ٦ك + جـ = ٠
٤ل − ٦ك + جـ = ⁻١٣ ← ٣
بطرح ٢ − ٣
٦ل + ٨ك = ⁻١٣ ← ٤
عوض قيمة ل في ٤

٦ × ⁻٢و٥ + ٨ك = ⁻١٣
⁻١٥ + ٨ك = ⁻١٣
٨ك = ⁻١٣ + ١٥
٨ك = ٢ ⇐ ك = ١/٤
عوض قيم ل ، ك في ٢

١٠ × ⁻٢و٥ + ٢ × ١/٤ + جـ = ⁻٢٦

⁻٢٥ + ١/٢ + جـ = ⁻٢٦

٢٤ ١/٢ + جـ = ⁻٢٦

جـ = ⁻٢٦ − ٢٤ ١/٢
جـ = ٥٠و٥

∴ معادلة الدائرة هي :

س² + ص² + ٢ × ⁻٢و٥ س + ٢ × ١/٤ ص + ٥٠و٥ = ٠

س² + ص² − ٥ س + ١/٢ ص + ٥٠و٥ = ٠

د/ (-٣، ٢)، (-٢، ٧)، (٢، ١)

نفرض أن معادلة الدائرة هي

س² + ص² + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

النقطة (-٣، ٢) تحقق المعادلة

(-٣)² + (٢)² + ٢ل × -٣ + ٢ك × ٢ + جـ = ٠

٩ + ٤ - ٦ل + ٤ك + جـ = ٠

-٦ل + ٤ك + جـ = -١٣ ← ①

النقطة (-٢، ٧) تحقق المعادلة

(-٢)² + (٧)² + ٢ل × -٢ + ٢ك × ٧ + جـ = ٠

٤ + ٤٩ - ٤ل + ١٤ك + جـ = ٠

-٤ل + ١٤ك + جـ = -٥٣ ← ②

النقطة (٢، ١) تحقق المعادلة:

(٢)² + (١)² + ٢ل × ٢ + ٢ك × ١ + جـ = ٠

٤ + ١ + ٤ل + ٢ك + جـ = ٠

٤ل + ٢ك + جـ = -٥ ← ③

بطرح ① - ②

-٢ل - ١٠ك = ٤٠ ← ④

بطرح ① - ③

-١٠ل + ٢ك = -٨

-٥٠ل + ١٠ك = -٤٠ ← ⑤

بجمع ④ + ⑤

٤٨ل = صفر

∴ ل = صفر

عوض قيمة ل في ④

-٢ × ٠ - ١٠ك = ٤٠

-١٠ك = ٤٠

∴ ك = -٤

عوض قيم ل، ك في ③

٤ × ٠ + ٢ × -٤ + جـ = -٥

-٨ + جـ = -٥

جـ = ٣

∴ المعادلة هي:

س² + ص² + ٢ × ٠ × س + ٢ × -٤ ص + ٣ = ٠

س² + ص² - ٨ص + ٣ = ٠

② جد معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها النقطتان:

أ/ (٠، ٢)، (٢، ٠)

(س - س١)(س - س٢) + (ص - ص١)(ص - ص٢) = ٠

(س - ٠)(س - ٢) + (ص - ٢)(ص - ٠) = ٠

س(س - ٢) + ص(ص - ٢) = ٠

س² - ٢س + ص² - ٢ص = ٠

س² + ص² - ٢س - ٢ص = ٠

ب/ (٦، ١)، (-٢، -٣)

(س - ٦)(س - -٢) + (ص - ١)(ص - -٣) = ٠

(س - ٦)(س + ٢) + (ص - ١)(ص + ٣) = ٠

س² + ٢س - ٦س - ١٢ + ص² + ٣ص - ص - ٣ = ٠

س² + ص² - ٤س + ٢ص - ١٥ = ٠

جـ/ (-١، ٢)، (-٢، ١)

(س - -١)(س - -٢) + (ص - ٢)(ص - ١) = ٠

(س + ١)(س + ٢) + (ص - ٢)(ص - ١) = ٠

س² + ٢س + س + ٢ + ص² - ص - ٢ص + ٢ = ٠

س² + ص² + ٣س - ٣ص + ٤ = ٠

د/ (½، ١)، (-٥، ٧)

(س - ½)(س - -٥) + (ص - ١)(ص - ٧) = ٠

(س - ½)(س + ٥) + (ص - ١)(ص - ٧) = ٠

س² + ٥س - ½س - ٢و٥ + ص² - ٧ص - ص + ٧ = ٠

س² + ص² + ٤و٥س - ٨ص + ٤و٥ = ٠

③ أثبت أن النقاط
أ(٠،٠) ، ب(٣،١)
جـ(١،٢) ، د(٢،-١)
رؤوس رباعي دائري

نوجد معادلة الدائرة المارة بثلاث نقاط ثم نعوض عن الرأس الرابع.
لنأخذ أ ، ب ، جـ

نفرض أن معادلة الدائرة هي
س^2 + ص^2 + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠
النقطة (٠،٠) تحقق المعادلة:
(٠)^2 + (٠)^2 + ٢ل × ٠ + ٢ك × ٠ + جـ = ٠
∴ جـ = ٠
النقطة (٣،١) تحقق المعادلة
(٣)^2 + (١)^2 + ٢ل × ٣ + ٢ك × ١ + ٠ = ٠
٦ل + ٢ك = -١٠
٣ل + ك = -٥
ك = -٥ - ٣ل ← ①
النقطة (١،٢) تحقق المعادلة
(١)^2 + (٢)^2 + ٢ل × ١ + ٢ك × ٢ + ٠ = ٠
٢ل + ٤ك = -٥ ← ②
عوضنا ① في ②
٢ل + ٤(-٥ - ٣ل) = -٥
٢ل - ١٢ل - ٢٠ = -٥
-١٠ل - ٢٠ = -٥
-١٠ل = -٥ + ٢٠
-١٠ل = ١٥
ل = $\frac{-٣}{٢}$
عوض قيمة ل في ①
ك = -٥ - ٣ × $\frac{-٣}{٢}$
ك = -٥ + $\frac{٩}{٢}$ ⟸ ك = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة الدائرة هي:
س^2 + ص^2 + ٢ × $\frac{-٣}{٢}$ س + ٢ × $\frac{-١}{٢}$ ص + ٠ = ٠ ،
س^2 + ص^2 - ٣س - ص = ٠
نعوض (٢،-١) في معادلة الدائرة
الأيمن:
(٢)^2 + (-١)^2 - ٣ × ٢ - -١ =
٤ + ١ - ٦ + ١ = ٥ - ٥
= صفر

∵ (٢،-١) تحقق معادلة الدائرة إذن النقاط هي رؤوس رباعي دائري.

④ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٣،٥)، (-٣،٧) و يقع مركزها على المحور السيني
∵ يقع المركز على المحور السيني
∴ ك = صفر
نفرض أن المعادلة هي:
س^2 + ص^2 + ٢ل س + جـ = ٠
النقطة (٣،٥) تحقق المعادلة
(٣)^2 + (٥)^2 + ٢ل × ٣ + جـ = ٠
٦ل + جـ = -٣٤ ← ①

النقطة (-٣،٧) تحقق المعادلة
(-٣)^2 + (٧)^2 + ٢ل × -٣ + جـ = ٠
-٦ل + جـ = -٥٨ ← ②
بطرح ① - ②
١٢ل = ٢٤ ⟸ ل = ٢
عوضنا في ① ⟸ ٦ × ٢ + جـ = -٣٤
جـ = -٣٤ - ١٢
جـ = -٤٦

∴ المعادلة هي :-

$س^2 + ص^2 + ٢ \times ٢س + \bar{٤٦} = ٠$

$س^2 + ص^2 + ٤س - ٤٦ = ٠$

⑤ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٥، ٣ـ)، (١، ٠) ويقع مركزها على المستقيم

$٢س - ٣ص - ٦ = ٠$

نفرض أن المعادلة هي

$س^2 + ص^2 + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠$

النقطة (٥، ٣ـ) تحقق المعادلة

$(٥)^2 + (-٣)^2 + ٢ل \times ٥ + ٢ك \times \bar{٣} + جـ = ٠$

$١٠ل - ٦ك + جـ = \bar{٣٤} \leftarrow ①$

النقطة (١، ٠) تحقق المعادلة

$(١)^2 + (٠)^2 + ٢ل \times ١ + ٢ك \times ٠ + جـ = ٠$

$٢ل + جـ = \bar{١} \leftarrow ②$

(−ل، −ك) تحقق معادلة المستقيم

$٢(-ل) - ٣(-ك) - ٦ = ٠$

$\bar{٢}ل + ٣ك = ٦ \leftarrow ③$

بطرح ① − ②

$٨ل - ٦ك = \bar{٣٣} \leftarrow ④$

وبضرب ③ × ٢

$\bar{٤}ل + ٦ك = ١٢ \leftarrow ⑤$

بجمع ④ + ⑤

$٤ل = \bar{٢١}$

$ل = -\frac{٢١}{٤}$

عوض قيمة ل في ③

$\bar{٢} \times \frac{\bar{٢١}}{٤} + ٣ك = ٦$

$\frac{٢١}{٢} + ٣ك = ٦$

$٢١ + ٦ك = ١٢$

$٦ك = \bar{٩} \Leftarrow ك = \frac{\bar{٩}}{٦}$

$ك = \frac{\bar{٣}}{٢}$

عوض قيمة ل في ②

$٢ \times \frac{\bar{٢١}}{٤} + جـ = -١$

$\frac{\bar{٢١}}{٢} + جـ = -١$

$جـ = -١ + \frac{٢١}{٢}$

$جـ = -١ + ١٠,٥$

$جـ = ٩,٥$

∴ معادلة الدائرة هي :-

$س^2 + ص^2 + ٢ \times \frac{\bar{٢١}}{٤} س + ٢ \times \frac{\bar{٣}}{٢} ص + ٩,٥ = ٠$

$س^2 + ص^2 - ١٠,٥س - ٣ص + ٩,٥ = ٠$

٦) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٥، ‎-٢)، (‎-٢، ١) ويقع مركزها على المستقيم ٣س + ص + ٢ = ٠

نفرض أن المعادلة هي:

س² + ص² + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

النقطة (٥، ‎-٢) تحقق المعادلة:

(٥)² + (‎-٢)² + ٢ل × ٥ + ٢ك × ‎-٢ + جـ = ٠

٢٥ + ٤ + ١٠ل − ٤ك + جـ = ٠

١٠ل − ٤ك + جـ = ‎-٢٩ ← ①

النقطة (‎-٢، ١) تحقق المعادلة

(‎-٢)² + (١)² + ٢ل × ‎-٢ + ٢ك × ١ + جـ = ٠

٤ + ١ − ٤ل + ٢ك + جـ = ٠

‎-٤ل + ٢ك + جـ = ‎-٥ ← ②

(‎-ل، ‎-ك) تحقق معادلة المستقيم

٣ × ‎-ل + ‎-ك + ٢ = ٠

‎-٣ل − ك = ‎-٢ ← ③

بطرح ① − ②

١٤ل − ٦ك = ‎-٢٤

٧ل − ٣ك = ‎-١٢ ← ④

بضرب ③ × ٣

‎-٩ل − ٣ك = ‎-٦ ← ⑤

بطرح ④ − ⑤

١٦ل = ‎-٦

ل = ‎-٣ / ٨

عوض قيمة ل في المعادلة ③

‎-٣ × ‎-٣/٨ − ك = ‎-٢

٩/٨ − ك = ‎-٢

ك = ٩/٨ + ٢

ك = (٩ + ١٦) / ٨ = ٢٥ / ٨

عوض قيم ل، ك في المعادلة ②

‎-٤ × ‎-٣/٨ + ٢ × ٢٥/٨ + جـ = ‎-٥

١٢ + ٥٠ + ٨جـ = ‎-٤٠

٨جـ = ‎-٤٠ − ٦٢

٨جـ = ‎-١٠٢

جـ = ‎-١٠٢ / ٨

جـ = ‎-١٢٫٧٥

∴ معادلة الدائرة هي:

س² + ص² + ٢ × ‎-٣/٨ س + ٢ × ٢٥/٨ ص + ‎-١٢٫٧٥ = ٠

س² + ص² − ٣/٤ س + ٢٥/٤ ص − ١٢٫٧٥ = ٠

تمرين (٦-٤)

(١) جد معادلات المماسات للدائرة:

س^{2} + ص^{2} = ٢٥

عند النقاط التالية

أ (٣، ٤)

س^{2} + ص^{2} − ٢٥ = ٠

ل = صفر ، ك = صفر ، جـ = −٢٥

معادلة المماس هي:

س س̀ + ص ص̀ + ل(س + س̀) + ك(ص + ص̀) + جـ = ٠

س × ٣ + ص × ٤ + (٠)(س + ٣) + (٠)(ص + ٤) + −٢٥ = ٠

٣س + ٤ص − ٢٥ = ٠

ب (٥، ٠)   س̀ = ٥ ، ص̀ = ٠

س × ٥ + ص × ٠ + (٠)(س + ٥) + (٠)(ص + ٠) + −٢٥ = ٠

٥س − ٢٥ = ٠

س − ٥ = ٠

جـ (−٤، ٣)   س̀ = −٤ ، ص̀ = ٣

س × −٤ + ص × ٣ + (٠)(س + −٤) + (٠)(ص + ٣) + −٢٥ = ٠

−٤س + ٣ص − ٢٥ = ٠

د (٠، −٥)   س̀ = ٠ ، ص̀ = −٥

س × ٠ + ص × −٥ + (٠)(س + −٥) + (٠)(ص + −٥) + −٢٥ = ٠

−٥ص − ٢٥ = ٠

−ص − ٥ = ٠

ص + ٥ = ٠

(٢) جد معادلات المماسات للدوائر التالية عند النقاط المعينة

أ) س^{2} + ص^{2} − ٤س − ٦ص + ٣ = ٠

عند النقطة (٥، ٤)

٢ل = −٤ ⟸ ل = −٢

٢ك = −٦ ⟸ ك = −٣

جـ = ٣   س̀ = ٥ ، ص̀ = ٤

معادلة المماس هي:

س س̀ + ص ص̀ + ل(س + س̀) + ك(ص + ص̀) + جـ = ٠

س × ٥ + ص × ٤ + −٢(س + ٥) + −٣(ص + ٤) + ٣ = ٠

٥س + ٤ص − ٢س − ١٠ − ٣ص − ١٢ + ٣ = ٠

٣س + ص − ١٩ = ٠

ب) س^{2} + ص^{2} − ١٠ص = ٠

عند النقطة (٣، ١)

٢ل = ٠ ⟸ ل = ٠

٢ك = −١٠ ⟸ ك = −٥

جـ = ٠   س̀ = ٣ ، ص̀ = ١

معادلة المماس هي:

س س̀ + ص ص̀ + ل(س + س̀) + ك(ص + ص̀) + جـ = ٠

س × ٣ + ص × ١ + (٠)(س + ٣) + −٥(ص + ١) + ٠ = ٠

٣س + ص − ٥ص − ٥ = ٠

٣س − ٤ص − ٥ = ٠

جـ) س^{2} + ص^{2} + ٤س + ٥ص = ٠

عند النقطة (٠، ٠)

٢ل = ٤ ⟸ ل = ٢

٢ك = ٥ ⟸ ك = $\frac{5}{2}$

جـ = ٠ ، س̀ = ٠ ، ص̀ = ٠

معادلة المماس هي:-

س س̀ + ص ص̀ + ل(س + س̀) + ك(ص + ص̀) + جـ = ٠

س × ٠ + ص × ٠ + ٢(س + ٠) + $\frac{5}{2}$(ص + ٠) + ٠ = ٠

٢س + $\frac{5}{2}$ص = ٠

٤س + ٥ص = ٠

د) ٢س^{2} + ٢ص^{2} + ٨س − ٨ص − ١٠ = ٠

عند النقطة (٠، ٥)

س^{2} + ص^{2} + ٤س − ٤ص − ٥ = ٠

٢ل = ٤ ⟸ ل = ٢ / ٢ك = −٤ ⟸ ك = −٢

جـ = −٥ ، س̀ = ٠ ، ص̀ = ٥

معادلة المماس هي:

س × ٠ + ص × ٥ + ٢(س + ٠) + −٢(ص + ٥) + −٥ = ٠

٥ص + ٢س − ٢ص − ١٠ − ٥ = ٠

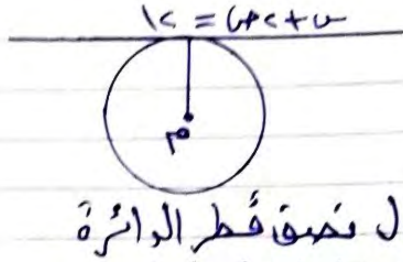
٢س + ٣ص − ١٥ = ٠

(٣) بين أن المستقيم ل حيث

ل : س + ٢ص = ١٢ مماس

للدائرة ن : س² + ص² − ٦س − ٤ص = −٨

اذا كان المستقيم مماسا للدائرة فإن طول العمود النازل من المستقيم إلى مركز الدائرة يساوي طول نصف القطر



نوجد طول نصف قطر الدائرة

س² + ص² − ٦س − ٤ص + ٨ = ٠

٢ل = −٦ ⟸ ل = −٣

٢ك = −٤ ⟸ ك = −٢ المركز (٣ ، ٢)

جـ = ٨

نق = √(ل² + ك² − جـ)

نق = √((−٣)² + (−٢)² − ٨)

نق = √(٩ + ٤ − ٨) = √٥ وحدة

نوجد طول العمود النازل من المستقيم

س + ٢ص − ١٢ = ٠

الى مركز الدائرة (٣ ، ٢)

طول العمود = |أس + ب ص + جـ| ÷ √(أ² + ب²)

طول العمود = |١×٣ + ٢×٢ − ١٢| ÷ √((١)² + (٢)²)

طول العمود = |−٥| ÷ √٥ = ٥ ÷ √٥

= ٥ ÷ ٥^(١/٢) = ٥^(١ − ١/٢) = ٥^(١/٢) = √٥

∵ طول العمود النازل من المستقيم الى المركز يساوي طول نصف قطر الدائرة

∴ المستقيم مماس للدائرة

(٤) جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمس المستقيم

ل : ٢س = ٣ص + ١٣

المركز (٠ ، ٠)

نوجد طول نصف القطر

∵ المستقيم مماس للدائرة

∴ طول العمود النازل من المستقيم إلى المركز يساوي طول نصف القطر

٢س − ٣ص − ١٣ = ٠

طول العمود = |أس + ب ص + جـ| ÷ √(أ² + ب²)

طول العمود = |٢×٠ − ٣×٠ − ١٣| ÷ √((٢)² + (−٣)²)

طول العمود = |−١٣| ÷ √١٣

طول العمود = ١٣ ÷ √١٣ = √١٣

∴ طول نق = √١٣

∴ معادلة الدائرة هي :-

(س − د)² + (ص − هـ)² = نق²

(س − ٠)² + (ص − ٠)² = (√١٣)²

س² + ص² = ١٣

س² + ص² − ١٣ = ٠

⑤ جد معادلة الدائرة التي مركزها (١، ٢) وتمس المستقيم ل

ل : $٤س - ٣ص + ١٢ = ٠$

المركز (١، ٢)

نوجد طول نصف القطر

∵ المستقيم مماس للدائرة

∴ طول العمود النازل من المستقيم الى المركز يساوي طول نصف القطر

$$\text{طول العمود} = \frac{|أس + ب ص + جـ|}{\sqrt{أ^{2} + ب^{2}}}$$

$$\text{طول العمود} = \frac{|٤ \times ١ - ٣ \times ٢ + ١٢|}{\sqrt{(٤)^{2} + (-٣)^{2}}}$$

$$\text{طول العمود} = \frac{|١٠|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١٠}{٥} = ٢$$

∴ طول نصف القطر = ٢

∴ معادلة الدائرة هي :

$$(س - د)^{2} + (ص - هـ)^{2} = نق^{2}$$

$$(س - ١)^{2} + (ص - ٢)^{2} = (٢)^{2}$$

$$س^{2} - ٢س + ١ + ص^{2} - ٤ص + ٤ - ٤ = ٠$$

$$س^{2} + ص^{2} - ٢س - ٤ص + ١ = ٠$$

تمرين (٦ − ٥)

جد طول المماس لكل من الدوائر التالية من النقطة الموضحة في كل حالة :

① $س^{2} + ص^{2} = ٢٥$

من النقطة (٣، ٦)

$س^{2} + ص^{2} - ٢٥ = ٠$

$$\text{طول المماس} = \sqrt{س_{1}^{2} + ص_{1}^{2} + ٢ل س_{1} + ٢ك ص_{1} + جـ}$$

$$\text{طول المماس} = \sqrt{(٣)^{2} + (٦)^{2} - ٢٥}$$

$$\text{طول المماس} = \sqrt{٢٠} = \sqrt{٤}\sqrt{٥}$$

$= ٢\sqrt{٥}$ وحدة

② $س^{2} + ص^{2} = ٤٠$

من النقطة (−٥، −٨)

$س^{2} + ص^{2} - ٤٠ = ٠$

$$\text{طول المماس} = \sqrt{(-٥)^{2} + (-٨)^{2} - ٤٠}$$

$$\text{طول المماس} = \sqrt{٢٥ + ٦٤ - ٤٠}$$

$\text{طول المماس} = \sqrt{٤٩} = ٧$ وحدات

③ $س^{2} + ص^{2} + ٢س + ٥ص = ٠$

من النقطة (−٢، ٣)

$$\text{طول المماس} = \sqrt{(-٢)^{2} + (٣)^{2} + ٢ \times -٢ + ٥ \times ٣}$$

$$\text{طول المماس} = \sqrt{٤ + ٩ - ٤ + ١٥}$$

$\text{طول المماس} = \sqrt{٢٤}$ وحدة

④ $س^{2} + ص^{2} - ٤س - ٨ص = ٣٧$

من النقطة (٣، −٥)

$$\text{طول المماس} = \sqrt{(٣)^{2} + (-٥)^{2} - ٤ \times ٣ - ٨ \times -٥ - ٣٧}$$

$$\text{طول المماس} = \sqrt{٩ + ٢٥ - ١٢ + ٤٠ - ٣٧}$$

$$\text{طول المماس} = \sqrt{٢٥}$$

طول المماس = ٥ وحدات

⑤ (س − ٣)² + (ص − ٤)² = ٤

من النقطة (١ ، ٢)

بوضع معادلة الدائرة في الصورة العامة

س² − ٢ × ٣ × س + ٩ + ص² − ٢ × ٤ × ص + ١٦ − ٤ = ٠

س² + ص² − ٦س − ٨ص + ٢١ = ٠

طول المماس = √((١)² + (٢)² − ٦ × ١ − ٨ × ٢ + ٢١)

طول المماس = √(١ + ٢ − ٦ − ١٦ + ٢١)

طول المماس = √٢ وحدة

⑥ ٢(س² + ص²) − س + ٣ص + ١ = ٠

من النقطة (−١ ، ١)

بوضع معادلة الدائرة في الصورة العامة
بالقسمة على ٢

س² + ص² − ½س + ³⁄₂ص + ½ = ٠

طول المماس = √((−١)² + (١)² − ½(−١) + ³⁄₂ × ١ + ½)

طول المماس = √(١ + ١ + ½ + ³⁄₂ + ½)

طول المماس = √(٣ ³⁄₂) = √(٩/٢) وحدة

⑦ س² + ص² − ٤ص = ٢س + ٤

من النقطة (٥ ، ٦)

س² + ص² − ٢س − ٤ص − ٤ = ٠

طول المماس = √((٥)² + (٦)² − ٢ × ٥ − ٤ × ٦ − ٤)

طول المماس = √(٢٥ + ٣٦ − ١٠ − ٢٤ − ٤)

طول المماس = √٢٣ وحدة

⑧ س² − ٤س = ٢ص − ص² − ٤

من النقطة (−٢ ، ٣)

بوضع المعادلة في الصورة العامة

س² + ص² − ٤س − ٢ص + ٤ = ٠

طول المماس = √((−٢)² + (٣)² − ٤ × −٢ − ٢ × ٣ + ٤)

طول المماس = √(٤ + ٩ + ٨ − ٦ + ٤)

طول المماس = √١٩ وحدة

مع خالص الأمنيات

أ. أبو مزن

تمرين (٧ – ١)

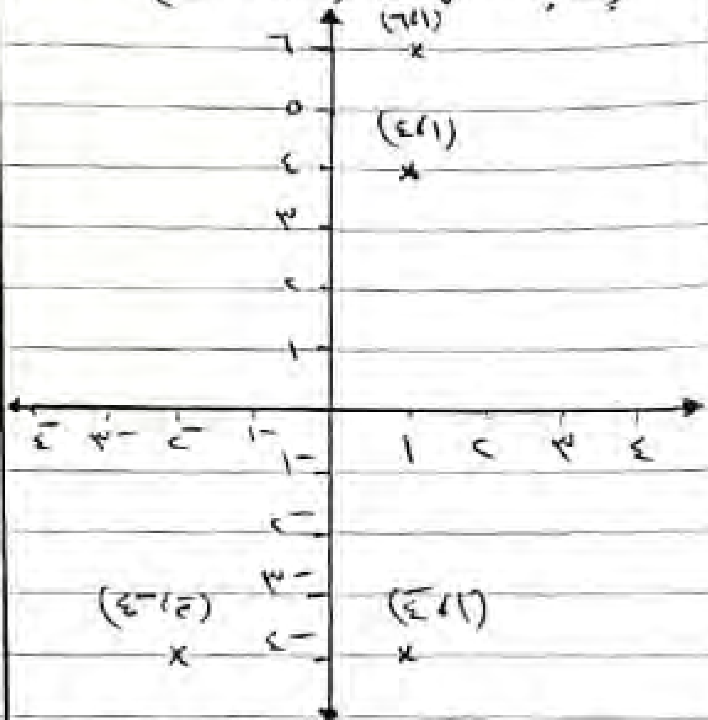
① عين على المستوى المركب الأعداد الآتية :-

أ/ ع١ = ١ + ٤ت
يقابله الزوج (١ ، ٤)

ب/ ع٢ = ١ – ٤ت
يقابله الزوج (١ ، ٤⁻)

جـ/ ع٣ = ٦ت
يقابله الزوج (١ ، ٦)

د/ ع٤ = ٢⁻ – ٤ت
يقابله الزوج (٢⁻ ، ٤⁻)



② جد أطوال الأعداد المركبة التالية

أ/ √٣ + ت
س = √٣ ، ص = ١
ر = √(س² + ص²) ⟸ ر = √((√٣)² + (١)²)
ر = √٤ ⟸ ر = ٢

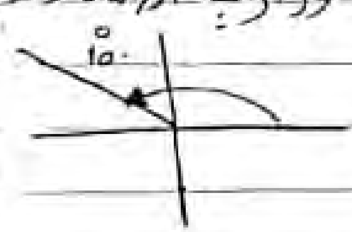
ب/ ٣ + ٤ت
س = ٣ ، ص = ٤
ر = √(س² + ص²) ⟸ ر = √((٣)² + (٤)²)
ر = √(٩ + ١٦) ⟸ ر = ٥

جـ/ ١ + √٣ ت
س = ١ ، ص = √٣
ر = √(س² + ص²) ⟸ ر = √((١)² + (√٣)²)
ر = √(١ + ٣) ⟸ ر = ٢

د/ ١/√٢ + ت/√٢
س = ١/√٢ ، ص = ١/√٢
ر = √(س² + ص²) ⟸ ر = √((١/√٢)² + (١/√٢)²)
ر = √(½ + ½) ⟸ ر = ١

③ جد السعة لكل من الأعداد التالية :-

أ/ √–٣ + ت
خطأ مطبعي ، تعدل إلى
–√٣ + ت
س = –√٣ ، ص = ١
ر = √(س² + ص²) ⟸ ر = √((–√٣)² + (١)²)
ر = √(٣ + ١) ⟸ ر = ٢
جتا و = س/ر ⟸ جتا و = –√٣/٢
جا و = ص/ر ⟸ جا و = ١/٢
∴ و في الربع الثاني وزاوية الإسناد لها هي ٣٠°



∴ و = ١٥٠°

ب/ √٣ – ت
ر = √((√٣)² + (–١)²) ⟸ ر = ٢
جتا و = س/ر ⟸ جتا و = √٣/٢
جا و = ص/ر ⟸ جا و = –١/٢

∴ و في الربع الرابع وزاوية الإسناد ٣٠°
و = ٣٣٠°

①

جـ/ $\sqrt{3} + ت$

$س = \sqrt{3}$ ، $ص = 1$

$ر = \sqrt{س^2 + ص^2} \Leftarrow ر = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}$

$ر = \sqrt{3 + 1} \Leftarrow ر = 2$

$جتاهـ = \frac{س}{ر} \Leftarrow جتاهـ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$جاهـ = \frac{ص}{ر} \Leftarrow جاهـ = \frac{1}{2}$

∴ $هـ = 30^\circ$

د/ $\sqrt{3} - ت$

ايضا خطأ مطبعى تعدل كالتالى

$-\sqrt{3} - ت$

$س = -\sqrt{3}$ ، $ص = -1$

$ر = \sqrt{س^2 + ص^2} \Leftarrow ر = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$

$ر = \sqrt{3 + 1} \Leftarrow ر = 2$

$جتاهـ = \frac{س}{ر} \Leftarrow جتاهـ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$جاهـ = \frac{ص}{ر} \Leftarrow جاهـ = \frac{-1}{2}$

$جاهـ = \frac{-1}{2}$

∴ هـ فى الربع الثالث وزاوية الاسناد لها هى 30°

∴ $هـ = 210^\circ$

④ اكتب كلا من الأعداد التالية فى الصورة القطبية :

أ/ $2 + 2\sqrt{3}\,ت$

$س = 2$ ، $ص = 2\sqrt{3}$

$ر = \sqrt{س^2 + ص^2} \Leftarrow ر = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2}$

$ر = \sqrt{4 + 4 \times 3} \Leftarrow ر = 4$

$جتاهـ = \frac{س}{ر} \Leftarrow جتاهـ = \frac{2}{4}$

$جتاهـ = \frac{1}{2}$

$جاهـ = \frac{ص}{ر} \Leftarrow جاهـ = \frac{2\sqrt{3}}{4}$

$جاهـ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $هـ = 60^\circ$

$ع = ر(جتاهـ + ت\,جاهـ)$

$ع = 4(جتا\,60^\circ + ت\,جا\,60^\circ)$

ب/ $5\sqrt{3} - 5ت$

$س = 5\sqrt{3}$ ، $ص = -5$

$ر = \sqrt{س^2 + ص^2} \Leftarrow ر = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + (-5)^2}$

$ر = \sqrt{25 \times 3 + 25} = 10$

$جتاهـ = \frac{س}{ر} \Leftarrow جتاهـ = \frac{5\sqrt{3}}{10}$

$جتاهـ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$جاهـ = \frac{ص}{ر} \Leftarrow جاهـ = \frac{-5}{10}$

$جاهـ = -\frac{1}{2}$

∴ هـ فى الربع الرابع وزاوية الاسناد لها هى 30°

∴ $هـ = 330^\circ$

$ع = ر(جتاهـ + ت\,جاهـ)$

$ع = 10(جتا\,330^\circ + ت\,جا\,330^\circ)$

ج/ $\frac{4}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$ ت

س $= \frac{4}{\sqrt{2}}$ ، ص $= 2\sqrt{2}$

ر $= \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} \Rightarrow$ ر $= \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2}$

ر $= \sqrt{\frac{16}{2} + 4 \times 2} = \sqrt{8 + 8}$

ر $= \sqrt{16} \Rightarrow$ ر $= 4$

جتاθ $=$ س/ر $\Rightarrow$ جتاθ $= \frac{4}{\sqrt{2}} \div 4$

جتاθ $= \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{4} \Rightarrow$ جتاθ $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

جاθ $=$ ص/ر $\Rightarrow$ جاθ $= \frac{2\sqrt{2}}{4}$

جاθ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ جاθ $= 2^{\frac{1}{2} - 1}$

جاθ $= 2^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$ جاθ $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ θ $= 45^\circ$

ع = ر(جتاθ + ت جاθ)

ع $= 4($جتا$45^\circ +$ ت جا$45^\circ)$

د/ -8

$-8 +$ صفر $\times$ ت

س $= -8$ ، ص $=$ صفر

ر $= \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

ر $= \sqrt{(-8)^2 + (0)^2}$

ر $= \sqrt{64}$

ر $= 8$

جتاθ $=$ س/ر $\Rightarrow$ جتاθ $= \frac{-8}{8}$

جتاθ $= -1$

جاθ $=$ ص/ر $\Rightarrow$ جاθ $= \frac{\text{صفر}}{8}$

جاθ $=$ صفر

$\therefore$ θ $= 180^\circ$

ع = ر(جتاθ + ت جاθ)

ع $= 8($جتا$180^\circ +$ ت جا$180^\circ)$

(٥) اكتب في الصورة الديكارتية

أ/ [٨ ، ٦٠°] ر = ٨ ، هـ = ٦٠°

ع = س + ص ت

س = ر جتا هـ

س = ر جتا ٦٠°

س = ٨ جتا ٦٠°

س = ٨ × $\frac{١}{٢}$ ⟸ س = ٤

ص = ر جا هـ

ص = ٨ جا ٦٠°

ص = ٨ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ⟸ ص = ٤$\sqrt{٣}$

∴ ع = ٤ + ٤$\sqrt{٣}$ ت

ب/ [٤ ، ١٢٠°] ر = ٤ ، هـ = ١٢٠°

ع = س + ص ت

س = ر جتا هـ ⟸ س = ٤ جتا ١٢٠°

س = ٤ × $-\frac{١}{٢}$

س = -٢

ص = ر جا هـ ⟸ ص = ٤ جا ١٢٠°

ص = ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ⟸ ص = ٢$\sqrt{٣}$

∴ ع = -٢ + ٢$\sqrt{٣}$ ت

جـ/ [٣ ، $-\frac{\pi}{٦}$]

ر = ٣ ، هـ = $-\frac{\pi}{٦}$ ⟸ هـ = $\frac{-١٨٠°}{٦}$

هـ = -٣٠°

س = ر جتا هـ

س = ٣ جتا -٣٠°

س = ٣ جتا ٣٠°

س = ٣ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ⟸ س = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

ص = ر جا هـ

ص = ر جا(-٣٠°)

ص = ٣ × -جا ٣٠°

ص = ٣ × $-\frac{١}{٢}$

ص = $-\frac{٣}{٢}$

ع = س + ص ت

ع = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ - $\frac{٣}{٢}$ ت

د/ [٣ ، $\frac{٣\pi}{٢}$] ر = ٣ ، هـ = $\frac{٣\pi}{٢}$

ع = س + ص ت

هـ = $\frac{٣ \times ١٨٠°}{٢}$ ⟸ هـ = ٢٧٠°

س = ر جتا هـ

س = ٣ جتا ٢٧٠°

س = ٣ × صفر

س = صفر

ص = ر جا هـ

ص = ٣ جا ٢٧٠°

ص = ٣ × -١

ص = -٣

∴ ع = صفر - ٣ ت

ع = -٣ ت

(١) عبر عن الأعداد التالية فى الصورة القطبية ثم مثلها بيانيا .

أ/ ٢ + ٢√٣ ت

س = ٢ ، ص = ٢√٣

ر = √(س² + ص²) ⟸ ر = √((٢)² + (٢√٣)²)

ر = √(٤ + ٤×٣) ⟸ ر = ٤

جتاهـ = س/ر ⟸ جتاهـ = ٢/٤

جتاهـ = ١/٢

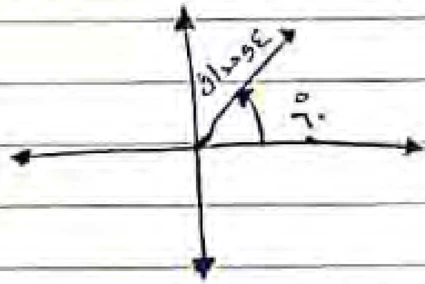
جاهـ = ص/ر ⟸ جاهـ = ٢√٣/٤

جاهـ = √٣/٢

∴ هـ = ٦٠°

ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ)

ع = ٤ [جتا٦٠° + ت جا٦٠°]



ب/ ٥ + ٥ت

س = ٥ ، ص = ٥

ر = √(س² + ص²) ⟸ ر = √((٥)² + (٥)²)

ر = √(٢٥ + ٢٥) ⟸ ر = √٥٠

ر = √٢٥ × √٢ ⟸ ر = ٥√٢

جتاهـ = س/ر ⟸ جتاهـ = ٥/(٥√٢)

جتاهـ = ١/√٢

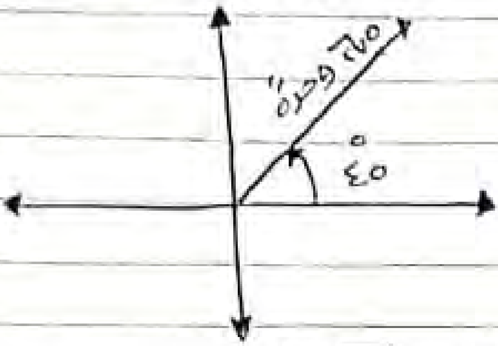
جاهـ = ص/ر ⟸ جاهـ = ٥/(٥√٢)

جاهـ = ١/√٢

∴ هـ = ٤٥°

ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ)

ع = ٥√٢ (جتا٤٥° + ت جا٤٥°)



جـ/ ٦ - √٢ ت

تعدل كالتالى : √٦ - √٢ ت

س = √٦ ، ص = -√٢

ر = √(س² + ص²) ⟸ ر = √((√٦)² + (-√٢)²)

ر = √(٦ + ٢) ⟸ ر = √٨ ⟸ ر = ٢√٢

جتاهـ = س/ر ⟸ جتاهـ = √٦/(٢√٢) = √٣/٢

جاهـ = ص/ر ⟸ جاهـ = -√٢/(٢√٢) = -١/٢

∴ هـ = ٣٣٠°

ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ)

ع = ٢√٢ (جتا٣٣٠° + ت جا٣٣٠°)

د/ ٣ت

س = صفر ، ص = ٣

ر = √(س² + ص²) ⟸ ر = √((٠)² + (٣)²)

ر = √٩ ⟸ ر = ٣

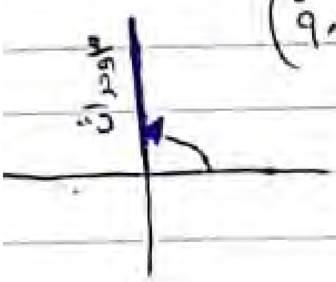
جتاهـ = س/ر ⟸ جتاهـ = صفر/٣

جتاهـ = صفر

جاهـ = ص/ر ⟸ جاهـ = ٣/٣ ⟸ جاهـ = ١

∴ هـ = ٩٠°

ع = ٣ (جتا٩٠° + ت جا٩٠°)



تمرين (٧-٢)

① إذا كان:

ع١ = ٣(جتا $\frac{\pi}{6}$ + ت جا $\frac{\pi}{6}$)

ع٢ = ١٢(جتا $\frac{5\pi}{3}$ + ت جا $\frac{5\pi}{3}$)

جد:

أ/ ع٢ . ع١

١٢×٣ (جتا$\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$ + ت جا$\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$)

٣٦ (جتا$\left(\frac{\pi+10\pi}{6}\right)$ + ت جا$\left(\frac{\pi+10\pi}{6}\right)$)

٣٦ (جتا$\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ + ت جا$\left(\frac{11\pi}{6}\right)$)

ب/ $\frac{ع٢}{ع١}$

$\frac{12}{3}$ (جتا$\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$ + ت جا$\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$)

٤ (جتا$\left(\frac{10\pi-\pi}{6}\right)$ + ت جا$\left(\frac{10\pi-\pi}{6}\right)$)

٤ (جتا $\frac{9\pi}{6}$ + ت جا $\frac{9\pi}{6}$)

٤ (جتا $\frac{3\pi}{2}$ + ت جا $\frac{3\pi}{2}$)

جـ/ ع١²

ع١² = ع١ × ع١

٣(جتا $\frac{\pi}{6}$ + ت جا $\frac{\pi}{6}$) × ٣(جتا $\frac{\pi}{6}$ + ت جا $\frac{\pi}{6}$)

٩ (جتا$\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)$ + ت جا$\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)$)

٩ (جتا$\left(\frac{\pi+\pi}{6}\right)$ + ت جا$\left(\frac{\pi+\pi}{6}\right)$)

٩ (جتا $\frac{2\pi}{6}$ + ت جا $\frac{2\pi}{6}$)

٩ (جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$)

د/ $\frac{1}{ع٢}$

$\frac{1}{ع٢}$ = $\frac{1}{١٢(جتا \frac{5\pi}{3} + ت جا \frac{5\pi}{3})}$

$\frac{1}{12}$ (جتا(صفر − $\frac{5\pi}{3}$) + ت جا(صفر − $\frac{5\pi}{3}$))

$\frac{1}{12}$ (جتا$\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ + ت جا$\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$)

$\frac{1}{12}$ (جتا $\frac{5\pi}{3}$ + ت جا $\frac{5\pi}{3}$)

② جد ناتج ما يلي :

أ/ ٦ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) × ٢ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)

١٢ (جتا ($\frac{\pi}{٣} + \frac{\pi}{٢}$) + ت جا ($\frac{\pi}{٣} + \frac{\pi}{٢}$))

١٢ (جتا ($\frac{٢\pi + ٣\pi}{٦}$) + ت جا ($\frac{٢\pi + ٣\pi}{٦}$))

١٢ (جتا $\frac{٥\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٦}$)

ب/ ٨ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°) ÷ ٤ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)

$\frac{٨}{٤}$ (جتا (١٢٠° − ٣٠°) + ت جا (١٢٠° − ٣٠°))

٢ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°)

جـ/ ٣ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°) × ٢ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

٦ (جتا (٣٠° + ٦٠°) + ت جا (٣٠° + ٦٠°))

٦ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°)

د/ [٣ (جتا هـ + ت جا هـ)]^{٢}

٣ (جتا هـ + ت جا هـ) × ٣ (جتا هـ + ت جا هـ)

٩ (جتا (هـ + هـ) + ت جا (هـ + هـ))

٩ (جتا ٢هـ + ت جا ٢هـ)

هـ/

٣ (جتا ٤٠° + ت جا ٤٠°) × ٤ (جتا ٨٠° + ت جا ٨٠°)

١٢ (جتا (٤٠° + ٨٠°) + ت جا (٤٠° + ٨٠°))

١٢ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)

تمرين (٧ − ٣)

① جد قيمة (−١ + $\sqrt{٣}$ ت)^{٨}
في صورة أ + ب ت

ع = −١ + $\sqrt{٣}$ ت

ر = $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$ ⇐ ر = $\sqrt{(-١)^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢}}$

ر = $\sqrt{١ + ٣}$ = ٢

جتا و = $\frac{س}{ر}$ ⇐ جتا و = $\frac{-١}{٢}$

جا و = $\frac{ص}{ر}$ ⇐ جا و = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ و في الربع الثاني وزاوية الإسناد لها هي ٦٠°

∴ و = ١٢٠°

ع = ٢ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)

عⁿ = رⁿ (جتا ن و + ت جا ن و)

ع^{٨} = ٢^{٨} (جتا ٨ × ١٢٠° + ت جا ٨ × ١٢٠°)

ع^{٨} = ٢٥٦ (جتا ٩٦٠° + ت جا ٩٦٠°)

لنضع العدد في صورة أ + ب ت نوجد

$س = ر جتا هـ \Leftarrow س = ٢٥٦ جتا ٩٦٠°$

$س = ٢٥٦ \times -جتا ٦٠°$

$س = ٢٥٦ \times -\frac{1}{2} \Leftarrow س = -١٢٨$

$ص = ر جا هـ \Leftarrow ص = ٢٥٦ جا ٩٦٠°$

$ص = ٢٥٦ \times -جا ٦٠°$

$ص = ٢٥٦ \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$ص = -١٢٨\sqrt{٣}$

∴ ع في صورة أ + ب ت

$ع = -١٢٨ - ١٢٨\sqrt{٣}\, ت$

② إذا كان ع = جا ٩٥° + ت جتا ٨٥°
جد الصورة القطبية للعدد ع
ثم جد قيمة ع²

$جا ٩٥° + ت جتا ٨٥° =$

$جا(٩٠° + ٥°) + ت جتا(٩٠° - ٥°)$

$= جتا ٥° + ت جا ٥°$

$∴ ع = ١ (جتا ٥° + ت جا ٥°)$

$ع^{ن} = ر^{ن} (جتا ن هـ + ت جا ن هـ)$

$ع^{٢} = (١)^{٢} (جتا ٢\times٥° + ت جا ٢\times٥°)$

$ع^{٢} = جتا ١٠° + ت جا ١٠°$

③ جد قيمة

$$\left(\frac{-١ + \sqrt{٣}\, ت}{٢}\right)^{٣}$$

نضع ع = −١ + √٣ ت في الصورة القطبية

$س = -١ \quad ، \quad ص = \sqrt{٣}$

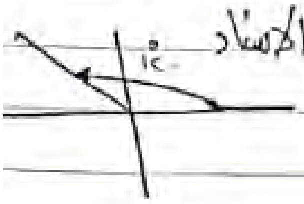
$ر = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} \Leftarrow ر = \sqrt{(-١)^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢}}$

$ر = \sqrt{١ + ٣} \Leftarrow ر = ٢$

$جتا هـ = \frac{س}{ر} \Leftarrow جتا هـ = -\frac{١}{٢}$

$جا هـ = \frac{ص}{ر} \Leftarrow جا هـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ هـ في الربع الثاني وزاوية الإسناد لها هي ٦٠°



$∴ هـ = ١٢٠°$

$ع = ر (جتا هـ + ت جا هـ)$

$ع = ٢ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)$

$$∴ \frac{(-١ + \sqrt{٣}\, ت)^{٣}}{٢} = \frac{(٢(جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°))^{٣}}{٢}$$

$ع^{ن} = ر^{ن} (جتا ن هـ + ت جا ن هـ)$

$$\frac{(٢(جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°))^{٣}}{٢} = \frac{٢^{٣}(جتا ٣\times١٢٠° + ت جا ٣\times١٢٠°)}{٢}$$

$$= \frac{٨(جتا ٣٦٠° + ت جا ٣٦٠°)}{٢}$$

$= ٤(١ + ت \times صفر) = ٤$

④ جد قيمة :

$$\left[\frac{\sqrt{١}+٣ت}{\sqrt{١}-٣ت}\right]^{١٠}$$

في الصورة أ + ب ت

تُعدل كالتالي:

$$= \left[\frac{١+\sqrt{٣}ت}{١-\sqrt{٣}ت}\right]^{١٠}$$

$$= \left[\frac{(١+\sqrt{٣}ت)(١+\sqrt{٣}ت)}{(١-\sqrt{٣}ت)(١+\sqrt{٣}ت)}\right]^{١٠}$$

$$= \left[\frac{١+\sqrt{٣}ت+\sqrt{٣}ت+٣ت^{٢}}{(١)^{٢}+(\sqrt{٣})^{٢}}\right]^{١٠}$$

$$= \left[\frac{١+٢\sqrt{٣}ت-٣}{٤}\right]^{١٠}$$

$$= \left[\frac{-٢+٢\sqrt{٣}ت}{٤}\right]^{١٠}$$

$$\left[-\frac{١}{٢}+\frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right]^{١٠}$$

نضع $ع = -\frac{١}{٢}+\frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$

في الصورة القطبية

$س = -\frac{١}{٢}$ ، $ص = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$ر = \sqrt{س^{٢}+ص^{٢}} \Leftarrow ر = \sqrt{(-\frac{١}{٢})^{٢}+(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}}$

$ر = \sqrt{\frac{١}{٤}+\frac{٣}{٤}}$

$ر = \sqrt{١} \Leftarrow ر = ١$

$جتاهـ = \frac{س}{ر} \Leftarrow جتاهـ = -\frac{١}{٢} \div ١$

$جتاهـ = -\frac{١}{٢}$

$جاهـ = \frac{ص}{ر} \Leftarrow جاهـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \div ١$

$جاهـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ $هـ = ١٢٠^{\circ}$

∴ هـ في الربع الثاني وزاوية الاسناد لها هي ٦٠°

$ع = ر\,(جتاهـ + ت\,جاهـ)$

$ع = ١\,(جتا\,١٢٠^{\circ} + ت\,جا\,١٢٠^{\circ})$

$ع = جتا\,١٢٠^{\circ} + ت\,جا\,١٢٠^{\circ}$

$ع^{ن} = ر^{ن}\,(جتا\,ن\,هـ + ت\,جا\,ن\,هـ)$

$$\left[\frac{١+\sqrt{٣}ت}{١-\sqrt{٣}ت}\right]^{١٠} = \left[جتا\,١٢٠^{\circ}+ت\,جا\,١٢٠^{\circ}\right]^{١٠}$$

$= (١)^{١٠}\left(جتا\,(١٠)(١٢٠^{\circ}) + ت\,جا\,(١٠)(١٢٠^{\circ})\right)$

$= جتا\,١٢٠٠^{\circ} + ت\,جا\,١٢٠٠^{\circ}$

$= -\,جتا\,٦٠^{\circ} + ت\,جا\,٦٠^{\circ}$

$= -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$

⑤ أحسب بدلالة جتاهـ ، جاهـ وقواهما كلا من :

جتا٤هـ ، جا٤هـ

جتا ن هـ + ت جا ن هـ = (جتاهـ + ت جاهـ)^{ن}

بوضع ن = ٤

جتا٤هـ + ت جا٤هـ = (جتاهـ + ت جاهـ)^{٤}

جتا٤هـ + ت جا٤هـ = (جتاهـ + ت جاهـ)^{2} (جتاهـ + ت جاهـ)^{2}

جتا٤هـ + ت جا٤هـ = (جتا^{2}هـ + (٢جاهـ جتاهـ) ت + (ت جاهـ)^{2}) (جتا^{2}هـ + (٢جاهـ جتاهـ) ت + (ت جاهـ)^{2})

جتا٤هـ + ت جا٤هـ = (جتا^{2}هـ + (جا٢هـ) ت + (-١)(جا^{2}هـ)) (جتا^{2}هـ + (جا٢هـ) ت + (-١)(جا^{2}هـ))

جتا٤هـ + ت جا٤هـ = (جتا^{2}هـ - جا^{2}هـ + (جا٢هـ) ت) (جتا^{2}هـ - جا^{2}هـ + (جا٢هـ)(ت))

جتا٤هـ + ت جا٤هـ = (جتا٢هـ + ت جا٢هـ) (جتا٢هـ + ت جا٢هـ)

جتا٤هـ + ت جا٤هـ = جتا^{2}٢هـ + (جا٢هـ جتا٢هـ) ت + (جا٢هـ جتا٢هـ)(ت) + (جا^{2}٢هـ)(ت^{2})

جتا٤هـ + ت جا٤هـ = جتا^{2}٢هـ - جا^{2}٢هـ + (جا٢هـ جتا٢هـ + جا٢هـ جتا٢هـ) ت

جتا٤هـ + ت جا٤هـ = جتا^{2}٢هـ - جا^{2}٢هـ + (٢جا٢هـ جتا٢هـ) ت

∴ جتا٤هـ = جتا^{2}٢هـ - جا^{2}٢هـ

جا٤هـ = ٢جا٢هـ جتا٢هـ

٦ برهن أن:

$$\left[\frac{1+\text{ت ظا هـ}}{1-\text{ت ظا هـ}}\right]^{\text{ن}} = \text{جتا ن هـ} + \text{ت جا ن هـ}$$

الأيمن:

$$\left[\frac{1+\text{ت ظا هـ}}{1-\text{ت ظا هـ}}\right]^{\text{ن}} = \left[\left(1+\frac{\text{ت جا هـ}}{\text{جتا هـ}}\right) \div \left(1-\frac{\text{ت جا هـ}}{\text{جتا هـ}}\right)\right]^{\text{ن}}$$

$$= \left[\left(\frac{\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ}}{\text{جتا هـ}}\right) \div \left(\frac{\text{جتا هـ} - \text{ت جا هـ}}{\text{جتا هـ}}\right)\right]^{\text{ن}}$$

$$= \left[\frac{(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})}{(\text{جتا هـ})} \times \frac{(\text{جتا هـ})}{(\text{جتا هـ} - \text{ت جا هـ})}\right]^{\text{ن}} = \left[\frac{\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ}}{\text{جتا هـ} - \text{ت جا هـ}}\right]^{\text{ن}}$$

$$= \left[\frac{(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})}{(\text{جتا هـ} - \text{ت جا هـ})(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})}\right]^{\text{ن}} = \left[\frac{\text{جتا}^2\text{هـ} + \text{ت جا هـ جتا هـ} + \text{ت جا هـ جتا هـ} + \text{ت}^2\text{جا}^2\text{هـ}}{\text{جتا}^2\text{هـ} + \text{جا}^2\text{هـ}}\right]^{\text{ن}}$$

$$= \left[\frac{\text{جتا}^2\text{هـ} - \text{جا}^2\text{هـ} + (2\,\text{جا هـ جتا هـ})(\text{ت})}{1}\right]^{\text{ن}} = \left[\text{جتا 2هـ} + \text{ت جا 2هـ}\right]^{\text{ن}}$$

$$\because (\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})^{\text{ن}} = \text{جتا ن هـ} + \text{ت جا ن هـ}$$

$$\therefore (\text{جتا 2هـ} + \text{ت جا 2هـ})^{\text{ن}} = \text{جتا 2ن هـ} + \text{ت جا 2ن هـ}$$

وهو المطلوب

تمرين (٧-٤)

① جد الجذور التربيعية للأعداد المركبة التالية:

أ/ $\sqrt{\frac{١ - ت}{\sqrt{٢}}}$

$\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}ت$

$س = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $ص = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

$ر = \sqrt{س^٢ + ص^٢} \Leftarrow ر = \sqrt{(\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢ + (\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢} = ١$

$جتاθ = \frac{س}{ر} \Leftarrow جتاθ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$جاθ = \frac{ص}{ر} \Leftarrow جاθ = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

$\therefore θ = ٣١٥°$

$\therefore \frac{١ - ت}{\sqrt{٢}} = ١(جتا ٣١٥° + ت جا ٣١٥°)$

$ع_ك = ر^{\frac{١}{ن}}\left[جتا \frac{θ + ك \times ٢\pi}{ن} + ت جا \frac{θ + ك \times ٢\pi}{ن}\right]$

$\sqrt{\frac{١ - ت}{\sqrt{٢}}} = (١)^{\frac{١}{٢}}\left[جتا \frac{٣١٥° + ٢ك\pi}{٢} + ت جا \frac{٣١٥° + ٢ك\pi}{٢}\right]$

$= جتا \frac{٣١٥° + ٢ك\pi}{٢} + ت جا \frac{٣١٥° + ٢ك\pi}{٢}$

بوضع ك = صفر

$ع_٠ = جتا \frac{٣١٥° + ٢\pi \times ٠}{٢} + ت جا \frac{٣١٥° + ٢\pi \times ٠}{٢}$

$ع_٠ = جتا ١٥٧,٥° + ت جا ١٥٧,٥°$

وبوضع ك = ١

$ع_١ = جتا \frac{٣١٥° + ٢\pi \times ١}{٢} + ت جا \frac{٣١٥° + ٢\pi \times ١}{٢}$

$ع_١ = جتا \frac{٣١٥° + ٣٦٠°}{٢} + ت جا \frac{٣١٥° + ٣٦٠°}{٢}$

$ع_١ = جتا ٣٣٧,٥° + ت جا ٣٣٧,٥°$

∴ الجذور التربيعية للعدد $\frac{١ - ت}{\sqrt{٢}}$

هي:

$جتا ١٥٧,٥° + ت جا ١٥٧,٥°$

و

$جتا ٣٣٧,٥° + ت جا ٣٣٧,٥°$

ب/ $٥ - ١٢ت$

$(س + ص ت)^٢ = ٥ - ١٢ت$

$س^٢ + ٢س ص ت - ص^٢ = ٥ - ١٢ت$

$(س^٢ - ص^٢) + (٢س ص)(ت) = ٥ - ١٢ت$

وبتطبيق تساوي الأعداد المركبة:

$س^٢ - ص^٢ = ٥ \rightarrow ①$

$٢س ص = -١٢ \rightarrow ②$

$\therefore ص = \frac{-٦}{س}$

وبتعويض $ص = \frac{-٦}{س}$ في المعادلة ①

$س^٢ - (\frac{-٦}{س})^٢ = ٥$

$س^٢ - \frac{٣٦}{س^٢} = ٥$ ، وبالضرب × $س^٢$

$س^٤ - ٥س^٢ - ٣٦ = ٠$

$(س^٢ - ٩)(س^٢ + ٤) = ٠$

إما $س^٢ + ٤ = ٠ \Leftarrow س^٢ = -٤$ مرفوضة لأن س حقيـ

أو $س^٢ - ٩ = ٠ \Leftarrow س^٢ = ٩ \Leftarrow س = \pm ٣$

فإذا كان س = ٣ فإن ص = ٦-/٣ = -٢

وإذا كان س = -٣ فإن ص = ٦-/٣- = ٢

∴ جذرا العدد ٥ - ١٢ت هما

٣ - ٢ت ، -٣ + ٢ت

جـ/ ٨ + ٤√٥ ت

(س + ص ت)^٢ = ٨ + ٤√٥ ت

س^٢ + ٢ س ص ت - ص^٢ = ٨ + ٤√٥ ت

(س^٢ - ص^٢) + (٢ س ص)(ت) = ٨ + ٤√٥ ت

وبتطبيق تساوي الأعداد المركبة

س^٢ - ص^٢ = ٨ ← ①

٢ س ص = ٤√٥

ص = ٤√٥ / ٢س

ص = ٢√٥ / س ← ②

بالتعويض ② في ①

س^٢ - (٢√٥ / س)^٢ = ٨

س^٢ - ٢٠/س^٢ = ٨ ، وبالضرب × س^٢

س^٤ - ٨س^٢ - ٢٠ = ٠

(س^٢ - ١٠)(س^٢ + ٢) = ٠

إما س^٢ + ٢ = ٠ ⟸ س^٢ = -٢

مرفوضة لأن س جزء حقيقي

أو س^٢ - ١٠ = ٠ ⟸ س^٢ = ١٠

س = ± √١٠

فإذا كان س = √١٠ فإن ص = ٢√٥ / √١٠

ص = ٢√٥ / (√٢ × √٥) ⟸ ص = √٢

وإذا كان س = -√١٠ فإن ص = ٢√٥ / -√١٠

ص = ٢√٥ / (-١ × √٢ × √٥) = -√٢

∴ الجذران للعدد ٨ + ٤√٥ ت هما

√١٠ + √٢ ت ، -√١٠ - √٢ ت

د/ √٣ + ت

نضع العدد في الصورة القطبية

س = √٣ ، ص = ١

ر = √(س^٢ + ص^٢) ⟸ ر = √((√٣)^٢ + (١)^٢) = ٢

جتا هـ = س/ر ⟸ جتا هـ = √٣/٢

جا هـ = ص/ر ⟸ جا هـ = ١/٢

∴ هـ = ٣٠°

∴ √٣ + ت = ٢(جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)

ع_ك = ر^(١/ن) [جتا (هـ + ٢طك)/ن + ت جا (هـ + ٢طك)/ن]

∴ √(√٣ + ت) = ٢^(١/٢) [جتا (٣٠° + ٢طك)/٢ + ت جا (٣٠° + ٢طك)/٢]

= √٢ [جتا (٣٠° + ٢طك)/٢ + ت جا (٣٠° + ٢طك)/٢]

بوضع ك = ٠

ع٠ = √٢ (جتا (٣٠° + ٢ط × ٠)/٢ + ت جا (٣٠° + ٢ط × ٠)/٢)

ع٠ = √٢ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)

وبوضع ك = ١

$ع_١ = \sqrt{٢}\left(جتا\frac{٣٠+٢ط×١}{٢} + ت جا\frac{٣٠+٢ط×١}{٢}\right)$

$ع_١ = \sqrt{٢}(جتا ١٩٥ + ت جا ١٩٥)$

∴ الجذران هما: $\sqrt{٢}(جتا ١٥ + ت جا ١٥)$ و $\sqrt{٢}(جتا ١٩٥ + ت جا ١٩٥)$

⑤ $\sqrt{٣} + ٣ت$

$ر = \sqrt{(\sqrt{٣})^٢ + ٣^٢} \Leftarrow ر = \sqrt{١٢}$

$جتاهـ = \frac{س}{ر} \Leftarrow جتاهـ = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{١٢}}$

$جتاهـ = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٤}×\sqrt{٣}} = \frac{١}{٢}$

$جاهـ = \frac{ص}{ر} \Leftarrow جاهـ = \frac{٣}{\sqrt{١٢}}$

$جاهـ = \frac{٣}{\sqrt{٤}×\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ هـ = ٦٠°

∴ $\sqrt{٣} + ٣ت = \sqrt{١٢}(جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)$

$ع_ك = ر^{\frac{١}{ن}}\left[جتا\frac{هـ+٢طك}{ن} + ت جا\frac{هـ+٢طك}{ن}\right]$

بوضع ك = ٠ ، ١

فبوضع ك = ٠

$ع_٠ = (\sqrt{١٢})^{\frac{١}{٢}}\left[جتا\frac{٦٠+٢ط×٠}{٢} + ت جا\frac{٦٠+٢ط×٠}{٢}\right]$

$ع_٠ = ١٢(جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)$

$ع_٠ = ٦\sqrt{٣} + ٦ت$

وبوضع ك = ١

$ع_١ = (\sqrt{١٢})^{\frac{١}{٢}}\left[جتا\frac{٦٠+٢ط×١}{٢} + ت جا\frac{٦٠+٢ط×١}{٢}\right]$

$ع_١ = ١٢(جتا ٢١٠ + ت جا ٢١٠)$

$ع_١ = ١٢(-جتا ٣٠ + ت × -جا ٣٠)$

$ع_١ = ١٢ × -\frac{\sqrt{٣}}{٢} + ت × -\frac{١}{٢} × ١٢$

$ع_١ = -٦\sqrt{٣} - ٦ت$

∴ الجذران هما: $٦\sqrt{٣} + ٦ت$ و $-٦\sqrt{٣} - ٦ت$

② أحسب الجذور التكعيبية للعدد ت

س = صفر ، ص = ١

$ر = \sqrt{س^٢+ص^٢} \Leftarrow ر = \sqrt{(٠)^٢+(١)^٢} = ١$

$جتاهـ = \frac{س}{ر} \Leftarrow جتاهـ = \frac{صفر}{١} = صفر$

$جاهـ = \frac{ص}{ر} \Leftarrow جاهـ = \frac{١}{١} = ١$

∴ هـ = ٩٠°

∴ ت = جتا ٩٠ + ت جا ٩٠

$ع_ك = ر^{\frac{١}{ن}}\left[جتا\frac{هـ+٢طك}{ن} + ت جا\frac{هـ+٢طك}{ن}\right]$

$ع_ك = (١)^{\frac{١}{٣}}\left[جتا\frac{٩٠+٢طك}{٣} + ت جا\frac{٩٠+٢طك}{٣}\right]$

بوضع ك = ٠ ، ١ ، ٢

فبوضع ك = ٠

$ع_٠ = جتا\frac{٩٠+٢ط×٠}{٣} + ت جا\frac{٩٠+٢ط×٠}{٣}$

$ع_٠ = جتا ٣٠ + ت جا ٣٠$

$ع_٠ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت$

وبوضع ك = ١

$ع_١ = جتا\frac{٩٠+٢ط×١}{٣} + ت جا\frac{٩٠+٢ط×١}{٣}$

$ع_١ = جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠$

$ع_١ = -جتا ٣٠ + ت جا ٣٠$

$ع_١ = -\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت$

وبوضع ك = ٢

$ع_٢ = \text{جتا}\,\frac{٩٠ + ٢\pi \times ٢}{٣} + ت\,\text{جا}\,\frac{٩٠ + ٢\pi \times ٢}{٣}$

$ع_٢ = \text{جتا}\,٢٧٠ + ت\,\text{جا}\,٢٧٠$

$ع_٢ = \text{صفر} + ت \times -١$

$ع_٢ = -ت$

∴ الجذور هي: $\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت$ ، $-\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت$ ، $-ت$

③ جد الجذور التكعيبية للعدد $-٢ - ٢ت$

$ر = \sqrt{(-٢)^٢ + (-٢)^٢} = \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$

$\text{جتا}\,هـ = \frac{س}{ر} \Leftarrow \text{جتا}\,هـ = \frac{-٢}{٢\sqrt{٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

$\text{جا}\,هـ = \frac{ص}{ر} \Leftarrow \text{جا}\,هـ = \frac{-٢}{٢\sqrt{٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

∴ $هـ = ٢٢٥^\circ$

∴ $-٢ - ٢ت = ٢\sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,٢٢٥ + ت\,\text{جا}\,٢٢٥)$

$ع_ك = ر^{\frac{١}{ن}} \left[\text{جتا}\,\frac{هـ + ٢\pi ك}{ن} + ت\,\text{جا}\,\frac{هـ + ٢\pi ك}{ن}\right]$

$ع_ك = (٢\sqrt{٢})^{\frac{١}{٣}} \left[\text{جتا}\,\frac{٢٢٥ + ٢\pi ك}{٣} + ت\,\text{جا}\,\frac{٢٢٥ + ٢\pi ك}{٣}\right]$

بوضع ك = ٠ ، ١ ، ٢

فبوضع ك = ٠

$ع = \sqrt{٢} \left[\text{جتا}\,\frac{٢٢٥ + ٢\pi \times ٠}{٣} + ت\,\text{جا}\,\frac{٢٢٥ + ٢\pi \times ٠}{٣}\right]$

$ع_٠ = \sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,٧٥^\circ + ت\,\text{جا}\,٧٥^\circ)$

$ع_٠ = \sqrt{٢}\,[\text{جتا}\,(٤٥ + ٣٠) + ت\,\text{جا}\,(٤٥ + ٣٠)]$

$ع = \sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,٤٥\,\text{جتا}\,٣٠ - \text{جا}\,٤٥\,\text{جا}\,٣٠) + ت\,(\text{جا}\,٤٥\,\text{جتا}\,٣٠ + \text{جتا}\,٤٥\,\text{جا}\,٣٠)$

$ع = \sqrt{٢}\left[\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} + ت\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢}\right)\right]$

$ع = \sqrt{٢}\left[\frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}} + ت\left(\frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}}\right)\right]$

$ع_٠ = \left(\frac{\sqrt{٣} - ١}{٢}\right) + \left(\frac{\sqrt{٣} + ١}{٢}\right) ت$

وبوضع ك = ١

$ع_١ = \sqrt{٢}\left[\text{جتا}\,\frac{٢٢٥ + ٢\pi}{٣} + ت\,\text{جا}\,\frac{٢٢٥ + ٢\pi}{٣}\right]$

$ع_١ = \sqrt{٢}\,[\text{جتا}\,١٩٥^\circ + ت\,\text{جا}\,١٩٥^\circ]$

$ع_١ = \sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,(١٥٠^\circ + ٤٥^\circ) + ت\,\text{جا}\,(١٥٠^\circ + ٤٥^\circ))$

$ع_١ = \sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,١٥٠^\circ\,\text{جتا}\,٤٥^\circ - \text{جا}\,١٥٠^\circ\,\text{جا}\,٣٠^\circ +$
$ت\,(\text{جا}\,١٥٠^\circ\,\text{جتا}\,٤٥ + \text{جا}\,١٥٠^\circ\,\text{جا}\,٤٥)$

$ع_١ = \sqrt{٢}\,(-\text{جا}\,٣٠^\circ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \text{جا}\,٣٠^\circ \times \frac{١}{٢} +$
$ت\,(\text{جا}\,٣٠^\circ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \text{جا}\,٣٠^\circ \times \frac{١}{\sqrt{٢}})$

$ع_١ = \sqrt{٢}\left[-\frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + ت\left(\frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢}\right)\right]$

$ع_١ = \sqrt{٢}\left[\left(\frac{-١}{٢\sqrt{٢}} - \frac{١}{٤}\right) + ت\left(\frac{١}{٢\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{٢}}\right)\right]$

$ع_١ = \sqrt{٢}\left(\frac{-٤ - ٢\sqrt{٢}}{٨\sqrt{٢}} + ت\left(\frac{١ + ١}{٢\sqrt{٢}}\right)\right)$

$ع_١ = \left(\frac{-\sqrt{٢} - ١}{٢}\right) + \frac{١}{\sqrt{٢}}\,ت$

وبوضع ك = ٢

ع$_2$ = $\sqrt{2}$ [جتا $\frac{٤٥ + ٢ط × ٢}{٣}$ + ت جا $\frac{٤٥ + ٢ط × ٢}{٣}$]

ع$_2$ = $\sqrt{2}$ [جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥]

ع$_2$ = $\sqrt{2}$ (جتا ٤٥ + ت × −جا ٤٥)

ع$_2$ = $\sqrt{2}$ ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ − $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ت)

ع$_2$ = ١ − ت

∴ الجذور هي: $\sqrt{2}$ (جتا ٧٥ + ت جا ٧٥)

$\sqrt{2}$ (جتا ١٩٥ + ت جا ١٩٥) و $\sqrt{2}$ (جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥)

④ جد كلا من الجذور التالية ومثلها بيانيا:

أ) $(-١ + ت)^{\frac{1}{3}}$

نضع −١ + ت في الصورة القطبية

ر = $\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}$ = $\sqrt{2}$

جتا هـ = $\frac{س}{ر}$ ⟸ جتا هـ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

جا هـ = $\frac{ص}{ر}$ ⟸ جا هـ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ هـ = ١٣٥°

∴ −١ + ت = $\sqrt{2}$ (جتا ١٣٥ + ت جا ١٣٥)

ع$_ك$ = ر$^{\frac{1}{ن}}$ [جتا $\frac{هـ + ٢ط ك}{ن}$ + ت جا $\frac{هـ + ٢ط ك}{ن}$]

ع$_ك$ = $(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ [جتا $\frac{١٣٥ + ٢ط ك}{٣}$ + ت جا $\frac{١٣٥ + ٢ط ك}{٣}$]

بوضع ك = ٠، ١، ٢

فبوضع ك = ٠:

ع$_0$ = $\sqrt[6]{2}$ (جتا $\frac{١٣٥ + ٢ط × ٠}{٣}$ + ت جا $\frac{١٣٥ + ٢ط × ٠}{٣}$)

ع$_0$ = $\sqrt[6]{2}$ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

ع$_0$ = $\sqrt[6]{2}$ ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ + ت × $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

ع$_0$ = $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ + $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ت

وبوضع ك = ١

ع$_1$ = $\sqrt[6]{2}$ (جتا $\frac{١٣٥ + ٢ط × ١}{٣}$ + ت جا $\frac{١٣٥ + ٢ط × ١}{٣}$)

ع$_1$ = $\sqrt[6]{2}$ (جتا ١٦٥ + ت جا ١٦٥)

وبوضع ك = ٢

ع$_2$ = $\sqrt[6]{2}$ (جتا $\frac{١٣٥ + ٢ط × ٢}{٣}$ + ت جا $\frac{١٣٥ + ٢ط × ٢}{٣}$)

ع$_2$ = $\sqrt[6]{2}$ (جتا ٢٨٥ + ت جا ٢٨٥)

∴ الجذور هي:

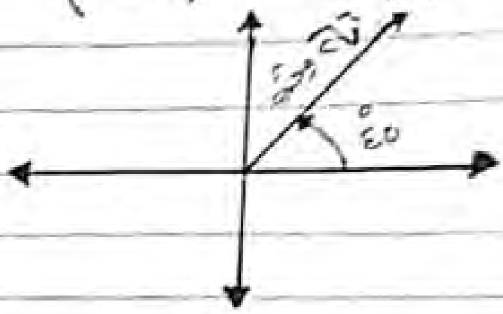
$\sqrt[6]{2}$ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

$\sqrt[6]{2}$ (جتا ١٦٥ + ت جا ١٦٥)

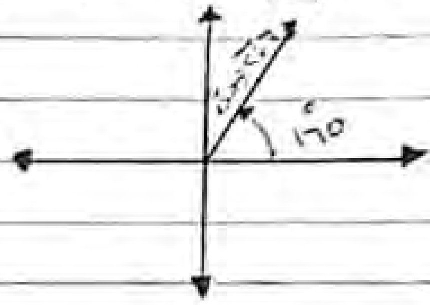
$\sqrt[6]{2}$ (جتا ٢٨٥ + ت جا ٢٨٥)

التمثيل البياني:

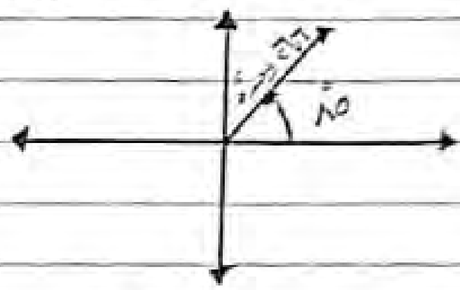
ع. = $\sqrt{2}$ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)



ع١ = $\sqrt{2}$ (جتا ١٦٥° + ت جا ١٦٥°)



ع٢ = $\sqrt{2}$ (جتا ٢٨٥° + ت جا ٢٨٥°)



(ب) $(-2\sqrt{3} - 2ت)^{\frac{1}{4}}$

نضع $-2\sqrt{3} - 2ت$ في الصورة القطبية

ر = $\sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2}$ = ٤

جتا هـ = $\frac{س}{ر}$ ⟸ جتا هـ = $\frac{-2\sqrt{3}}{4}$ = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

جا هـ = $\frac{ص}{ر}$ ⟸ جا هـ = $\frac{-2}{4}$ = $\frac{-1}{2}$

∴ هـ = ٢١٠°

∴ $-2\sqrt{3} - 2ت$ = ٤ (جتا ٢١٠° + ت جا ٢١٠°)

ع ن = ر$^{\frac{1}{ن}}$ [جتا $\frac{هـ + ٢\pi ك}{ن}$ + ت جا $\frac{هـ + ٢\pi ك}{ن}$]

ع ك = ٤$^{\frac{1}{4}}$ [جتا $\frac{٢١٠° + ٢\pi ك}{٤}$ + ت جا $\frac{٢١٠° + ٢\pi ك}{٤}$]

بوضع ك = ٠، ١، ٢، ٣

فبوضع ك = ٠

ع. = $\sqrt{2}$ [جتا $\frac{٢١٠° + ٢\pi \times ٠}{٤}$ + ت جا $\frac{٢١٠° + ٢\pi \times ٠}{٤}$]

ع. = $\sqrt{2}$ (جتا ٥٢,٥° + ت جا ٥٢,٥°)

وبوضع ك = ١

ع١ = $\sqrt{2}$ [جتا $\frac{٢١٠° + ٢\pi \times ١}{٤}$ + ت جا $\frac{٢١٠° + ٢\pi \times ١}{٤}$]

ع١ = $\sqrt{2}$ (جتا ١٤٢,٥° + ت جا ١٤٢,٥°)

وبوضع ك = ٢

ع٢ = $\sqrt{2}$ [جتا $\frac{٢١٠° + ٢\pi \times ٢}{٤}$ + ت جا $\frac{٢١٠° + ٢\pi \times ٢}{٤}$]

ع٢ = $\sqrt{2}$ (جتا ٢٣٢,٥° + ت جا ٢٣٢,٥°)

وبوضع ك = ٣

ع٣ = $\sqrt{2}$ [جتا $\frac{٢١٠° + ٢\pi \times ٣}{٤}$ + ت جا $\frac{٢١٠° + ٢\pi \times ٣}{٤}$]

ع٣ = $\sqrt{2}$ (جتا ٣٢٢,٥° + ت جا ٣٢٢,٥°)

∴ الجذور هي: $\sqrt{2}$ (جتا ١٤٢,٥° + ت جا ١٤٢,٥°)

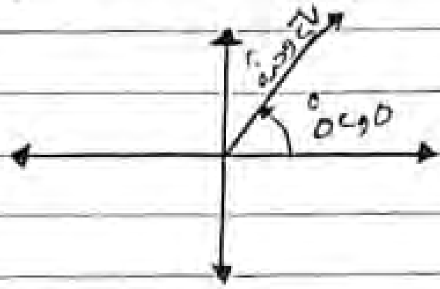
$\sqrt{2}$ (جتا ٥٢,٥° + ت جا ٥٢,٥°)،

$\sqrt{2}$ (جتا ٢٣٢,٥° + ت جا ٢٣٢,٥°)،

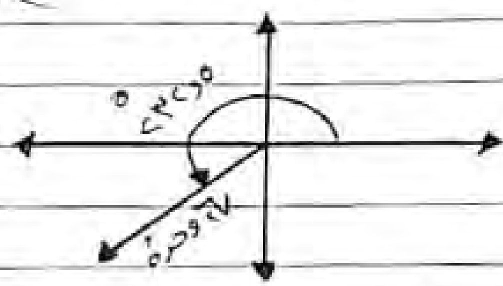
$\sqrt{2}$ (جتا ٣٢٢,٥° + ت جا ٣٢٢,٥°)

التمثيل البياني :-

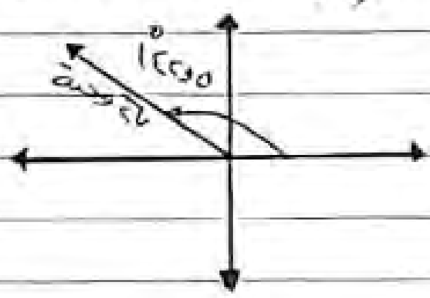
$ع_٠ = \sqrt{٢}\,(جتا\ ٥٢٫٥° + ت\ جا\ ٥٢٫٥°)$



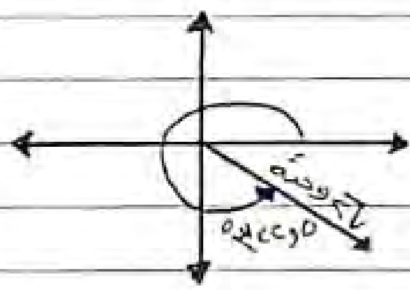
$ع_١ = \sqrt{٢}\,(جتا\ ٢٣٢٫٥° + ت\ جا\ ٢٣٢٫٥°)$



$ع_١ = \sqrt{٢}\,(جتا\ ١٤٢٫٥° + ت\ جا\ ١٤٢٫٥°)$



$ع_٣ = \sqrt{٢}\,(جتا\ ٣٢٢٫٥° + ت\ جا\ ٣٢٢٫٥°)$



٥) أحسب قيمتي ع

$ع = (-٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت)^{\frac{٣}{٢}}$

بتربيع الطرفين

$ع^٢ = (-٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت)^٣$

نضع $(-٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت)$ في الصورة القطبية

$ر = \sqrt{(-٢)^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢} = ٤$

$جتا\ هـ = \frac{س}{ر} \Leftarrow جتا\ هـ = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$

$جا\ هـ = \frac{ص}{ر} \Leftarrow جا\ هـ = \frac{٢\sqrt{٣}}{٤} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore هـ = ١٢٠°$

$\therefore -٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت = ٤(جتا\ ١٢٠° + ت\ جا\ ١٢٠°)$

$\therefore ع^٢ = \left(٤(جتا\ ١٢٠° + ت\ جا\ ١٢٠°)\right)^٣$

$\therefore ع^٢ = (٤)^٣(جتا\ ٣ \times ١٢٠° + ت\ جا\ ٣ \times ١٢٠°)$

$ع^٢ = ٦٤(جتا\ ٣٦٠° + ت\ جا\ ٣٦٠°)$

$ع_ر = ٦٤^{\frac{١}{٢}}\left[جتا \frac{٣٦٠° + ٣٦٠ ر}{٢} + ت\ جا \frac{٣٦٠° + ٣٦٠ ر}{٢}\right]$

بوضع ر = ٠

$ع_٠ = ٨\left[جتا \frac{٣٦٠° + ٣٦٠ \times ٠}{٢} + ت\ جا \frac{٣٦٠° + ٣٦٠ \times ٠}{٢}\right]$

$ع_٠ = ٨(جتا\ ١٨٠° + ت\ جا\ ١٨٠°) = -٨$

وبوضع ر = ١

$ع_١ = ٨\left[جتا \frac{٣٦٠° + ٣٦٠ \times ١}{٢} + ت\ جا \frac{٣٦٠° + ٣٦٠ \times ١}{٢}\right]$

$ع_١ = ٨(جتا\ ٣٦٠° + ت\ جا\ ٣٦٠°) = ٨$

∴ قيمتي ع هما −٨ ، ٨

(٦) في كل حالة جد جذور الأعداد المركبة المعطاة:

أ) $(8)^{\frac{1}{6}}$

ع = 8

س = 8 ، ص = 0

$ر = \sqrt{(8)^2 + (0)^2} = 8$

جتا هـ = $\frac{س}{ر}$ ⟸ جتا هـ = $\frac{8}{8} = 1$

جا هـ = $\frac{ص}{ر}$ ⟸ جا هـ = $\frac{0}{8} = 0$

∴ هـ = 0°

8 = 8 (جتا صفر + ت جا صفر)

$ع_ك = 8^{\frac{1}{6}}$ [جتا $\frac{0 + 2\pi ك}{6}$ + ت جا $\frac{0 + 2\pi ك}{6}$]

بوضع ك = 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5

فبوضع ك = 0

$ع_0 = \sqrt{2}$ (جتا صفر + ت جا صفر)

$ع_0 = \sqrt{2}\,(1 + ت \times 0) = \sqrt{2}$

وبوضع ك = 1

$ع_1 = \sqrt{2}$ [جتا $\frac{0 + 2\pi \times 1}{6}$ + ت جا $\frac{0 + 2\pi \times 1}{6}$]

$ع_1 = \sqrt{2}$ (جتا 60° + ت جا 60°)

$ع_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + ت \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\ ت$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\ ت$

وبوضع ك = 2

$ع_2 = \sqrt{2}$ [جتا $\frac{0 + 2\pi \times 2}{6}$ + ت جا $\frac{0 + 2\pi \times 2}{6}$]

$ع_2 = \sqrt{2}$ (جتا 120° + ت جا 120°)

$ع_2 = \sqrt{2} \times -\frac{1}{2} + ت \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$ع_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\ ت$

وبوضع ك = 3

$ع_3 = \sqrt{2}$ [جتا $\frac{0 + 2\pi \times 3}{6}$ + ت جا $\frac{0 + 2\pi \times 3}{6}$]

$ع_3 = \sqrt{2}$ (جتا 180° + ت جا 180°)

$ع_3 = \sqrt{2} \times -1 + ت \times \sqrt{2} \times 0 = -\sqrt{2}$

وبوضع ك = 4

$ع_4 = \sqrt{2}$ [جتا $\frac{0 + 2\pi \times 4}{6}$ + ت جا $\frac{0 + 2\pi \times 4}{6}$]

$ع_4 = \sqrt{2}$ (جتا 240° + ت جا 240°)

$ع_4 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + ت \times -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$ع_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\ ت$

وبوضع ك = 5

$ع_5 = \sqrt{2}$ [جتا $\frac{0 + 2\pi \times 5}{6}$ + ت جا $\frac{0 + 2\pi \times 5}{6}$]

$ع_5 = \sqrt{2}$ (جتا 300° + ت جا 300°)

$ع_5 = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} + ت \times -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}$

$ع_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\ ت$

∴ الجذور الستة هي :

$\sqrt{2}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ ت

$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ ت ،

$-\sqrt{2}$ ، $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}$ ت

$\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}$ ت

(ب) $(-1)^{\frac{1}{3}}$

ع $= -1$

س $= -1$ ، ص $= 0$

ر $= \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$

جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$ ⟸ جتا هـ = $\frac{-1}{1} = -1$

جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ ⟸ جا هـ = $\frac{0}{1}$ = صفر

∴ هـ = $180°$

∴ -1 = جتا $180°$ + ت جا $180°$

ع$_{ك}$ = $(1)^{\frac{1}{3}}$ [جتا $\frac{180° + 2\pi ك}{3}$ + ت جا $\frac{180° + 2\pi ك}{3}$]

بوضع ك = ٠ ، ١ ، ٢

فبوضع ك = ٠

ع$_0$ = جتا $\frac{180° + 2\pi \times 0}{3}$ + ت جا $\frac{180° + 2\pi \times 0}{3}$

ع$_0$ = جتا $60°$ + ت جا $60°$

ع = $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

وبوضع ك = ١

ع$_1$ = جتا $\frac{180° + 2\pi \times 1}{3}$ + ت جا $\frac{180° + 2\pi \times 1}{3}$

ع$_1$ = جتا $180°$ + ت جا $180°$

ع$_1$ = -1 + ت × صفر

ع$_1$ = -1

وبوضع ك = ٢

ع$_2$ = جتا $\frac{180° + 2\pi \times 2}{3}$ + ت جا $\frac{180° + 2\pi \times 2}{3}$

ع$_2$ = جتا $300°$ + ت جا $300°$

ع$_2$ = جتا $60°$ + ت جا $60°$

ع$_2$ = $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

∴ الجذور هي :

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت ،

-1 ،

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

(ج) $(٢ت)^{\frac{1}{٢}}$

ع = ٢ت

س = ٠ ، ص = ٢

$ر = \sqrt{(٠)^٢ + (٢)^٢} \Leftarrow ر = ٢$

$جتاهـ = \frac{س}{ر} \Leftarrow جتاهـ = \frac{٠}{٢} = ٠$

$جاهـ = \frac{ص}{ر} \Leftarrow جاهـ = \frac{٢}{٢} = ١$

∴ هـ = ٩٠°

∴ ٢ت = ٢(جتا٩٠° + ت جا٩٠°)

$ع_{ك} = (٢)^{\frac{1}{٢}} \left[جتا \frac{٩٠° + ٢\pi ك}{٢} + ت جا \frac{٩٠° + ٢\pi ك}{٢} \right]$

بوضع ك = ٠

$ع_{٠} = \sqrt{٢} \left[جتا \frac{٩٠° + ٢\pi \times ٠}{٢} + ت جا \frac{٩٠° + ٢\pi \times ٠}{٢} \right]$

$ع_{٠} = \sqrt{٢} (جتا٤٥° + ت جا٤٥°)$

$ع_{٠} = \sqrt{٢} \times \frac{1}{\sqrt{٢}} + ت \times \frac{1}{\sqrt{٢}} \times \sqrt{٢}$

$ع_{٠} = ١ + ت$

وبوضع ك = ١

$ع_{١} = \sqrt{٢} \left[جتا \frac{٩٠° + ٢\pi \times ١}{٢} + ت جا \frac{٩٠° + ٢\pi \times ١}{٢} \right]$

$ع_{١} = \sqrt{٢} (جتا٢٢٥° + ت جا٢٢٥°)$

$ع_{١} = \sqrt{٢} \times \frac{-1}{\sqrt{٢}} + \sqrt{٢} \times \frac{-1}{\sqrt{٢}} ت$

$ع_{١} = -١ - ت$

∴ الجذور هي: ١ + ت و -١ - ت

(٧) حل المعادلة:

$ع^{٥} + ت = ٠$

$ع^{٥} = -ت$

$ع = (-ت)^{\frac{1}{٥}}$

وبوضع -ت في الصورة القطبية

$ر = \sqrt{(٠)^٢ + (-١)^٢} = ١$

$جتاهـ = \frac{س}{ر} \Leftarrow جتاهـ = \frac{٠}{١} = ٠$

$جاهـ = \frac{ص}{ر} \Leftarrow جاهـ = \frac{-١}{١} = -١$

∴ هـ = ٢٧٠°

∴ -ت = جتا٢٧٠° + ت جا٢٧٠°

$ع_{ك} = (١)^{\frac{1}{٥}} \left[جتا \frac{٢٧٠° + ٢\pi ك}{٥} + ت جا \frac{٢٧٠° + ٢\pi ك}{٥} \right]$

بوضع ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

فبوضع ك = ٠

$ع_{٠} = جتا \frac{٢٧٠° + ٢\pi \times ٠}{٥} + ت جا \frac{٢٧٠° + ٢\pi \times ٠}{٥}$

$ع_{٠} = جتا ٥٤° + ت جا ٥٤°$

وبوضع ك = ١

$ع_{١} = جتا \frac{٢٧٠° + ٢\pi \times ١}{٥} + ت جا \frac{٢٧٠° + ٢\pi \times ١}{٥}$

$ع_{١} = جتا ١٢٦° + ت جا ١٢٦°$

وبوضع ك = ٢

$ع_{٢} = جتا \frac{٢٧٠° + ٢\pi \times ٢}{٥} + ت جا \frac{٢٧٠° + ٢\pi \times ٢}{٥}$

$ع_{٢} = جتا ١٩٨° + ت جا ١٩٨°$

وبوضع ك = ٣

$$ع_٣ = \text{جتا}\,\frac{٢٧٠ + ٢\pi \times ٣}{٥} + \text{ت جا}\,\frac{٢٧٠ + ٢\pi \times ٣}{٥}$$

ع٣ = جتا ٢٧٠° + ت جا ٢٧٠°

وبوضع ك = ٤

$$ع_٤ = \text{جتا}\,\frac{٢٧٠ + ٢\pi \times ٤}{٥} + \text{ت جا}\,\frac{٢٧٠ + ٢\pi \times ٤}{٥}$$

ع٤ = جتا ٣٤٢° + ت جا ٣٤٢°

∴ جذور المعادلة الخمسة هي:

جتا ٥٤° + ت جا ٥٤° ،

جتا ١٢٦° + ت جا ١٢٦° ،

جتا ١٩٨° + ت جا ١٩٨° ،

جتا ٢٧٠° + ت جا ٢٧٠° ،

جتا ٣٤٢° + ت جا ٣٤٢° .

(٨) جد الجذور الثلاثة للمعادلة

$$(١ - ت)\,ع^٣ = ٨ + ٨ت$$

بقسمة الطرفين على (١ - ت)

$$\therefore ع^٣ = \frac{٨ + ٨ت}{١ - ت}$$

$$ع^٣ = \frac{(٨ + ٨ت)(١ + ت)}{(١ - ت)(١ + ت)}$$

$$ع^٣ = \frac{٨ + ٨ت + ٨ت - ٨}{(١)^٢ + (-١)^٢}$$

$$ع^٣ = \frac{١٦ت}{٢} \Leftarrow ع^٣ = ٨ت$$

$$\therefore ع = (٨ت)^{\frac{١}{٣}}$$

وبوضع ٨ت في الصورة القطبية

$$ر = \sqrt{(٠)^٢ + (٨)^٢} \Leftarrow ر = ٨$$

$$\text{جتا هـ} = \frac{س}{ر} \Leftarrow \text{جتا هـ} = \frac{٠}{٨} = ٠$$

$$\text{جا هـ} = \frac{ص}{ر} \Leftarrow \text{جا هـ} = \frac{٨}{٨} = ١$$

∴ هـ = ٩٠°

∴ ٨ت = ٨(جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°)

$$ع_ك = (٨)^{\frac{١}{٣}}\left[\text{جتا}\,\frac{٩٠° + ٢\pi ك}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٩٠° + ٢\pi ك}{٣}\right]$$

بوضع ك = ٠، ١، ٢

فبوضع ك = ٠

$$ع_٠ = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٩٠° + ٢\pi \times ٠}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٩٠° + ٢\pi \times ٠}{٣}\right)$$

ع٠ = ٢(جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)

$$ع_٠ = ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ت \times \frac{١}{٢} \times ٢$$

$$ع_٠ = \sqrt{٣} + ت$$

وبوضع ك = ١

$$ع_١ = ٢\left[\text{جتا}\,\frac{٩٠° + ٢\pi \times ١}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٩٠° + ٢\pi \times ١}{٣}\right]$$

ع١ = ٢ جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°

$$ع_١ = ٢ \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢} + ت \times \frac{١}{٢}$$

$$ع_١ = -\sqrt{٣} + \frac{١}{٢}ت$$

وبوضع ك = ٢

$$ع_٢ = ٢\left[\text{جتا}\,\frac{٩٠° + ٢\pi \times ٢}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٩٠° + ٢\pi \times ٢}{٣}\right]$$

ع٢ = ٢(جتا ٢٧٠° + ت جا ٢٧٠°)

∴ الجذور الثلاثة هي :-

$\sqrt{٣} + \text{ت}$ ، $-\sqrt{٣} + \frac{١}{٢}\text{ت}$ ، $-\text{ت}$

⑨ جد جذور المعادلة :-

$$\text{ع}^{٣} = \frac{١ - \text{ت}}{١ + \text{ت}}$$

$$\text{ع}^{٣} = \frac{(١ - \text{ت})(١ - \text{ت})}{(١ + \text{ت})(١ - \text{ت})}$$

$$\text{ع}^{٣} = \frac{١ - \text{ت} - \text{ت} + \text{ت}^{٢}}{(١)^{٢} + (١)^{٢}}$$

$$\text{ع}^{٣} = \frac{-٢\text{ت}}{٢} \Leftarrow \text{ع}^{٣} = -\text{ت}$$

$$\therefore \text{ع} = (-\text{ت})^{\frac{١}{٣}}$$

ونضع $(-\text{ت})$ في الصورة القطبية

$$\text{ر} = \sqrt{(٠)^{٢} + (-١)^{٢}} = ١$$

$$\text{جتاهـ} = \frac{\text{س}}{\text{ر}} \Leftarrow \text{جتاهـ} = \frac{٠}{١} = \text{صفر}$$

$$\text{جاهـ} = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} \Leftarrow \text{جاهـ} = \frac{-١}{١} = -١$$

$$\therefore \text{هـ} = ٢٧٠^{\circ}$$

$$\therefore -\text{ت} = \text{جتا}٢٧٠^{\circ} + \text{ت جا}٢٧٠^{\circ}$$

$$\text{ع}_{\text{ك}} = (١)^{\frac{١}{٣}}\left[\text{جتا}\frac{٢٧٠^{\circ} + ٢\pi\text{ك}}{٣} + \text{ت جا}\frac{٢٧٠^{\circ} + ٢\pi\text{ك}}{٣}\right]$$

نضع ك = ٠ ، ١ ، ٢

فبوضع ك = ٠ :

$$\text{ع}_{٠} = \text{جتا}\frac{٢٧٠^{\circ} + ٢\pi \times ٠}{٣} + \text{ت جا}\frac{٢٧٠^{\circ} + ٢\pi \times ٠}{٣}$$

$$\text{ع}_{٠} = \text{جتا}٩٠^{\circ} + \text{ت جا}٩٠^{\circ}$$

$$\text{ع}_{٠} = ٠ + \text{ت} \times ١$$

$$\text{ع}_{٠} = \text{ت}$$

وبوضع ك = ١

$$\text{ع}_{١} = \text{جتا}\frac{٢٧٠^{\circ} + ٢\pi \times ١}{٣} + \text{ت جا}\frac{٢٧٠^{\circ} + ٢\pi \times ١}{٣}$$

$$\text{ع}_{١} = \text{جتا}٢١٠^{\circ} + \text{ت جا}٢١٠^{\circ}$$

$$\text{ع}_{١} = -\text{جتا}٣٠^{\circ} + \text{ت} \times -\text{جا}٣٠^{\circ}$$

$$\text{ع}_{١} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ت}$$

وبوضع ك = ٢

$$\text{ع}_{٢} = \text{جتا}\frac{٢٧٠^{\circ} + ٢\pi \times ٢}{٣} + \text{ت جا}\frac{٢٧٠^{\circ} + ٢\pi \times ٢}{٣}$$

$$\text{ع}_{٢} = \text{جتا}٣٣٠^{\circ} + \text{ت جا}٣٣٠^{\circ}$$

$$\text{ع}_{٢} = \text{جتا}٣٠^{\circ} + \text{ت} \times -\text{جا}٣٠^{\circ}$$

$$\text{ع}_{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ت}$$

∴ الجذور هي :-

ت ، $-\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ت}$

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ت}$

⑩ إذا كان:

$ع = \sqrt{2} + \sqrt{6}\,ت$

جد قيم ع الخمسة بالصورة القطبية.

$ع^{\frac{1}{5}} = \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\,ت\right)^{\frac{1}{5}}$

ونضع $\sqrt{2} + \sqrt{6}\,ت$ في الصورة القطبية

$ر = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{8}$

$ر = 2\sqrt{2}$

$جتا و = \frac{س}{ر} \Leftarrow جتا و = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$جا و = \frac{ص}{ر} \Leftarrow جا و = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}$

$جا و = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Leftarrow جا و = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore و = 60^\circ$

$\therefore \sqrt{2} + \sqrt{6}\,ت = 2\sqrt{2}\left(جتا 60^\circ + ت جا 60^\circ\right)$

$ع_ل = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}\left[جتا \frac{60^\circ + 2\pi ل}{5} + ت جا \frac{60^\circ + 2\pi ل}{5}\right]$

$ع_ل = \sqrt[10]{8}\left(جتا \frac{60^\circ + 2\pi ل}{5} + ت جا \frac{60^\circ + 2\pi ل}{5}\right)$

بوضع ل = ٠، ١، ٢، ٣، ٤

فبوضع ل = ٠

$ع_0 = \sqrt[10]{8}\left(جتا \frac{60^\circ + 2\pi \times 0}{5} + ت جا \frac{60^\circ + 2\pi \times 0}{5}\right)$

$ع_0 = \sqrt[10]{8}\left(جتا 12^\circ + ت جا 12^\circ\right)$

وبوضع ل = ١

$ع_1 = \sqrt[10]{8}\left(جتا \frac{60^\circ + 2\pi \times 1}{5} + ت جا \frac{60^\circ + 2\pi \times 1}{5}\right)$

$ع_1 = \sqrt[10]{8}\left(جتا 84^\circ + ت جا 84^\circ\right)$

وبوضع ل = ٢

$ع_2 = \sqrt[10]{8}\left(جتا \frac{60^\circ + 2\pi \times 2}{5} + ت جا \frac{60^\circ + 2\pi \times 2}{5}\right)$

$ع_2 = \sqrt[10]{8}\left(جتا 156^\circ + ت جا 156^\circ\right)$

وبوضع ل = ٣

$ع_3 = \sqrt[10]{8}\left(جتا \frac{60^\circ + 2\pi \times 3}{5} + ت جا \frac{60^\circ + 2\pi \times 3}{5}\right)$

$ع_3 = \sqrt[10]{8}\left(جتا 228^\circ + ت جا 228^\circ\right)$

وبوضع ل = ٤

$ع_4 = \sqrt[10]{8}\left(جتا \frac{60^\circ + 2\pi \times 4}{5} + ت جا \frac{60^\circ + 2\pi \times 4}{5}\right)$

$ع_4 = \sqrt[10]{8}\left(جتا 300^\circ + ت جا 300^\circ\right)$

$ع_4 = \sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{24}\,ت$

∴ الجذور الخمسة هي:

$\sqrt[10]{8}\left(جتا 12^\circ + ت جا 12^\circ\right)$ ،

$\sqrt[10]{8}\left(جتا 84^\circ + ت جا 84^\circ\right)$ ،

$\sqrt[10]{8}\left(جتا 228^\circ + ت جا 228^\circ\right)$ ،

$\sqrt[10]{8}\left(جتا 156^\circ + ت جا 156^\circ\right)$ ،

$\sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{24}\,ت$