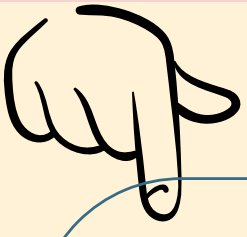
تم رفع الملف
عبر

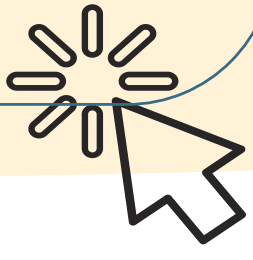
موقع الكتاب 24

للعودة الى الموقع اكتب في بحث جوجل

موقع الكتاب 24



alktab24.online



اعداد :-
أ. شادية احمد ابو عرقوب

١

الباب الأول
المتباينات

* **المتباينة :-** هي جملة رياضية تحتوي أحد الإشارات < أو > بين عبارتين جبريتين وهى عكس المعادلة ولو أنها تحل بنفس الطرق

* **رموز أو علامات التباين :-**

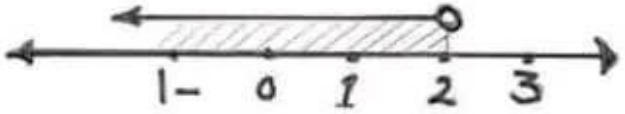
« > أكبر من » ، « < أصغر من » ، « ≥ أكبر من أو يساوى »

« ≤ أصغر من أو يساوى »

* **حل المتباينة :-** هو إيجاد كل الاعداد التى تجعل المتباينة فى حالة صحيحة وتسمى فئة الحل للمتباينة ، ويمكن عرض مجموعة الحل للمتباينة على خط الاعداد فإذا كان :-

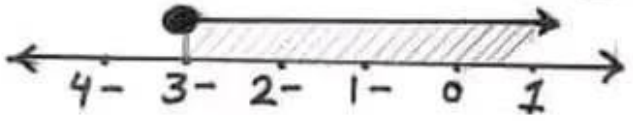
١) المتباينة تحتوى على علامة > أو < فإننا نمثل هذه القيم على خط الاعداد بدائرة مفتوحة ○ ، وتعنى أن العدد الذى تحتها ليس من ضمن فئة الحل.

* **مثال :-** س < 2



٢) المتباينة تحتوي على علامة ≥ أو ≤ فإننا نمثل هذه القيم على خط الأعداد بدائرة مغلقة ● وتعنى أن العدد الذى تحتها هو من ضمن مجموعة الحل.

* **مثال :-** س ≥ -3



ملاحظة :- الجزء المظلل تحت السهم هو مجموعة الحل .

يتبع

* عزيزي الطالب :-

لكي يسهل عليك فهم باب المتباينات يجب أخذ الملاحظات الآتية بعين الاعتبار :-

أ) المتباينة على صورة س > أ ، س < ب « مثلاً » تسمى متباينة مفردة.

ب) المتباينة على صورة أ < س < ب [وتقرأ :- س أكبر من أ وأصغر من ب] تسمى متباينة مزدوجة ، حيث أ ، ب رقمان حقيقيان.

ج) على خط الأعداد كلما اتجهنا يساراً كانت القيم أصغر فأصغر وكلما اتجهنا يميناً كانت القيم أكبر فأكبر.

فمثلاً :- اذا كان في المتباينة علامة (أصغر من) فإننا نتجه يساراً على خط الأعداد ، واذا كان في المتباينة علامة (أكبر من) فإننا نتجه يميناً على خط الأعداد.

د) لحل المتباينة علينا جعل المتغير (المجهول) في طرف والقيم في الطرف الآخر.

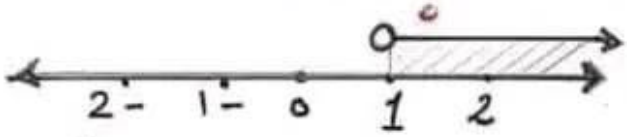
---

* حل تمارين ص 3 من الكتاب المدرسي :-

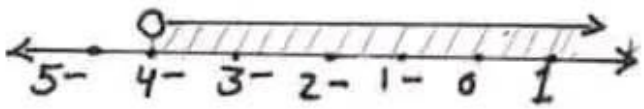
شادية ابوعرقوب

ش/ مثل كلا مما يأتي على خط الأعداد.

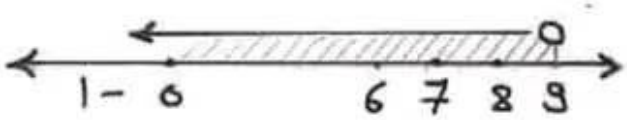
أ) س > ١



ب) س > -٦

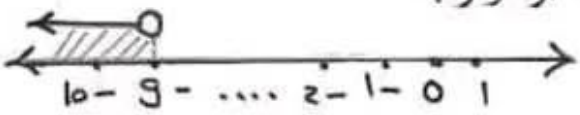


جـ) س < ٩

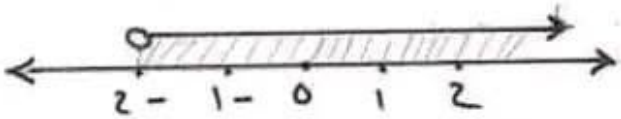


شادية ابوعرقوب

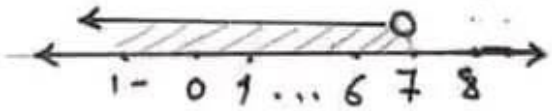
د) س < -9



هـ) س > -2

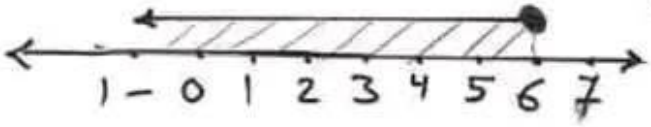


و) س < 7

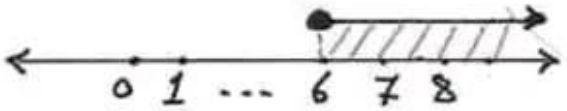


س٥ بين كلا مما يأتي على خط الاعداد :-

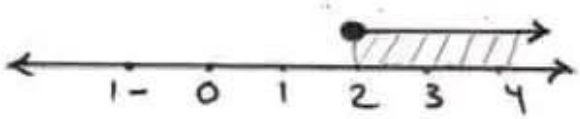
أ) س ≥ 6



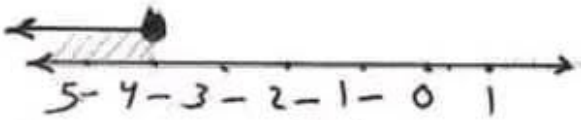
ب) س ≤ 6



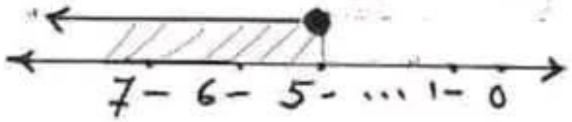
ج) س ≤ 2



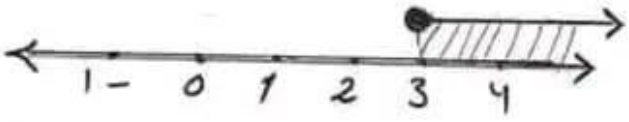
د) س ≥ -6



هـ) س ≥ -5



و) س ≤ 3

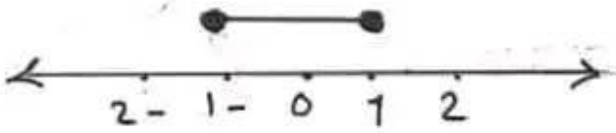


لاحظ :-

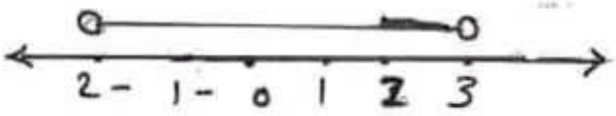
المتباينة التي بها علامة < « اكبر من » يتجه السهم يميناً ،
المتباينة التي بها علامة > « اصغر من » يتجه السهم يساراً

س٦/ ضع كلا مما يأتي على خط الأعداد :-

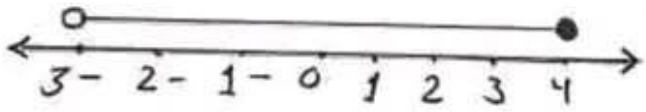
أ) $-1 \leq س \leq 1$



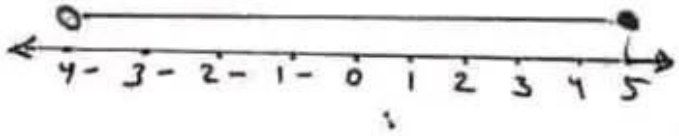
ب) $-2 < س < 3$



ج) $-3 \leq س < 6$



د) $-6 < س \leq 5$

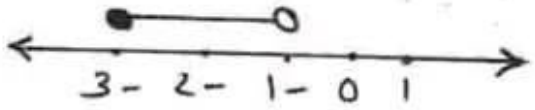


هـ) تترك للطالب

شادية ابوعرقوب

و) تترك للطالب

(ز) $-1 < س \leq 3$



ح) تترك للطالب

* حل المتباينات عن طريق الجمع أو الطرح :-

تحل المتباينات بجعل المتغير في طرف والقيم في الطرف الآخر ولكي تبقى المتباينة صحيحة فإن كل قيمة تضاف إلى أو تطرح من أحد طرفي المتباينة يجب أن تضاف إلى أو تطرح من الطرف الآخر.

*ملاحظة هامة :- إضافة أو طرح عدد ما من كلا طرفي المتباينة يترك علامة التباين بلا تغيير.

يتبع

* حل تمارين صـ٦ من الكتاب المدرسي :- شادية ابوعرقوب

2) حل :-

أ) $أ - 2 < 6 - أ$ بإضافة $أ$ للطرفين $أ - أ + 2 < 6 - أ + أ$ $2 < 6$	ب) $ب - 4 \geq 4 - 4$ بإضافة 4 للطرفين $ب - 4 + 4 \geq 4 + 4$ $ب \geq 8$
د) $د - 2 > 4 -$ بإضافة 2 للطرفين $د - 2 + 2 > 4 - 2 +$ $د > 2 -$	هـ) $هـ - 1 \leq 5 - 5$ بإضافة 5 للطرفين $هـ - 5 + 5 \leq 5 - 5 + 1$ $هـ \leq 1$
ط) $ع - 5 < 5$ بإضافة 5 للطرفين $ع - 5 + 5 < 5 + 5$ $ع < 10$	و) $ف - 5 \geq 5 -$ بإضافة 5 للطرفين $ف - 5 + 5 \geq 5 + 5 -$ $ف \geq$ صفر
ز) $ق - 6 \leq 3 -$ بإضافة 6 للطرفين $م - 6 + 6 \leq 6 + 3 -$ $م \leq 3 +$	ح) $هـ - 2 > 7 -$ بإضافة 2 للطرفين $هـ - 2 + 2 > 2 + 7 -$ $هـ > 5 -$

لاحظ :-
عند اضافة عدد موجب لطرفي المتباينة علامة التباين لا تتغير

شادية ابوعرقوب

(د) $5د \geq -9$

بالقسمة على 5

$\frac{5د}{5} \geq \frac{-9}{5}$

$\therefore د \geq \frac{-9}{5}$

هـ) $-٣٦ \leq 8$

بالقسمة على (-٦)

$\frac{-٣٦}{-٦} \geq \frac{8}{-٦}$

$م \geq -2$

علامة المتباين تغيرت

و) $-2ف > 36$

بالقسمة على (-2)

$\frac{-2ف}{-2} < \frac{36}{-2}$

$\therefore ف < -18$

علامة المتباين تغيرت

ز) $-3هـ \geq -9$

بالقسمة على (-3)

$\frac{-3هـ}{-3} \leq \frac{-9}{-3}$

$\therefore هـ \leq 3$

ح) $-3هـ \leq -15$

بالقسمة على (-3)

$\frac{-3هـ}{-3} \geq \frac{-15}{-3}$

$\therefore هـ \geq 5$

لاحظ :-
عند الضرب في أو القسمة على عدد موجب اشارة المتباين لا تتغير، فقط اشارة المتباين تتغير عند الضرب في او القسمة على عدد سالب.

س٦ / حل كلاً من المتباينات الآتية :-

أ) $-2ع \geq -18$

بالقسمة على -2

$\frac{-2ع}{-2} \leq \frac{-18}{-2}$ (تغيرت)

$\therefore ع \leq 9$ (تغيرت)

ب) $-3ص < 12$

بالقسمة على -3

$\frac{-3ص}{-3} > \frac{12}{-3}$ (تغيرت)

$\therefore ص > -4$ (تغيرت)

هـ) $\frac{س}{2} < 8$

بالضرب في 2

$2 \times \frac{س}{2} < 8$

$\therefore س < 8$

د) $\frac{س}{8} \geq -3$

بالضرب في 8

$8 \times \frac{س}{8} \geq -3 \times 8$

$س \geq -24$

هـ) $\frac{-ن}{5} > -3$

بالضرب في -5

$-5 \times \frac{-ن}{5} < -3 \times -5$

$\therefore ز < 15$

و) $-\frac{ي}{6} \leq 3$

بالضرب في -6

$-6 \times -\frac{ي}{6} \geq 3 \times -6$

$\therefore ي \geq -18$

فقرة (ز) (ح) تترك للطالب.

* حل المتباينات التي تتضمن أكثر من عملية

حل تمرين ١د ص 8 من الكتاب المدرسي

بل حل :-

شادية ابوعرقوب

أ) $2ب + 1 > 5$

بطرح 1 من الطرفين

$2ب > 4$

بالقسمة على 2

$ب > 2$

ب) $5س + 2 > 3س + 8$

بطرح 2 من الطرفين

$5س > 3س + 6$

بطرح 3س من الطرفين

$5س - 3س > 6$

$2س > 6$

بالقسمة على 2

$س > 3$

ج) $3(ج + 2) > 9$

بقسمة طرفي المتباينة على 3

$ج + 2 > 3$

بالطرح من 2

$ج > 1$

د)

$5(د - 2) \leq 3(د + 4)$

$5د - 10 \leq 3د + 12$

بإضافة 10 للطرفين

$5د \leq 3د + 22$

بطرح 3د من الطرفين

$5د - 3د \leq 22$

$2د \leq 22$

$\therefore د \leq 11$

هـ)

$4(س + 3) \geq 2(س - 6)$

$4س + 12 \geq 2س - 12$

بطرح 12 من الطرفين

$4س \geq 2س - 24$

بطرح 2س من الطرفين

$4س - 2س \geq -24$

$\therefore 2س \geq -24$

بالقسمة على 2

$\therefore س \geq -12$

و) $\frac{3س}{2} - 6 \leq 6$

بضرب الطرفين في 2

$2 \times \frac{3س}{2} - 2 \times 6 \leq 2 \times 6$

$3س - 12 \leq 12$

بالقسمة على 3

$\therefore س \leq 6$

ز) $\frac{ر + 3}{3} < 6$

بالضرب في 3

$3 \times \frac{ر + 3}{3} < 3 \times 6$

$ر + 3 < 18$

بالطرح من -3

$ر < 15$

ح) $\frac{2ص - 3}{5} < 5$

بالضرب في 5

$2ص - 3 < 25$

بإضافة 3 للطرفين

$2ص < 28$ بالقسمة على 2

$\therefore ص < 14$

يتبع

* حل تمارين ص6 من الكتاب المدرسي

شادية ابوعرقوب

س1/ حل :-

أ) $\frac{ص}{ى} \geq 6$

بالضرب في ى

$ى \times \frac{ص}{ى} \geq 3 \times 6$

$\therefore ص \geq 18$

ب) $\frac{أ}{6} > 4$

بالضرب في 6

$6 \times \frac{أ}{6} > 4 \times 6$

$\therefore أ > 16$

ج) $\frac{ء}{3} \geq -3$

بالضرب في 3

$3 \times \frac{ء}{3} \geq 3 \times -3$

$\therefore ء \geq -9$

د) $\frac{هـ}{5} \geq -\frac{2}{5}$

بالضرب في 5

$5 \times \frac{هـ}{5} \geq 5 \times -\frac{2}{5}$

$\therefore هـ \geq -2$

هـ) $-\frac{ب}{3} < 4$

بالضرب في -3

$-3 \times -\frac{ب}{3} > -3 \times 4$

$\therefore ب > -12$

و) $-\frac{ط}{4} > 5$

بالضرب في -4

$-4 \times -\frac{ط}{4} < -4 \times 5$

$ط < -20$

لاحظ تغير علامة التباين لأننا ضربنا في عدد سالب

ز) $-\frac{ن}{5} > -2$

بالضرب في -5

$-5 \times -\frac{ن}{5} < -5 \times -2$

$\therefore ن < 20$

ح) $-\frac{ف}{4} \geq -4$

بالضرب في -4

$-4 \times -\frac{ف}{4} \leq -4 \times -4$

$\therefore ف \leq 16$

لاحظ تغير اشارة التباين بمجرد الضرب في عدد سالب

س2/ حل المتباينة الآتية :-

أ) $2أ < 4$

بالقسمة على 2

$\frac{2أ}{2} < \frac{4}{2}$

$\therefore أ < 2$

ب) $3ب < 18$

بالقسمة على 3

$\frac{3ب}{3} < \frac{18}{3}$

$\therefore ب < 6$

ج) $2ء > -6$

بالقسمة على 2

$\frac{2ء}{2} > \frac{-6}{2}$

$\therefore ء > -3$

يتبع

س/ حل كلاً من المتباينات الآتية:-

أ) $-\frac{1}{3}$ أ $-1 > -1$

بإضافة 1 لطرفي المتباينة

$-\frac{1}{3}$ أ > 0

بضرب الطرفين في (-3)

$-3 \times (-\frac{1}{3}$ أ$) < 0$

$\therefore$ أ < 0

ب) $-\frac{2}{5}$ ب $+2 \leq -2$

بطرح 2 من الطرفين

$-\frac{2}{5}$ ب ≤ -4

بضرب الطرفين في $(-\frac{5}{2})$

$\therefore -\frac{2}{5}$ ب $\times -\frac{5}{2} \geq -4 \times -\frac{5}{2}$

ب ≥ 10

ج) -3 هـ $-1 \leq 2$

بإضافة 1 للطرفين

-3 هـ ≤ 3

بقسمة الطرفين على -3

$\frac{-3 \text{ هـ}}{-3} \geq \frac{3}{-3}$

$\therefore$ هـ ≥ -1

د) $1 - 2$ د < -3

بطرح 1 من الطرفين

-2 د < -4

بالقسمة على -2

$\frac{-2 \text{ د}}{-2} > \frac{-4}{-2}$

د > 2

هـ) $-\frac{2}{3}$ ع ≤ 6

بضرب الطرفين في $-\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2} \times (-\frac{2}{3}$ ع$) \geq -\frac{3}{2} \times 6$

ع ≥ -9

و) $-\frac{3 \text{ ى}}{4} \leq 15$

بضرب طرفي المتباينة في $-\frac{4}{3}$

$-\frac{4}{3} \times (-\frac{3}{4}$ ى$) \leq -\frac{4}{3} \times 15$

ى ≤ -20

تذكر:- عند الضرب أو القسمة على عدد سالب تتغير اشارة التباين

6

شادية ابوعرقوب

س٥/ حل كلا من المتباينات الآتية :-

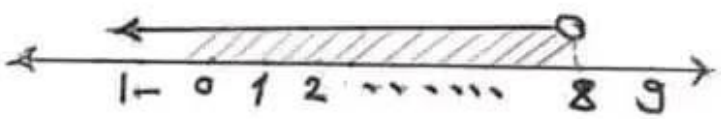
أ) $ع + 2 > 3$ بطرح 2 من طرفي المتباينة $ع + 2 - 2 > 3 - 2$ $ع > 1$	ب) $ص + 3 < 4$ بطرح 3 من الطرفين $ص + 3 - 3 < 4 - 3$ $ص < 1$
ج) $س + 4 \geq 3$ بطرح 4 من الطرفين $س + 4 - 4 \geq 3 - 4$ $س \geq -1$	د) $س + 3 \leq 2$ بطرح 3 من الطرفين $س + 3 - 3 \leq 2 - 3$ $س \leq -1$
هـ) $ز + 2 < 2 - 2$ بطرح 2 من الطرفين $ز + 2 - 2 < 2 - 2 - 2$ $ز < -6$	و) $ى + 5 > -6$ بطرح 5 من الطرفين $ى + 5 - 5 > -6 - 5$ $ى > -9$
(ز) $ذ + 5 \geq -1$ بطرح 5 من الطرفين $ذ + 5 - 5 \geq -1 - 5$ $ذ \geq -6$	ح) $ر + 1 > -5$ بطرح 1 من الطرفين $ر + 1 - 1 > -5 - 1$ $ر > -6$

س٦/ حل كلا من المتباينات الآتية ثم مثل اجابتك على خط الاعداد

أ) $ى - 2 > 6$ (إشارة مخالفة) $+2$

$ى > 8$

يتبع



ز) $\frac{3-ز}{4} > 3$

بضرب الطرفين في 4

$4 \times \frac{3-ز}{4} > 4 \times 3$

$3 - ز > 12$

بطرح 3 من الطرفين

$\therefore -ز > 9$

بالضرب في (-1)

$\therefore (-1) \times (-ز) < 9 \times -1$

$\therefore ز < -9$

ح) $\frac{1-2س}{3} < 4$

بضرب الطرفين في 3

$3 \times \frac{1-2س}{3} < 3 \times 4$

$1-2س < 12$

بطرح 1 من الطرفين

$-2س < 11$

بقسمة الطرفين على -2

$\frac{-2س}{-2} > \frac{11}{-2}$

$\therefore س > -5\frac{1}{2}$

س3/ حل المتباينة :-

$3 + 6 - س < 27$

بطرح 3 من الطرفين

$6 - س < 24$

بالقسمة على 4

$\therefore س > 6$

س4/ حل المتباينة

$6 - 5ص < 4$ بطرح 6 من الطرفين

$-5ص < -2$

بالقسمة على -5

$\frac{-5ص}{-5} > \frac{-2}{-5}$

$\therefore ص > \frac{2}{5}$

س5/ حل المتباينة :-

$6ك - 1 < 14 + ك$ ، بإضافة 1 للطرفين

$6ك < 15 + ك$ بطرح ك من الطرفين

$5ك < 15$ بالقسمة على 5

$\therefore ك < 3$

س / حل كلاً من المتباينات الآتية :-

أ) $17 < 3 - \rho 2$

بإضافة 3 للطرفين

$20 < \rho 2$

بقسمة الطرفين على 2

$\therefore \rho < 10$

ب) $6(5 - \frac{1}{2}ك) \geq 36$ (ضرب 6 داخل القوس)

$30 - 6ك \geq 36$

بطرح 30 من الطرفين

$-6ك \geq 6$

بقسمة الطرفين على -6

$\therefore \frac{-6ك}{-6} \leq \frac{6}{-6}$

$\therefore ك \leq -1$

ج) $3 \leq 1 - 2ع$

بطرح 1 من الطرفين

$-2ع \leq 2$

بقسمة الطرفين على -2

$\therefore \frac{-2ع}{-2} \geq \frac{2}{-2}$

$\therefore ع \geq -1$

د) $5(ف + 5) > 3(ف - 1)$

$5ف + 25 > 3ف - 3$

بطرح 25 من الطرفين

$5ف > 3ف - 28$

بطرح $3ف$ من الطرفين

$2ف > -28$

بقسمة 2 على الطرفين

$ف > -14$

هـ) $\frac{7}{6}س \geq 21$

بضرب الطرفين في $\frac{6}{7}$

$\frac{6}{7} \times \frac{7}{6}س \geq 21 \times \frac{6}{7}$

$\therefore س \geq 18$

و) $\frac{5ص + 3}{2} > 9$

بضرب الطرفين في 2

$5ص + 3 > 18$ بطرح 3

$5ص > 15$ بالقسمة على 5

$\therefore ص > 3$

ز) $-\frac{1}{3}ى > ى + 4$

بضرب -3 في الطرفين

$-3 \times (-\frac{1}{3}ى) > -3ى - 12$

$ى > -3ى - 12$ بإضافة $3ى$ للطرفين

$ى + 3ى > -12 \Leftarrow 4ى > -12$

بالقسمة على 4 $\therefore ى > -3$

س3/ حدد قيم س الصحيحة التي تحقق :-

أ) $3 < س < 6$ ، $8 \leqslant س^2 \leqslant 17$

شادية ابوعرقوب

من المتباينة المزدوجة الأولى نجد أن :-

$س > 3$

$س < 6$

$\boxed{3 < س < 6}$

من المتباينة المزدوجة الثانية نجد أن :-

$س^2 \geqslant 8$

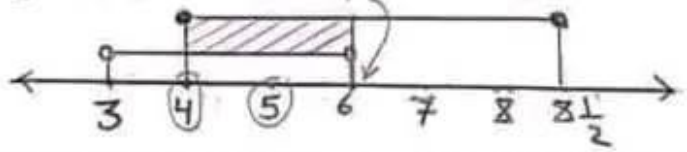
$س \geqslant 4$

$س^2 \leqslant 17$ بالقسمة على 2

$س \leqslant 8\frac{1}{2}$

$\therefore \boxed{4 \leqslant س \leqslant 8\frac{1}{2}}$ ليست من قيم مجموعة الحل لان الدائرة مفتوحة

$\therefore$ قيم س الصحيحة هي $\{4, 5, 6\}$



ب) $7 < س + 2 \leqslant 9$

الحل :- بطرح 2 من المتباينة

$5 < س \leqslant 7$

$5 < س \leqslant 7$

$11 \leqslant 2س - 1 < 15$

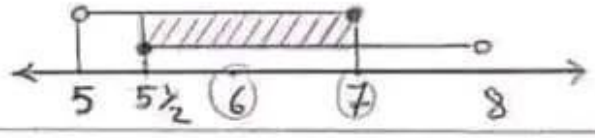
بإضافة 1 للمتباينة

$11 \leqslant 2س < 16$

$5\frac{1}{2} \leqslant س < 8$

$\therefore$ قيم س الصحيحة هي :-

$\{6, 7\}$



جـ) $-5 \leqslant 3 - س < -2$

الحل :- بطرح 3 من المتباينة

$-8 \leqslant -س < -5$

بقسمة المتباينة على -1

$8 \geqslant س > 5$

$5 < س \leqslant 8$

$-11 \leqslant 10 - 3س < 1$

بطرح 10 من المتباينة

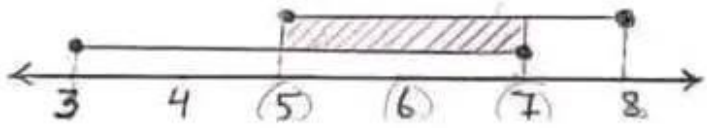
$-21 \leqslant -3س < -9$

بقسمة المتباينة على -3

$7 \geqslant س > 3 \Leftarrow 3 < س \leqslant 7$

$\therefore$ قيم س الصحيحة هي

$\{5, 6, 7\}$



(ب) $3س + 1 < 23 > 5س - 1$

الحل :-

المتباينة الأولى

$3س + 1 < 23$

بطرح 1 من الطرفين

$3س < 22$

بالقسمة على 3

$\therefore س < 7\frac{1}{3}$

المتباينة الثانية

$5س - 1 > 23$

بإضافة 1 للطرفين

$5س > 24$

بالقسمة على 5

$\therefore س > 4\frac{4}{5}$

$\therefore 4\frac{4}{5} < س < 7\frac{1}{3}$

$\therefore$ قيم س الصحيحة هى : { 5 ، 6 ، 7 }

(هـ) $-9 \leq 5 - 2س \leq -4$

الحل :-

المتباينة الأولى

$5 - 2س \leq -9$

بطرح 5 من الطرفين

$-2س \leq -14$

بالقسمة على -2

$س \geq 7$

المتباينة الثانية

$5 - 2س \geq -4$

بطرح 5 من الطرفين

$-2س \geq -9$

بالقسمة على -2

$\therefore س \leq 4\frac{1}{2}$

$\therefore 4\frac{1}{2} \geq س \geq 7$

$\therefore$ قيم س الصحيحة هى = { 5 ، 6 ، 7 }

الأعداد الأولية :- هى الأعداد التى لاتقبل القسمة إلا على نفسها أو الواحد .

مجموعة الأعداد الأولية = { 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29 }

15

هـ) $3س > 9$ ، $5س - 4 < 6$

$+4$ ← $6 < 4 - 5س$

بالقسمة على 3 ← $س > 3$

بالقسمة على 5 ← $5س > 10$

$س > 3$

$2 < س$

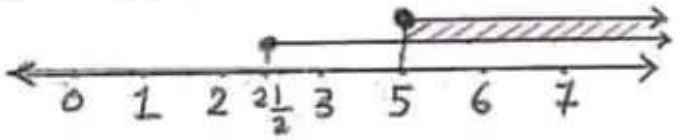
$\therefore 2 < س < 3$

و) $6س \geq 10$ ، $3س - 9 \leq 6$

$\frac{10}{6} \leq س$ ، $3س \leq 15$

$2\frac{1}{2} \leq س$ ، $س \leq 5$

$\therefore$ حل المتباينتين هو $س \leq 5$



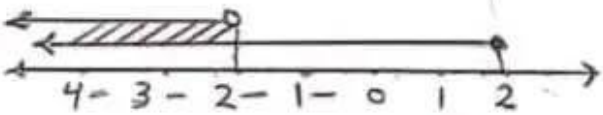
نلاحظ من الرسم أن مجموعة الحل للمتباينتين تبدأ من $س \leq 5$ إلى $+\infty$

$\therefore$ مجموعة الحل هى $س \leq 5$

ز) $5س \geq 10$ ، $2س + 7 > 3$

$س \geq 2$ ، $2س > -4$

$س \geq 2$ ، $س > -2$

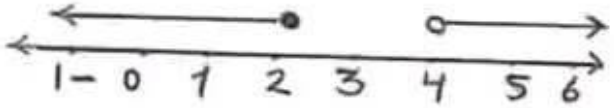


نلاحظ أن :- من الرسم مجموعة حل المتباينتين تبدأ من $س > -2$ إلى $-\infty$.

$\therefore$ مجموعة الحل هى $س > -2$

ح) $6س \geq 12$ ، $2 < 2 - س$

$س \geq 2$ ، $4 < س$



من الرسم نجد أنه لا يوجد حل مشترك

س3/ حدد قيم س الصحيحة التى تحقق :-

أ) $5س + 6 < 30 \leq 7س + 9$

المتباينة الأولى :-

$5س + 6 < 30$

$5س < 24$

$\therefore س < \frac{24}{5}$

$س < 4\frac{4}{5}$

$\therefore$

المتباينة الثانية

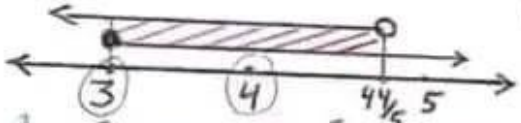
$30 \leq 7س + 9$

$21 \leq 7س$

$\therefore 3 \leq س$

$4\frac{4}{5} > س \geq 3$

من المفيد فى مثل هذا النوع من المتباينات فصلها إلى متباينة أولى ومتباينة ثانية ثم اجراء العمليات الحسابية اللازمة لايجاد قيم س



من الرسم قيم س الصحيحة هى {3، 4}

د) $-1 \leq 2-3س < 4$ ، $-1 \leq 1-2س < 3$

الحل :-

المتباينة الأولى

بطرح 3 من المتباينة

$-3 \leq -3س < 2$

بقسمة المتباينة على -3

$1 \geq س > \frac{-2}{3}$

$\therefore \frac{-2}{3} < س \leq 1$

المتباينة الثانية

بطرح 1 من المتباينة

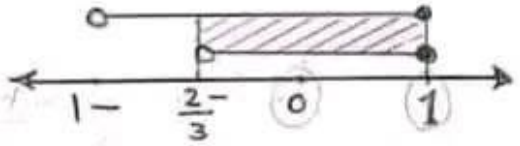
$-2 \leq -2س < 2$

بقسمة المتباينة على -2

$1 \geq س > -1$

$\therefore -1 < س \leq 1$

$\therefore$ قيم س الصحيحة هى $\{1، 0\}$



س٦/ حدد قيم س الصحيحة التى تحقق :-

م) $3 < 3س - 6 \leq 27$ ، $6س - 5 \geq -5$

الحل :-

المتباينة الأولى

$3س - 6 < 27$

بإضافة 6 للطرفين

$3س < 33$

بالقسمة على 3

$\therefore س < 11\frac{1}{3}$

المتباينة الثانية

$6س - 5 \leq 27$

بإضافة 5 للطرفين

$6س \leq 32$

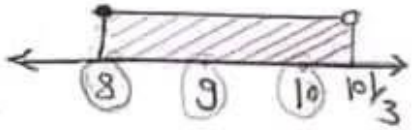
بالقسمة على 6

$\therefore س \leq 8$

$\therefore 8 \geq س < 11\frac{1}{3}$

$\therefore$ قيم س الصحيحة هى :-

$\{8، 9، 10\}$



شادية ابوعرقوب

ب) $5س - 6 < 30 < 7س - 9$

المتباينة الأولى :

$5س - 6 < 30$ بإضافة 6

$5س < 36$ بالقسمة على 5

$س < \frac{36}{5}$

$\therefore س < 7\frac{1}{5}$

المتباينة الثانية

$7س - 9 < 30$ بإضافة 9

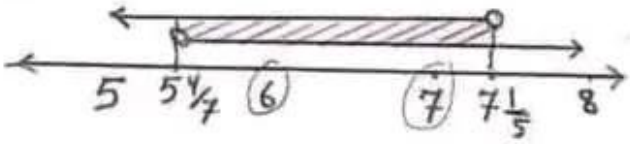
$7س < 39$ بالقسمة على 7

$س < \frac{39}{7}$

$\therefore س < 5\frac{4}{7}$

$\therefore$ قيم س الصحيحة

ص = {6 ، 7}



ه) $6 \leqslant 2س + 5 \leqslant 9$

المتباينة الأولى

$2س + 5 \leqslant 4$ بطرح 5

$2س \leqslant -1$ بالقسمة على 2

$\therefore س \leqslant -\frac{1}{2}$

المتباينة الثانية

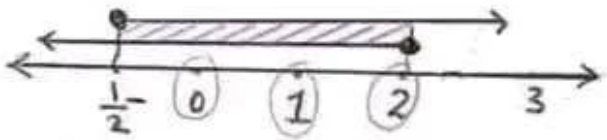
$2س + 5 \geqslant 9$ بطرح 5

$2س \geqslant 4$ بالقسمة على 2

$س \geqslant \frac{4}{2} \Leftarrow س \geqslant 2+$

$\therefore$ مجموعة الحل = قيم س الصحيحة

س = {0 ، 1 ، 2}



و) $-14 < 10س + 9 > 9$

المتباينة الأولى :

$10س + 9 > -14$

$10س > -23$ بالقسمة على 10

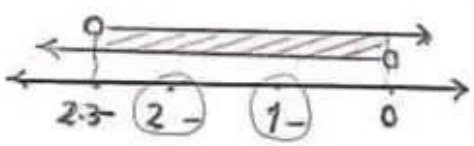
$\therefore س > -2.3$

المتباينة الثانية :

$10س + 9 > 9$

$10س > صفر$ بالقسمة على 10

$\therefore س > صفر$



قيم س الصحيحة {-1 ، -2}

س5 / حدد قيم س الصحيحة حيث س عدد أولى يحقق المتباينتين:-

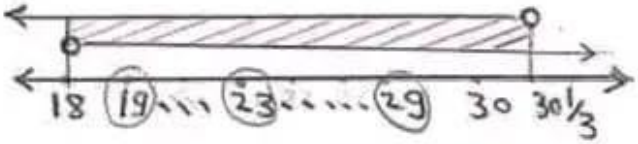
$س > 18$ ، $3س + 2 < 93$

$س > 18$ ، $3س < 91$

$\therefore س < 30\frac{1}{3}$

$\therefore 18 < س < 30\frac{1}{3}$

الأعداد الأولية بين 18 و $30\frac{1}{3}$ هى :- {19 ، 23 ، 29}.



س6 / أوجد العدد الصحيح ك من المتباينة:-

$16 < 3ك - 1 < 20$ بإضافة 1 للطرفين

$17 < 3ك < 21$ بالقسمة على 3

$\therefore 5\frac{2}{3} < ك < 7$ $\therefore$ قيمة ك الصحيحة هى {6} فقط

س7 أوجد العدد الصحيح س عندما $6 < س - 2 < 8$ ، $9 < 2س + 1 < 17$

المتباينة الأولى

$6 < س - 2 < 8$

بإضافة 2 للطرفين و الحد الأوسط

$8 < س < 10$

المتباينة الثانية

$9 < 2س + 1 < 17$

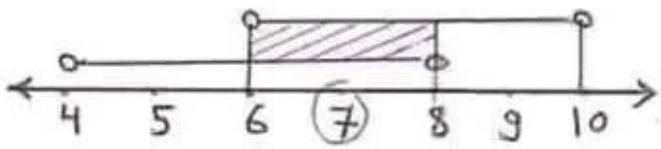
بطرح 1 من الطرفين و الحد الأوسط

$8 < 2س < 16$

بالقسمة على 2

$\therefore 6 < س < 8$

$\therefore$ العدد الصحيح س هو {7}



ع) $7ك > \frac{3}{2}ك + 11$

بضرب الطرفين فى 2 $\Leftarrow$ $14ك > 3ك + 22$

بطرح $3ك$ من الطرفين $\Leftarrow$ $11ك > 22$

بقسمة الطرفين على 11 $\Leftarrow$ $\therefore ك > 2$.

مجموعات الاعداد :-

* الاعداد الطبيعية :- $ط = \{1، 2، 3، 4، ..... ، \infty\}$
* الاعداد الكلية :- $ك = \{0، 1، 2، 3، ..... ، \infty\}$
* الاعداد الصحيحة :- $ص = \{+\infty ، ..... ، 2- ، 1- ، 0 ، 1 ، 2 ، ..... ، \infty\}$
* الاعداد القياسية « النسبية » $ق = \{\frac{3}{5} ، 7.5 ، 2\frac{1}{4} ، -\frac{3}{2} ، 7 ، ....\}$
* الاعداد غير القياسية « غير نسبية » $ق' = \{\sqrt{2} ، \sqrt{7} ، \pi ، .....\}$
* الاعداد الحقيقية :- $ح = \{-1 ، \sqrt{5} ، \sqrt{2} ، \pi ، 0 ، -3\frac{1}{2} ، .....\}$

حل تمارين 1 هـ صـ 11 من الكتاب المدرسي :-

س/ حل المتباينتين آنياً :-

أ) $س > 12$ ، $3س + 6 \not\geq 55$ (-6)

$س > 12$ ، $3س \not\geq 51$

$\therefore س > 12$ ، $س \not\geq 17$

$\therefore 12 < س \not\geq 17$

ب) $س \geq -2$ ، $س + 3 > 4$ (-3)

$س \geq -2$ ، $س > 1$

$\therefore -2 \not\leq س > 1$

*

ب) $6 < س$ ، $12س + 23 \leq 35$ (-23)

$6 < س$ ، $12س \leq 12$ بالقسمة على 12

$6 < س$ ، $س \leq 1$

$\therefore 6 < س \not\geq 1$

د) $-4 > 2س$ ، $6س + 32 \leq 8$ (-32)

$-2 > س$ ، $6س \leq -24$ بالقسمة على 6

$-2 > س$ ، $س \leq -4$

$\therefore -2 > س \not\geq -4$

س٨/ أوجد ثلاث قيم س الصحيحة التى تحقق :-

٦س + 6 ≤ 5س - ١ ≤ ٦س + 8

الحل :-

المتباينة الأولى

٦س + 6 ≤ 5س - ١

بطرح 6 من الطرفين

٦س ≤ 5س - 7

بطرح 5س من الطرفين

-س ≤ -7

بالضرب فى -١

∴ س ≥ 7

المتباينة الثانية

5س - ١ ≤ ٦س + 8

بإضافة 1 للطرفين

5س ≤ ٦س + 9

بطرح ٦س من الطرفين

س ≥ 9

∴ 7 ≤ س ≤ 9

∴ قيم س الصحيحة هى = {7 ، 8 ، 9}

س٩/ أوجد العدد الصحيح الموجب س بحيث :- س + ١ < 19 < س + 3

الحل :-

المتباينة الأولى

س + ١ < 19

بطرح 1 من الطرفين

∴ س < 18

المتباينة الثانية

س + 3 > 19

بطرح 3 من الطرفين

∴ س > 16

∴ 16 < س < 18

∴ العدد الصحيح الموجب هو

س = {17}

س١٠/ اكتب جميع قيم س الصحيحة التى تحققها :-

7س > 65

بالقسمة على 7

∴ س > 9.3

25 - 2س ≤ 1

الحل

بطرح 25 من الطرفين

-2س ≤ -24 بالقسمة على -2

∴ س ≥ 12

∴ 9.3 < س ≤ 12

∴ قيم س الصحيحة هى = {١٠ ، 11 ، 12}

س١١ / حدد أى قيمة س بحيث $|2س+3| > 12$

الحل :- بطرح 3 من المتباينة

$\therefore 8 > س > 9$) لا توجد قيم صحيحة لـ س لأن الدائرتان مفتوحتان

س١٢ / ب) حل المتباينة الآتية :- $10س - 6 \geq 5$ الحل :-

بإضافة 6 للطرفين $\Leftarrow 10س \geq 9$

بالقسمة على 10 $\Leftarrow \therefore س \geq \frac{9}{10}$ ← حل المتباينة $س \geq \frac{9}{10}$

ب) أوجد جميع قيم ص الصحيحة التى تحققها :-

$-8 \leq ص < -3$

$-8 < ص \leq -3$

$3 < 2ص + 15$ الحل :-

بطرح 15 من الطرفين

$-12 < 2ص$ بالقسمة على 2

$\therefore -6 < ص \Leftarrow ص > -6$

$\therefore$ قيم ص الصحيحة $ص \in \{-6, -5\}$

المزيد من التدريبات على المتباينات

شادية ابوعرقوب

* قوانين عامة :-

(1) القيمة الصغرى لـ $(أ + ب)$ = أصغر قيمة لـ أ + أصغر قيمة لـ ب

(2) القيمة العظمى لـ $(أ + ب)$ = أكبر قيمة لـ أ + أكبر قيمة لـ ب

(3) القيمة الصغرى لـ $(أ - ب)$ = أقل قيمة لـ أ − أكبر قيمة لـ ب

(4) القيمة العظمى لـ $(أ - ب)$ = أكبر قيمة لـ أ − أقل قيمة لـ ب

(5) القيمة الصغرى لـ $\frac{أ}{ب}$ = أقل قيمة لـ أ ÷ أكبر قيمة لـ ب

(6) القيمة العظمى لـ $\frac{أ}{ب}$ = أكبر قيمة لـ أ ÷ أقل قيمة لـ ب

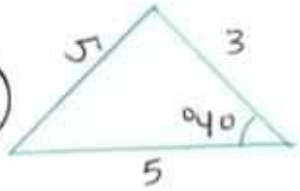
(7) القيمة الصغرى لـ $أ \times ب$ = أقل قيمة لـ أ × أكبر قيمة لـ ب

(8) القيمة العظمى لـ $أ \times ب$ = أكبر قيمة لـ أ × أكبر قيمة لـ ب

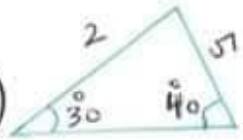
الباب الثاني: قواعد الجيب وجيب التمام والإتجاهات

تمرين 2-م

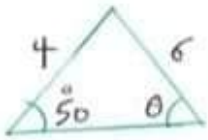
① حدد في المثلثات الآتية إمكانية إستخدام قاعدة الجيب لإيجاد أطوال الأضلاع غير المعلومة وقياسات الزوايا المشار إليها.

(أ) 

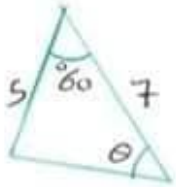
لا

(ب) 

نعم

(ج) 

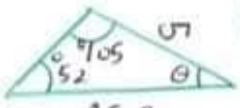
نعم

(د) 

لا

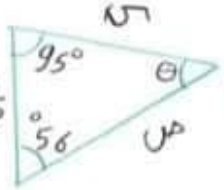
---

② في المثلثات الآتية استخدم قاعدة الجيب لإيجاد القيم غير المعلومة والزوايا. أعط إجابتك مقربة لثلاثة أرقام معنوية وقيم الزوايا مقربة لرقم عشري واحد.

(أ) 

$\frac{\text{س}}{\text{جا}52^\circ} = \frac{5.9}{\text{جا}105^\circ} \leftarrow$ س $= \frac{5.9 \times \text{جا}52^\circ}{\text{جا}105^\circ} = 4.81$

∵ مجموع زوايا $\Delta = 180^\circ \leftarrow$ ∴ $\theta = 180 - (52 + 105) = 23^\circ$

(ب) 

$\frac{\text{من}}{\text{جا}95^\circ} = \frac{\text{س}}{\text{جا}56^\circ} = \frac{5}{\text{جا}\theta}$

∵ مجموع زوايا $\Delta = 180^\circ \leftarrow$ ∴ $\theta = 180 - (56 + 95) = 29^\circ$

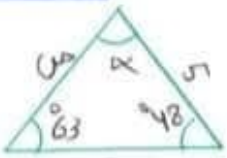
[2]

$$\frac{\text{س}}{\text{جا}95^\circ} = \frac{5}{\text{جا}29^\circ} \rightarrow \text{س} = \frac{\text{جا}56^\circ \times 5}{\text{جا}29^\circ} = 8.55 \quad \therefore$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{جا}95^\circ} = \frac{5}{\text{جا}29^\circ} \rightarrow \text{ص} = \frac{\text{جا}95^\circ \times 5}{\text{جا}29^\circ} = 10.3$$

---

(٣)



$$\alpha = 180^\circ - (63^\circ + 48^\circ) = 69^\circ$$

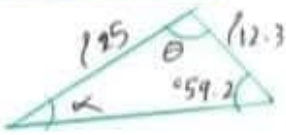
$$\frac{5.6}{\text{جا}69^\circ} = \frac{\text{ص}}{\text{جا}48^\circ} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}63^\circ}$$

$$\text{ر} \leftarrow \frac{5.6}{\text{جا}69^\circ} \times \frac{\text{ر}}{\text{جا}63^\circ} \quad \text{ر} = \frac{\text{جا}63^\circ \times 5.6}{\text{جا}69^\circ} = 5.34 \text{ سم}$$

$$\text{ص} \leftarrow \frac{5.6}{\text{جا}69^\circ} \times \frac{\text{ص}}{\text{جا}48^\circ} \quad \text{ص} = \frac{\text{جا}48^\circ \times 5.6}{\text{جا}69^\circ} = 4.46 \text{ سم}$$

---

(٤)

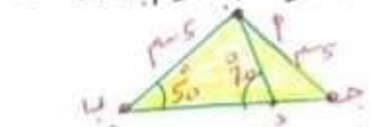


$$\alpha \text{ جا} \leftarrow \frac{12.3}{\alpha \text{ جا}} \times \frac{25}{\text{جا}59.2^\circ} \quad \alpha \text{ جا} = \frac{\text{جا}59.2^\circ \times 12.3}{25}$$

$$\alpha \text{ جا} = 0.423 \rightarrow \theta = \text{جا}^{-1}(0.423) = 25.0^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - (59.2^\circ + 25.0^\circ) = 95.8^\circ$$

③ في المثلث متساوي الساقين ا ب جـ قياس ∠ا ب جـ = ٥٠ ، ا ب = ا جـ = [3] سم



(أ) أحسب ① ∠ا ب جـ ، ② ب جـ .

(ب) النقطة د تقع على ب جـ بحيث أن قياس ∠ا د ب = ٧٠° استخدم قاعدة الجيب لحساب ا د .

الحل

(أ) ① ∵ ا ب جـ مثلث متساوي الساقين ∴ ∠ا ب جـ = ∠ا جـ ب = ٥٠°

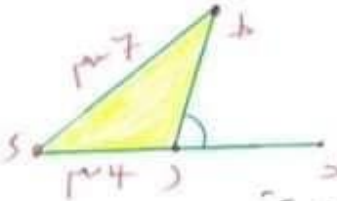
∠ا ب جـ = ١٨٠° − (٥٠° + ٥٠°) = ٨٠°

② $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ا}} = \frac{5}{\text{جا ٥٠°}} \leftarrow$ ب جـ $= \frac{5 \times \text{جا ٨٠°}}{\text{جا ٥٠°}} =$ 6.43 سم

(ب) $\frac{\text{ا د}}{\text{جا ٥٠°}} = \frac{5}{\text{جا ٧٠°}} \leftarrow$ ا د $= \frac{5 \times \text{جا ٥٠°}}{\text{جا ٧٠°}} =$ 4.08 سم

④ في الشكل ز د خط مستقيم ، ه د = 7 سم ، ه ز = 4 سم ، جا ∠ه ز د = $\frac{3}{8}$

أحسب جا ∠ه ه ز ، اكتب اجابتك على صورة كسر في ابسط صورة .



الحل

ز = جا$^{-1}$ $(\frac{3}{8})$ = 22.0° = ∠ه ز د

∠ه ز د = (180° − 22.0°) = 158° زوايا متجاورة على خط مستقيم

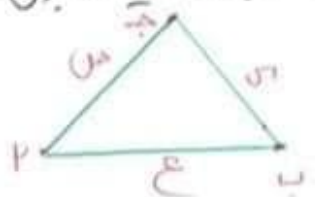
$\frac{\text{جا ∠ه ه ز}}{7} = \frac{\text{جا ∠ه ز د}}{4} \leftarrow$ جا ∠ه ه ز $= \frac{\text{جا ١٥٨° } \times 4}{7} \leftarrow$

جا ∠ه ه ز $= \frac{0.375 \times 4}{7} = \frac{1.5}{7} = \frac{(3/2)}{7} =$ $\frac{3}{14}$

تمرين ٢-٢ ب

إذا كانت الإجابة ليست صحيحة قرب الإجابة بالدرجات لأقرب رقم عشري .

① أذكر الخطأ في كل من المعادلات الآتية حيث تطبق قاعدة جيب التمام لحل المثلث أ ب جـ .



(أ) $ب^2 = ص^2 + ع^2 - 2ص ع$

(ب) $ب^2 = ص^2 - ع^2 + 2ص ع$ جتا أ

(ج) $ب^2 = ص^2 + ع^2 - ص ع$ جتا أ

(د) جتا ب = $\frac{ب^2 + ع^2 + ص^2}{2ب ص ع}$

(هـ) جتا ب = $\frac{ب^2 + ع^2 - ص^2}{ب ع}$

الحل

(أ) (جتا أ) غير موجودة

(ب) تبادل إشارات (+ ، -) بسبب تجميعها

(ج) العدد (2) غير موجود

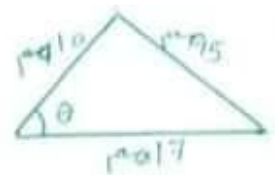
(د) وجود (ص) في المقام فالصحيح (2ب ع)

(هـ) العدد (2) غير موجود

---

② أستخدم قاعدة جيب التمام لإيجاد الأطوال غير المعلومة أو قياسات الزوايا المشار إليها في كل من المثلثات الآتية :-

(أ)



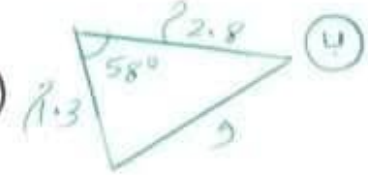
الحل

$$\text{جتا}\theta = \frac{(15)^2 - (10)^2 + (17)^2}{(10)(17)(2)} = \frac{164}{340}$$

$$\therefore \theta = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{164}{340}\right) = 61.2^\circ$$

5

ب



الحل ← $\text{جتا } 58° = \frac{\text{و}^2 - (1.3)^2 + (2.8)^2}{(1.3)(2.8)(2)}$ ←

$\text{جتا } 58° = \frac{\text{و}^2 - 1.69 + 7.84}{7.28}$ ← $\frac{\text{و}^2 - 9.53}{7.28} = \text{جتا } 58°$

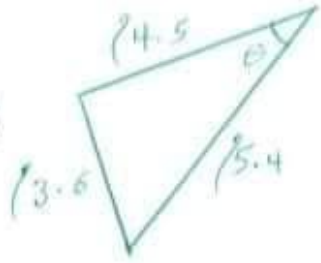
$(\text{جتا } 58°)(7.28) = (\text{و}^2 - 9.53)$

$\text{و}^2 = (\text{جتا } 58° \times 7.28) - (9.53) = 5.67$

باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$\therefore$ و = 2.38 م

ج



الحل ← $\text{جتا } \theta = \frac{(3.6)^2 - (5.4)^2 + (4.5)^2}{(5.4)(4.5)(2)}$

$\text{جتا } \theta = \frac{12.96 - 49.41}{48.6}$ = 0.75

$\therefore \theta = \text{جتا}^{-1}(0.75) = 41.4°$

[6]

(د)

الحل ← جتا 33° = $\frac{(1.3)^2 + (2.8)^2 - ل^2}{(1.3)(2.8)(2)}$

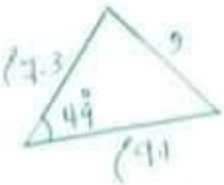
جتا 33° × 7.28 = $ل^2 - 9.53$ ← $\frac{ل^2 - 9.53}{7.28}$

$ل^2 = (جتا 33° \times 7.28) - 9.53$

$3.42 = (جتا 33° \times 7.28) - 9.53$

∴ ل = 1.85 سم ← بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

(هـ)



الحل ← جتا 49° = $\frac{(9.1)^2 + (7.3)^2 - و^2}{(9.1)(7.3)(2)}$

جتا 49° × 132.86 = $و^2 - 82.81 + 53.29$ ← $و^2 - 136.1$

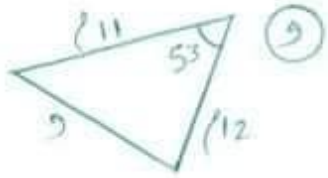
$و^2 = (جتا 49° \times 132.86) - (136.1)$

$48.94 = (جتا 49° \times 132.86) - (136.1)$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

∴ و = 6.996 ≈ 7

6

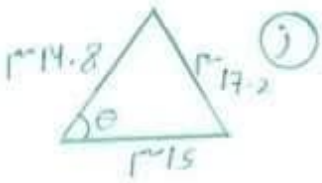


الحل ← جتا 53° = $\frac{و^2 - (11)^2 - (12)^2}{(11)(12)(2)}$ ←

جتا 53° = $\frac{و^2 - 265}{264}$ ← $و^2 - 265 = (جتا 53°)(264)$

$و^2 = (جتا 53° \times 264) - (265) = 106.12$

∴ و = $\sqrt{10.30}$ ← بأخذ الجذر التربيعي للطرفين



الحل ← جتا θ = $\frac{(17.2)^2 - (14.8)^2 + (15)^2}{(14.8)(15)(2)}$ ←

جتا θ = $\frac{295.84 - 219.04 + 225}{444}$ = $\frac{295.84 - 219.04 + 225}{444}$

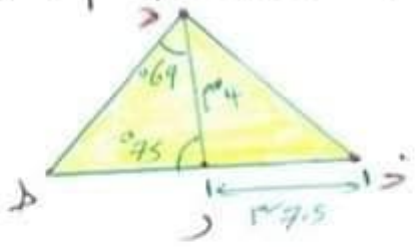
جتا θ = $\frac{148.2}{444}$ = 0.334

∴ θ = جتا$^{-1}$ (0.334) = 70.5°

[7] ③ في الشكل المرسوم خط مستقيم قياس ∠هـرز = 69°

قياس ∠ز = 75°، ر ز = 4 سم، ز ز = 7.5 سم، أوجد:

① ق(∠هـ)، ② ق(∠ز)



الحل

① ق(∠هـرز) = 180° − (75° + 69°) = 36°

نستخدم قاعدة الجيب لإيجاد قيمة ق(∠هـ)

$$\frac{\text{ق(∠هـ)}}{\text{جا 75°}} \times \frac{4}{\text{جا 36°}} \leftarrow \text{ق(∠هـ)} = \frac{4 \times \text{جا 75°}}{\text{جا 36°}} = 6.57 \text{ سم}$$

② ق(∠ز) = 180° − (75°) = 105° زوايا متجاورة على خط مستقيم

$$\text{جتا } 105° = \frac{(4)^2 + (7.5)^2 - \text{ق}^2(\text{ز})}{(2)(7.5)(4)} = \frac{\text{ق}^2(\text{ز}) - 72.25}{60}$$

$$(\text{ق}^2(\text{ز}) - 72.25) = (\text{جتا } 105° \times 60)$$

$$\text{ق}^2(\text{ز}) = (\text{جتا } 105° \times 60) - (72.25) = 87.8$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

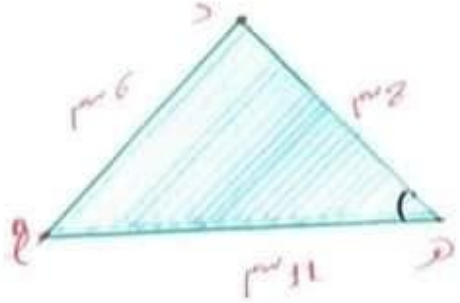
$$\therefore \text{ق(ز)} = 9.37 \text{ سم}$$

[8] ④ د هـ و مثلث فيه د = ١١ سم ، هـ = ٦ سم ، و = ٨ سم

أوجد أصغر زاوية في المثلث د هـ و ؟

الحل

أصغر زاوية في Δ د هـ و هي المقابلة لأصغر ضلع



$$\text{جتا}\, \text{هـ} = \frac{(6)^2 - (11)^2 + (8)^2}{(11)(8)(2)} = \frac{36 - 121 + 64}{176}$$

$$\text{جتا}\, \text{و} = \frac{149}{176} =$$

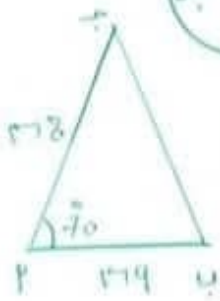
$$\therefore \text{و} = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{149}{176}\right) = 32.16^\circ$$

[9]

تمرين 2-د

(1) أوجد مساحة المثلثات الآتية :-

(أ)



مساحة Δ أ ب ج = $\frac{1}{2}$ × 9 × 8 × جا 70°

= $\frac{1}{2}$ × 72 × جا 70° = " "

= 33.8 سم²

(ب)

مساحة Δ ر ك ز = $\frac{1}{2}$ × 8 × 4.5 × جا 67°

= 16.6 سم² = " "

4.5 سم

طريقة أخرى :-

$\frac{ن ذ}{جا 30°} = \frac{10.1}{جا 20°}$ ← ن ذ = $\frac{10.1 \times جا 30°}{جا 20°}$ = 6.58 سم

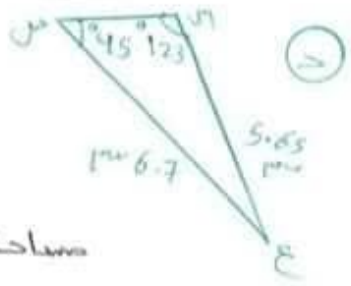
مساحة Δ ذ ي ن = $\frac{1}{2}$ × 10.1 × 6.58 × جا 20°

= 11.4 سم²

ق(∠ ذ ن ي) = 180° − (30 + 20)° = 130°

∴ مساحة Δ ذ ي ن = $\frac{1}{2}$ × 4.5 × 6.58 × جا 130°

= 11.4 سم²



(١٥) قياس $\angle$ ص = $180° - (45° + 123°)$

= (12)

مساحة $\triangle$ س ص ع = $\frac{1}{2} \times 5.65 \times 6.7 \times \sin 12°$ = (3.94) $سم^2$

طريقة أخرى:-

$\frac{ص ع}{\sin 12°} \times \frac{6.7}{\sin 123°}$ ← ص ع = $\frac{6.7 \times \sin 12°}{\sin 123°}$ = 1.661 سم

مساحة $\triangle$ س ص ع = $\frac{1}{2} \times 5.65 \times 1.661 \times \sin 123°$ = (3.94) $سم^2$

= $\frac{1}{2} \times 6.7 \times 1.661 \times \sin 45°$ = (3.94) $سم^2$

---

(2) جد لكل من الآتي أن أ ب جـ مثلث فيه الأضلاع س ص ع أوجد مساحة المثلث أ ب جـ.

(أ) قياس $\angle$ أ = 24°، ص = 5 سم، ع = 6 سم.

مساحة $\triangle$ أ ب جـ = $\frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin 24°$ = (6.1) $سم^2$

(ب) قياس $\angle$ ب = 65°، س = 4.2 سم، ع = 2.7 سم.

مساحة $\triangle$ أ ب جـ = $\frac{1}{2} \times 4.2 \times 2.7 \times \sin 65°$ = (5.14) $سم^2$

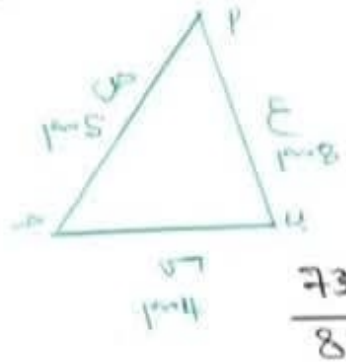
(ج) قياس $\angle$ جـ = 149°، س = 3.9 سم، ص = 2.16 سم.

مساحة $\triangle$ أ ب جـ = $\frac{1}{2} \times 9 \times 2.16 \times \sin 149°$ = (5.0) $سم^2$

---

(3) أوجد مساحة Δ أ ب جـ في كل من الحالات الآتية :-

(أ) ب جـ = 4 سم ، أ جـ = 5 سم ، أ ب = 8 سم



من قاعدة جيب التمام نوجد جتا أ

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{ب جـ}^2 + \text{أ جـ}^2 - \text{أ ب}^2}{2 \times \text{أ ب} \times \text{أ جـ}} = \frac{16 - 64 + 25}{2 \times 5 \times 8} = \frac{73}{80}$$

$$\hat{A} = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{73}{80}\right) = 24.1^\circ$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب جـ} = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \text{جا } 24.1^\circ = 8.17 \text{ سم}^2$$

$$\text{جتا ب} = \frac{\text{أ ب}^2 + \text{ب جـ}^2 - \text{أ جـ}^2}{2 \times \text{ب جـ} \times \text{أ ب}} = \frac{25 + 64 - 16}{2 \times 8 \times 4} = \frac{55}{64}$$

$$\hat{B} = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{55}{64}\right) = 30.8^\circ$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب جـ} = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times \text{جا } 30.8^\circ = 8.19 \text{ سم}^2$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (30.8^\circ + 24.1^\circ) = 125.1^\circ$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب جـ} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \text{جا } 125.1^\circ = 8.19 \text{ سم}^2$$

(ب) أ ب = 9.01 سم ، أ جـ = 8.03 سم ، ب جـ = 7.05 سم

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{أ جـ}^2 + \text{أ ب}^2 - \text{ب جـ}^2}{2 \times \text{أ ب} \times \text{أ جـ}} = \frac{(8.03)^2 + (9.01)^2 - (7.05)^2}{2 \times 8.03 \times 9.01}$$

$$= \frac{144.1834 - 81.1801}{113.723} = \frac{33.0033}{113.723}$$

12

$\hat{P} = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{33.0033}{113.223}\right) = 73.1^\circ$

∴ مساحة Δ ا ب جـ $= \frac{1}{2} \times (7.05) \times (8.03) \times \text{جا } 73.1^\circ = 27.1$ سم

جتا ب $= \frac{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - \text{أ}^2}{2 \times \text{ب} \times \text{جـ}} = \frac{130.8826 - 64.4809}{127.044} = \frac{66.4107}{127.044}$

$\hat{B} = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{66.4107}{127.044}\right) = 58.5^\circ$

∴ مساحة Δ ا ب جـ $= \frac{1}{2} \times (7.05)(9.01) \times \text{جا } 58.5^\circ = 27.1$ سم^2

$\hat{جـ} = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{\text{ب}^2 + \text{أ}^2 - \text{جـ}^2}{2 \text{ ب أ}}\right)$ (9)

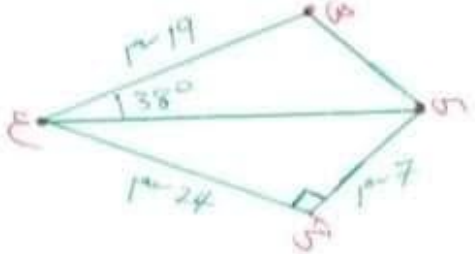
$\hat{جـ} = 180^\circ - (58.5^\circ + 73.1^\circ) = 48.4^\circ$

∴ مساحة Δ ا ب جـ $= \frac{1}{2} \times (9.01)(8.03) \text{ جا } 84.4^\circ = 27.1$ سم^2

---

(4) ش س ص ع شكل رباعي فيه قياس $\angle$ ش $= 90^\circ$ ، قياس $\angle$ س ع ص $= 38^\circ$

ش س $= 7$ سم ، ش ع $= 24$ سم ، ص ع $= 19$ سم ، أمسب مساحته ؟



(أول)

من Δ القائم الزاوية س ش ع ← س ع $= \sqrt{(\text{وتر})^2}$ $= \sqrt{49 + 576}$ $= 25$ سم

نظرية فيثاغورس .

13

مساحة Δ ر ص ع $= \frac{1}{2} \times 25 \times 19 \times \text{جا} 38^\circ$ $= 146$ سم^2

مساحة Δ ر ث ع القائم الزاوية $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 24 = 84$ سم^2 "

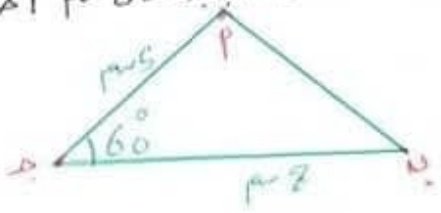
∴ مساحة الشكل الرباعي = مساحة المثلثين = مجموع $(146 + 84) = 230$ سم^2

---

5 في المثلث أ ب جـ فيه ق(∠ أ جـ ب) $= 60^\circ$ ، أ جـ $= 5$ سم ، ب جـ $= 8$ سم أحسب :-

أ مساحة Δ أ ب جـ. ب طول أ ب.

الحل



أ مساحة Δ أ ب جـ $= \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \text{جا} 60^\circ$ $= 17.3$ سم^2

ب جتا $60^\circ = \frac{\text{أ جـ}^2 + \text{ب جـ}^2 - \text{أ ب}^2}{2 \times \text{أ جـ} \times \text{ب جـ}} = \frac{25 + 64 - \text{أ ب}^2}{2 \times 5 \times 8} = \frac{89 - \text{أ ب}^2}{80}$

$\frac{1}{2} = \frac{89 - \text{أ ب}^2}{80}$

$80 = 89 - \text{أ ب}^2$ ← $\text{أ ب}^2 = 89 - 80$ جتا 60° ←

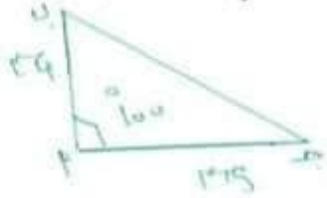
$\text{أ ب}^2 = 49$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين ← ∴ أ ب $= 7$ سم

⑥ في Δ ا ب جـ ، ا ب = ٤٫٩ سم ، ا جـ = ٤ سم ، قياس $\angle$ ب ا جـ = ١٠٠° [١١٤]

أستخدم بقدر الضرورة المعلومات المعطاة بالشكل لحساب :-

① مساحة Δ ا ب جـ ② (ب جـ)^2 ③ جا ٨٠° = ٠.٩٨٥ ، جتا ٨٠° = ٠.١٧٤



الحل

① مساحة Δ ا ب جـ $= \frac{1}{2} \times ٤ \times ٤٫٩ \times$ جا ١٠٠° $=$ ٩.٨٩ سم^2

② جتا ١٠٠° $= \frac{\text{ا ب}^2 + \text{ا جـ}^2 - \text{ب جـ}^2}{2 \times \text{ا ب} \times \text{ا جـ}} = \frac{\text{ب جـ}^2 - 25 + 16}{5 \times 4 \times 2}$

جتا ١٠٠° $= \frac{41 - \text{ب جـ}^2}{40} \leftarrow$ ٤٠ جتا ١٠٠° $= 41 - \text{ب جـ}^2 \leftarrow$ ب جـ^2 $= 41 -$ ٤٠ جتا ١٠٠°

∴ ب جـ^2 $=$ ٤٧.٩ $=$ ٤٨.٠ سم

---

① مساحة Δ ا ب جـ $= \frac{1}{2} \times ٤ \times ٤٫٩ \times$ جا ٨٠° $= \frac{1}{2} \times 20 \times 0.985 =$ ٩.٨٩ سم

② جتا ٨٠° $= \frac{\text{ا ب}^2 + \text{ا جـ}^2 - \text{ب جـ}^2}{2 \times \text{ا ب} \times \text{ا جـ}} = \frac{\text{ب جـ}^2 - 25 + 16}{5 \times 4 \times 2}$

جتا ٨٠° $= \frac{41 - \text{ب جـ}^2}{40} \leftarrow 41 - \text{ب جـ}^2 =$ ٤٠ جتا ٨٠°

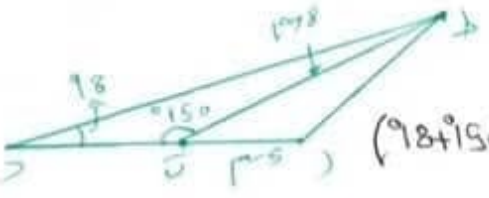
ب جـ^2 $= 41 -$ ٤٠ جتا ٨٠°

$= 41 - 40 \times 0.174 = (41 + 6.96) = 47.96 \approx$ ٤٨.٠ سم^2

ملاحظة :- جتا ١٠٠° $=$ - جتا ٨٠° حيث الزاوية ١٠٠° تقع في الربع الثاني

(7) في الشكل د ب ر خط مستقيم قياس ∠ه د ب = ١٨°، قياس ∠د ب ه = [15] ١٥٠°، ه ب = ٨ سم، ب ر = ٥ سم، أحسب:- ① د ب ② مساحة Δ ه د ر.

الحل



① في Δ د ب ه ← قياس ∠ د ب ه = ١٨٠° − (١٨° + ١٥٠°)

= ١٢°

$$\frac{\text{د ب}}{\text{جا ١٢°}} = \frac{٨}{\text{جا ١٨°}} \leftarrow \text{د ب} = \frac{٨ \times \text{جا ١٢°}}{\text{جا ١٨°}} = 5.38 \text{ سم}$$

② د ر = د ب + ب ر ← د ر = 5.38 + 5 = 10.38 سم ≈ 10.4 سم

$$\frac{\text{د ه}}{\text{جا ١٥٠°}} = \frac{٨}{\text{جا ١٨°}} \leftarrow \text{د ب} = \frac{٨ \times \text{جا ١٥٠°}}{\text{جا ١٨°}} = 12.9 \text{ سم}$$

∴ مساحة Δ د ه ر = $\frac{1}{2}$ × 12.9 × 10.38 × جا ١٨° = 20.7 سم²

* طريقة أخرى للفقرة ب :-

مساحة Δ د ب ه = $\frac{1}{2}$ × 12.9 × 5.38 × جا ١٨° = 10.7 سم²

مساحة Δ ب ه ر = $\frac{1}{2}$ × ٨ × ٥ × جا ١٥٠° = 10.8 سم²

حيث قياس ∠ ه ب ر = ١٨٠° − ١٥٠° = ٣٠° (زوايا متجاورة وعلى خط مستقيم)

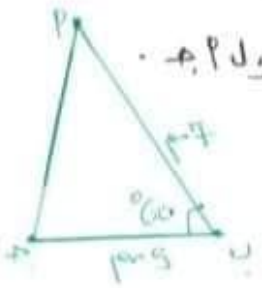
∴ مساحة Δ ه ب ر = $\frac{1}{2}$ × ٨ × ٥ × جا ٣٠° = 10 سم²

∴ مساحة Δ د ه ر = (مساحة Δ د ب ه + مساحة Δ ه ب ر)

= (10.7 + 10) = 20.8 سم²

(8) في المثلث أ ب جـ ، أ ب = 7 سم ، ب جـ = 5 سم ، قياس ∠ أ ب جـ = 60°

أ) أحسب مساحة المثلث. ب) أحسب بقاعدة جيب التمام طول أ جـ .



الحل

أ) مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × 7 × 5 × جا 60° = 15.2 سم²

ب) جتا 60° = $\frac{\text{أ جـ}^2 - 25 + 49}{2 \times 5 \times 7}$

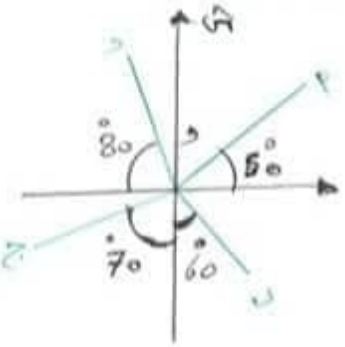
$\frac{\text{أ جـ}^2 - 74}{70}$ ←

أ جـ² - 74 = 70 جتا 60° ← أ جـ² = 74 - 70 جتا 60°

أ جـ² = 39 ← بأخذ الجذر التربيعي للطرفين ← ∴ أ جـ = 6.24 سم

تمارين - د

① أكتب اتجاه :-



① أ من و ← $90° - 50° = 40°$

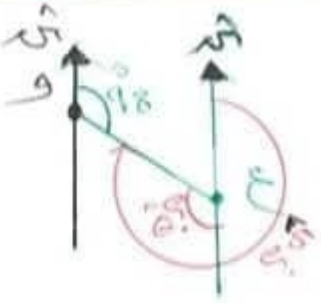
② ب من و ← $180° - 60° = 120°$

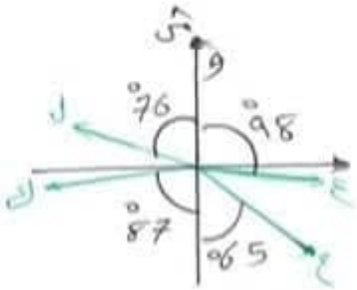
③ د من و ← $80° + 90° + 180° = 350°$

④ ج من و ← $70° + 180° = 250°$

---

② أوجد اتجاه ومن :-





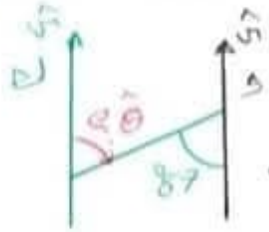
① ع ← ومن ع

$\theta_2 = 98°$ بالتبادل

$\therefore \theta_1 = 180° + \theta = 180° + 98° = 278°$ ← اتجاه ومن ع

---

② ل ← ومن ل

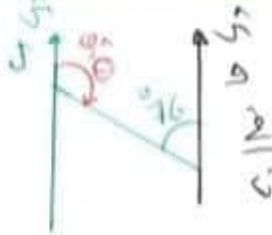


$\therefore \theta_1 = \theta_2 = 87°$ ← بالتبادل

اتجاه ومن ل

---

③ ك ← ومن ك

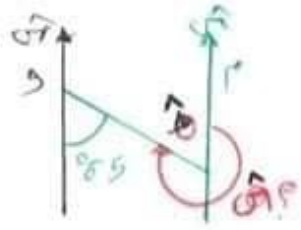


$(\theta_2 + 76°) = 180°$ (زوايا داخلة وفي اتجاه واحد تكون متكاملة)

$\theta_2 = 180° - 76° = 104°$

$\therefore \theta_1 = \theta_2 = 104°$ ← اتجاه ومن ك

⑤ م ومن م ←



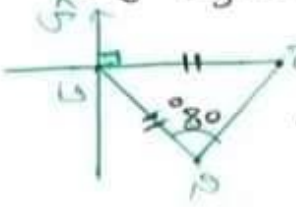
∴ ∠ش م = ٣٦٠° - ٦٥° = ٢٩٥° ← اتجاه و من م

---

③ النقط ح، ف، هـ على أرض مستوية ح تقع إلى الشرق من ف

ف ح = ف هـ ، ∠ ف هـ ح = ٨٠° ، أوجد اتجاه :-

④ هـ من ف ، ⑤ ف من هـ ، ⑥ هـ من ح ، ⑦ ح من هـ



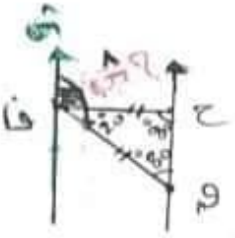
الحل

④ هـ من ف ∵ Δ ف ح هـ متساوي الساقين

∴ ∠ ف ح هـ = ∠ ف هـ ح = ٨٠°

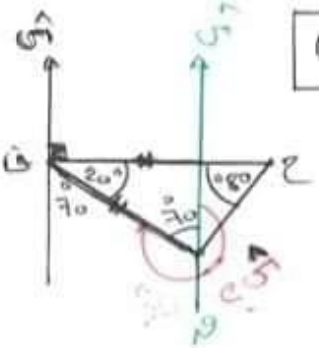
∴ ∠ ح ف هـ = ١٨٠° - ١٦٠° = ٢٠°

اتجاه هـ من ف ← ش ف هـ = ٩٠° + ٢٠° = ١١٥°

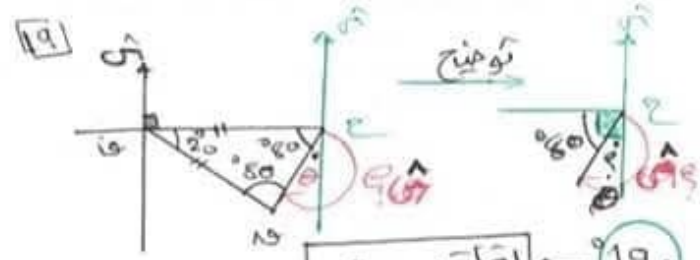


---

⑤ ف من هـ ٣٦٠° - ٧٠° = ٢٩٠° = ش ∠ اتجاه ف من هـ



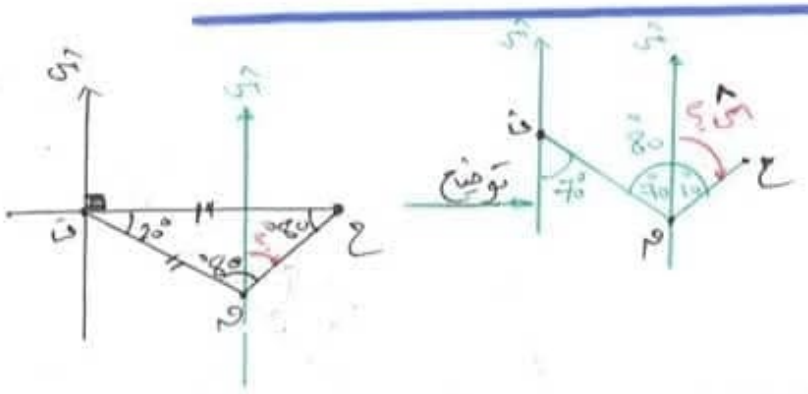
[19]



ⓒ ق(ب ه ج)

$= 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$ ← ق(ب ه ج)

$\therefore$ ق(ب ه ج) $= 180^\circ + 10^\circ = 190^\circ$ ← اتجاه د ه ج



ⓓ ج ه م

ق(ب ه ج) $= 80^\circ - 70^\circ = 10^\circ$ ← اتجاه ج ه م

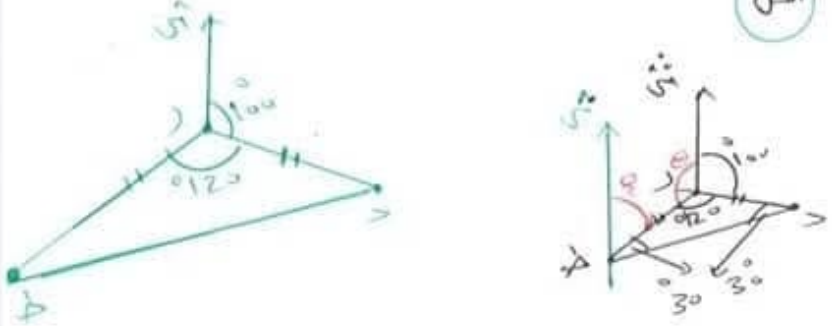
---

(4) المدى د، هـ، ر تكون بحيث د، هـ على ابعاد متساوية من ر

يكون اتجاه د ه ر 100° ويكون اتجاه هـ ه د ⓐ (ه هـ، ⓑ هـ ه د

الحل

ⓐ ق(ب هـ)



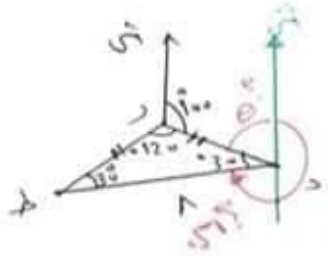
مجموع زوايا عند نقطة ← $(\theta + 100^\circ + 120^\circ) = 360^\circ$

$\therefore \hat{\theta} = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$

زوايا داخلة في جهة واحدة متكاملة ← $\theta - 180^\circ =$ ق

$= 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

29



ⓐ ق(∠هـ) = ؟

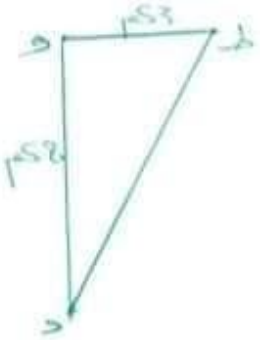
θ = 180° − 100° = 80°

زاويا داخلة وفي جهتين واحدة متكاملتان

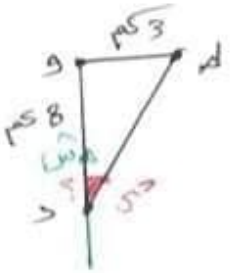
∴ ق(∠ب) = (30° + 80°) − 360° = 110° − 360° = 250°

تمرين 2.2

1 د، و، هـ ثلاث نقط بأرض مستوية ونقطة د تقع على جنوب و، هـ تقع شرق و، هـ تقع شرق و، وهـ = 3 كم، ود = 8 كم. أحسب اتجاه هـ من د.



الحل



∵ Δ وهـ د قائم الزاوية

∴ ظا د = 3/8

∴ ق(∠د) = ظا⁻¹(3/8) = 20.6°

∴ اتجاه هـ من د = 20.6° ش د

طريقة أخرى :-

∵ Δ وهـ د قائم الزاوية

∴ نطبق نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الضلع هـ د

هـ د (الوتر) = $\sqrt{\text{هـ و}^2 + \text{و د}^2}$ = $\sqrt{9 + 64}$ = $\sqrt{73}$ كم

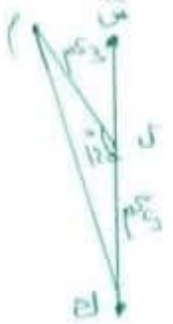
جتا د = $\frac{\text{هـ د}^2 + \text{و د}^2 - \text{هـ و}^2}{2 \times \text{هـ د} \times \text{و د}}$ = $\frac{73 + 64 - 9}{2 \times \sqrt{73} \times 8}$ = $\frac{128}{136.7}$

∴ د = جتا⁻¹($\frac{128}{136.7}$) = 20.6° ← اتجاه هـ من د = ش د

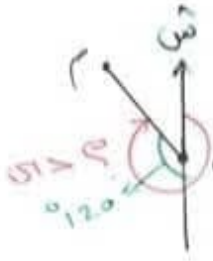
(2) في الشكل ل تقع 5 كم في اتجاه الشمال من لـ ، ل م = 3 كم ، قياس ق(لـ ل م) = 120° أحسب :-

ⓐ اتجاه م من ل ⓑ المسافة التي تقطعها ل إلى أقرب متر من م.

ⓒ مسافة لـ م.

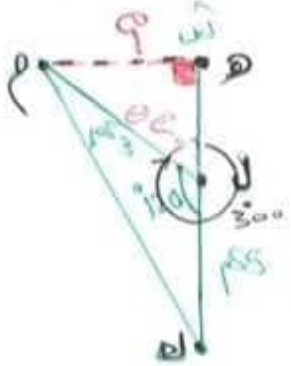


الحل



(أ) اتجاه م من ل ← ى = 180° + 120° = 300°

(ب) θ = 360° − 300° = 60°



$\frac{\overline{ل م}}{3} = \text{جا}\theta \leftarrow \frac{\overline{ل م}}{3} = \text{جا}60°$

$\therefore \overline{ل م} = 3 \times \text{جا}60° = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.60$ كم

$\frac{\text{جا}60°}{\overline{ل م}} = \frac{\text{جا}90°}{3} \leftarrow \therefore \overline{ل م} = \frac{3 \text{ جا}60°}{\text{جا}90°} = 2.60$ كم

(ج) $\text{جتا}120° = \frac{\overline{لـ م}^2 - 3^2 - 5^2}{2 \times 3 \times 5}$

$\overline{لـ م}^2 - 34 = 30 \times \text{جتا}120° \leftarrow \overline{لـ م}^2 - 34 = 30 \text{ جتا}120° = -49 \leftarrow$

$\therefore \overline{لـ م} = 7$ كم ← باخذ الجذر التربيعي للطرفين

ملاحظة :- توجد طريقة أخرى لايجاد قياس ق(لـ) تعتمد بالدرجة الأولى على [illegible]

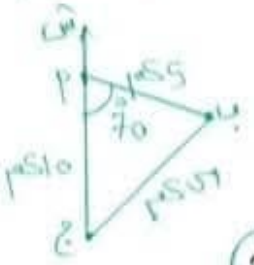
(3) في الشكل المقابل: ق(∠أ ب جـ) = 70°، أ ب = 5 سم، ب جـ = 10 سم، ج د = √53 سم

(أ) احسب طول أ جـ

(ب) احسب قياس الزاوية التي يصنعها أ ب مع الاتجاه الشمالي

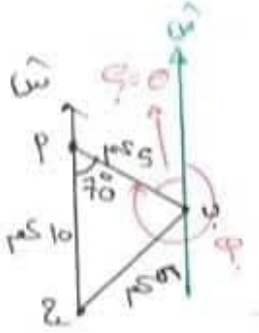
(جـ) استخدم المعلومات المناسبة لإيجاد قيمة جتا 70°

(جتا 70° = 0.342، جا 70° = 0.940، ظا 70° = 2.75)



الحل

(أ)



∴ ق(∠ش أ ب) = 90° − 70° = 20°

(ب) جتا 70° = $\frac{10^2 + 5^2 - (\sqrt{53})^2}{2 \times 10 \times 5}$ = $\frac{100 + 25 - 53}{100}$ = $\frac{72}{100}$

∴ 72 = 100 × جتا 70° ⟵ 72 = 125 − س²

∴ س² = 125 − 72 = 53 ⟵ س = √53 = 7.28 سم

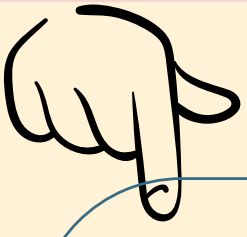
(جـ) جتا 70° = 0.342

تم رفع الملف
عبر

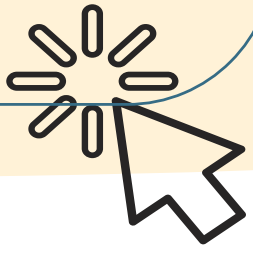
موقع الكتاب 24

للعودة الى الموقع اكتب في بحث جوجل

موقع الكتاب 24



alktab24.online



الباب الثالث: النسب المثلثية والدوال المثلثية

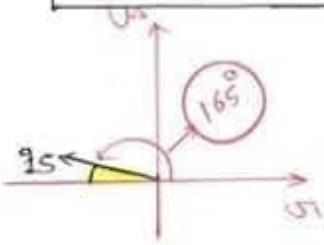
تمرين 3-P

(1) أوجد قياس الزاوية الأساسية لكل من القياسات الآتية :-

(أ) 165

∵ الزاوية تقع في الربع الثاني

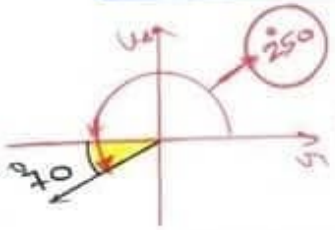
∴ الزاوية الأساسية $= (180^\circ - 165^\circ) = 15^\circ$



(ب) 250°

∵ الزاوية تقع في الربع الثالث

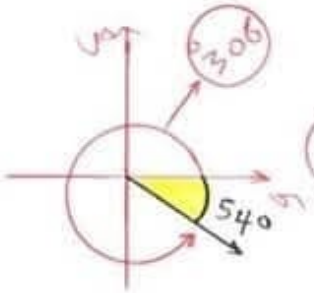
∴ الزاوية الأساسية $= (250^\circ - 180^\circ) = 70^\circ$



(ج) 306°

∵ الزاوية تقع في الربع الرابع

∴ الزاوية الأساسية $= (360^\circ - 306^\circ) = 54^\circ$

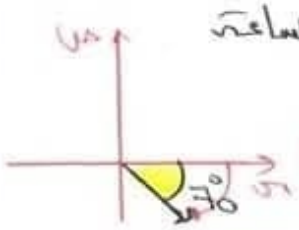


(د) -70

∵ الإشارة سالبة ∴ الدوران مع حركة عقارب الساعة

∴ الربع الرابع هو الربع الأول

∴ الزاوية الأساسية $= 70^\circ$



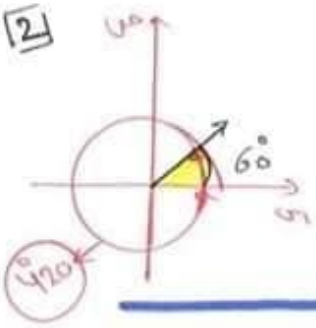
(هـ) -200

∵ الإشارة سالبة ∴ الدوران مع حركة عقارب الساعة

∴ الزاوية تقع في الربع الثالث (هو الربع الثاني بدوران ضد حركة عقارب الساعة)

∴ الزاوية الأساسية $= (200^\circ - 180^\circ) = 20^\circ$

2

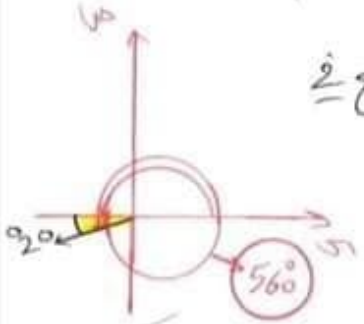


(ج) 420° ∵ الزاوية ($360^\circ <$) وتقع في الربع الأول

بعد دورة كاملة ضد عقارب الساعة

∴ الزاوية الأساسية $= (360^\circ - 420^\circ) = 60^\circ$

(د) 560° ∵ الزاوية ($360^\circ <$) ← $(360^\circ - 560^\circ) = 200^\circ$

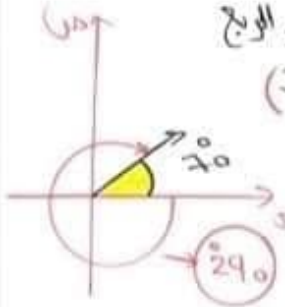


∵ الزاوية المستنجة 200° تعبر زاوية معطاه وتقع في الربع الثالث.

∴ الزاوية الأساسية $= (200^\circ - 180^\circ) = 20^\circ$

(ه) -290° ∵ الإشارة سالبة ∴ الدوران مع حركة عقارب الساعة

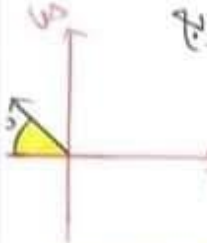
∴ الزاوية تقع في الربع الرابع (هو الربع الأول بدوران ضد عقارب الساعة)



∴ الزاوية الأساسية $= (360^\circ - 290^\circ) = 70^\circ$

(و) -250° ∵ الإشارة سالبة ∴ الدوران مع حركة عقارب الساعة

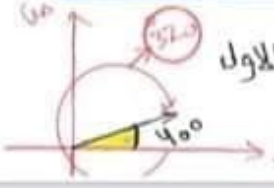
∴ الزاوية تقع في الربع الثالث (هو الربع الثاني بدوران ضد عقارب الساعة)



∴ الزاوية الأساسية $= (180^\circ - 250^\circ) = 70^\circ$

(ز) -320° ∵ الإشارة سالبة ∴ الدوران مع حركة عقارب الساعة

∴ الزاوية تقع في الربع الرابع (هو الربع الأول بدوران ضد عقارب الساعة)



∴ الزاوية الأساسية $= (360^\circ - 320^\circ) = 40^\circ$

[3]

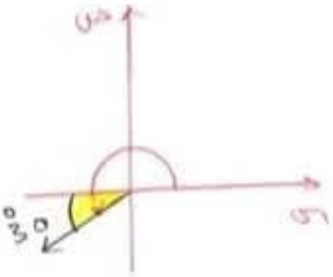
② أوجد قيمة كل من النسب المثلثية الآتية :-

(أ) $جا 210°$

∵ الزاوية تقع في الربع الثالث

∴ النسبة (جا) سالبة

∴ الزاوية الأساسية = $(210° - 180°) = 30°$



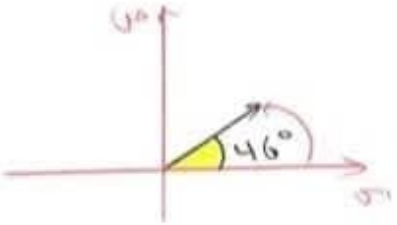
∴ $جا 210° = - جا 30° = -0.5$

(ب) $جتا 46°$

∵ الزاوية تقع في الربع الأول

∴ النسبة (جتا) موجبة

∴ الزاوية الأساسية = $46°$



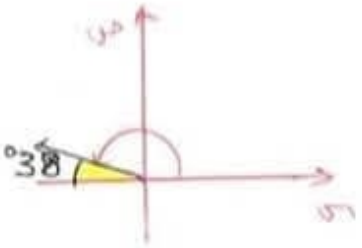
∴ $جتا 46° = 0.6947$

(ج) $ظا 142°$

∵ الزاوية تقع في الربع الثاني

∴ النسبة (ظا) سالبة

∴ الزاوية الأساسية $= (180° - 142°) = 38°$



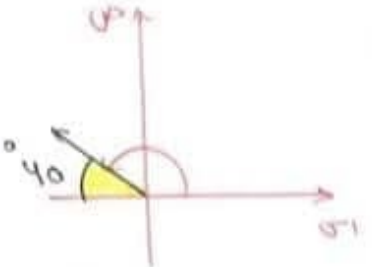
∴ $ظا 142° = - ظا 38° = -0.7813$

(د) $جا 140°$

∵ الزاوية تقع في الربع الثاني

∴ النسبة (جا) موجبة

∴ الزاوية الأساسية $= (180° - 140°) = 40°$



∴ $جا 140° = جا 40° = 0.6428$

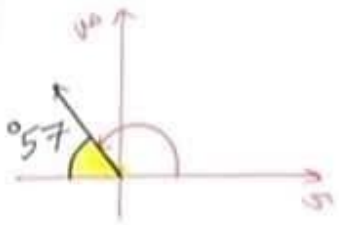
[4]

(أ) جتا 123°

∵ الزاوية تقع في الربع الثاني

∴ النسبة (جتا) سالبة

∴ الزاوية الأساسية = (180° - 123°) = (57°)



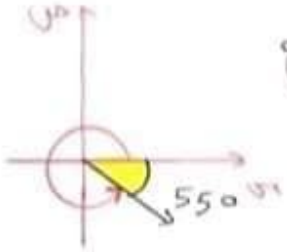
∴ جتا 123° = - جتا 57° = - 0.5446

(ب) ظا 305°

∵ الزاوية تقع في الربع الرابع

∴ النسبة (ظا) سالبة

∴ الزاوية الأساسية = (360° - 305°) = (55°)



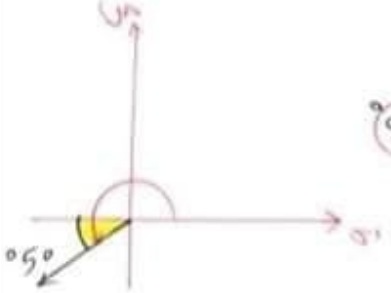
∴ ظا 305° = - ظا 55° = - 1.4281

(ج) جتا 230°

∵ الزاوية تقع في الربع الثالث

∴ النسبة (جتا) سالبة

∴ الزاوية الأساسية = (230° - 180°) = (50°)



∴ جتا 230° = - جتا 50° = - 0.6428

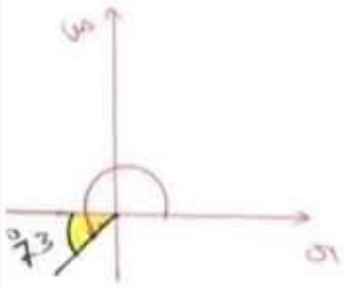
∴ - جتا 230° = - (- جتا 50°) = 0.6428

(د) جا 253°

∵ الزاوية تقع في الربع الثالث

∴ النسبة (جا) سالبة

∴ الزاوية الأساسية = (253° - 180°) = (73°)



∴ جا 253° = - جا 73° = - 0.9563

∴ - جا 253° = - (- جا 73°) = 0.9563

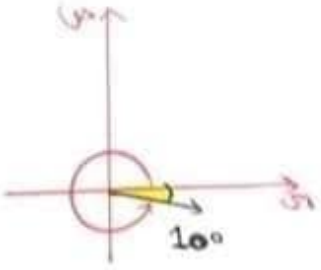
5

أ) $350°$

∵ الزاوية تقع في الربع الرابع

∴ النسبة (ظا) سالبة

∴ الزاوية الأساسية $= 360° - 350° = 10°$



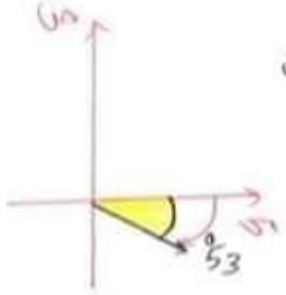
$\therefore$ ظا $350° =$ − ظا $10° = -0.1763$

ب) جتا $(-53°)$

∵ إشارة الزاوية سالبة ← الدوران مع حركة عقارب الساعة

∴ الزاوية تقع الأول (هو الربع الرابع بدوران ضد عقارب الساعة) ← النسبة (جتا) موجبة

∴ الزاوية الأساسية $= 53°$



$\therefore$ جتا $(-53°) =$ جتا $53° = 0.6018$

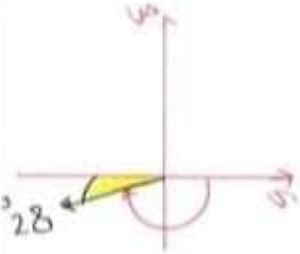
• بناء على القاعدة :- جتا $(-\theta)$ = جتا θ

ج) جا $(-152°)$

∵ إشارة الزاوية سالبة ← الدوران مع حركة عقارب الساعة

∴ الزاوية تقع في الربع الثالث (هو الربع الثالث بدوران ضد عقارب الساعة) ← النسبة (جا) سالبة

∴ الزاوية الأساسية $= 180° - 152° = 28°$



$\therefore$ جا $(-152°) =$ − جا $28° = -0.4695$

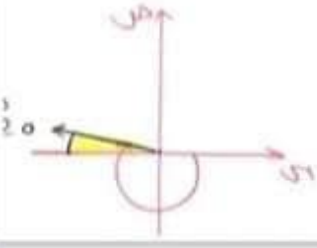
• بناء على القاعدة :- جا $(-\theta)$ = − جا θ

د) ظا $(-200°)$

∵ إشارة الزاوية سالبة ← الدوران مع حركة عقارب الساعة

∴ الزاوية تقع في الربع الثالث (هو الربع الثاني بدوران ضد عقارب الساعة) ← النسبة (ظا) سالبة

∴ الزاوية الأساسية $= 200° - 180° = 20°$



$\therefore$ ظا $(-200°) =$ − ظا $20° = -0.3640$

• بناء على القاعدة :- ظا $(-\theta)$ = − ظا θ

[6]

(3) عبر عن الآتي بدلالة نسبة متطيشة خاس فقط حيث س زاوية حادة.

(أ) جا(٩٠° - س) = جتا س
(ب) جتا(٩٠° - س) = جا س
(ج) ظا(٩٠° - س) = ظتا س
(د) جا(١٨٠° - س) = جا س
(هـ) جتا(١٨٠ - س) = - جتا س
(و) ظا(١٨٠° - س) = - ظا س
(ز) جا(١٨٠° + س) = - جا س
(ح) جتا(١٨٠° + س) = - جتا س
(ط) ظا(١٨٠° + س) = ظا س
(ي) جا(٢٧٠° - س) = - جتا س
(ك) جتا(٣٦٠° - س) = جتا س
(ل) ظا(٣٦٠° - س) = - ظا س

[7]

تمرين 4-3

(1) أوجد س حيث $0° \le س \le 360°$ مقرباً إجابتك لرقم عشري واحد.

(أ) $جا س = 0.8934$

$س = جا^{-1}(0.8934) = 63.3°$

النسبة (جا) موجبة في الربع الأول والثاني

في الربع الأول ← $س = \theta = 63.3°$

في الربع الثاني ← $س = 180° - \theta \leftarrow س = 180° - 63.3° = 116.7°$

∴ قيم الزاوية س هي $\{63.3°, 116.7°\}$

(ب) $2جا س = -0.2571$

$2س = جا^{-1}(0.2571) = 14.9°$

النسبة (جا) سالبة في الربع الثالث والرابع

في الربع الثالث ← $2س = 14.9° + 180° = 194.9°$

$\therefore س = \frac{194.9°}{2} = 97.5°$

∵ الزاوية في السؤال 2س ∴ نضيف $180°$ للزاوية الدوران س

$\therefore س = 97.5° + 180° = 277.5°$

في الربع الرابع ←

$2س = 360° - 14.9° = 345.1°$

$\therefore س = \frac{345.1°}{2} = 172.6°$

$\therefore س = 172.6° + 180° = 352.6°$

[8]

ج) جتا س = 0.8625

س = جتا$^{-1}$(0.8625) = 30.4°

النسبة جتا موجبة في الربع الأول والرابع

في الربع الأول ← س = 30.4°

في الربع الرابع ← س = 360 - 30.4 = 329.6°

∴ قيم الزاوية س هي {30.4° ، 329.6°}

د) جتا 2س = -0.3239

2س = جتا$^{-1}$(0.3239) = 71.1°

النسبة جتا سالبة في الربع الثاني والثالث

في الربع الثاني ← 2س = 180° - 71.1° = 108.9° ← س = 108.9°/2 = 54.9°

∵ الزاوية في السؤال 2س ∴ نضيف 180° لزاوية الدوران س

∴ س = 54.9° + 180° = 234.5°

في الربع الثالث ← 2س = 180° + 71.1° = 251.1° ← س = 251.1°/2 = 125.6°

∵ الزاوية في السؤال 2س ∴ نضيف 180° لزاوية الدوران س

∴ س = 125.6° + 180° = 305.6°

∴ قيم الزاوية س هي {54.5° ، 125.6° ، 234.5° ، 305.6°}

[9]

ⓐ $\tan\theta = \frac{\theta}{2} = 0.4348$

$\frac{\theta}{2} = \tan^{-1}(0.4348) = 23.5^\circ$

النسبة $\tan\theta$ موجبة في الربع الأول والثالث

في الربع الأول ←

$\frac{\theta}{2} = 23.5^\circ \leftarrow \theta = 47^\circ$

في الربع الثالث ←

$\frac{\theta}{2} = 180^\circ + 23.5^\circ = 203.5^\circ \leftarrow \theta = 407^\circ$ هذه القيمة مرفوضة لا تخارج حدود الشرط $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

∴ قيمة الزاوية θ هي $\{47^\circ\}$

ⓑ $\tan\theta = -1.546$

$\theta = \tan^{-1}(1.546) = 57.1^\circ$

النسبة $\tan\theta$ موجبة في الربع الاول والثالث

في الربع الأول ← $\theta = 57.1^\circ$

في الربع الثالث ← $\theta = 180^\circ + 57.1^\circ$

$\theta = 237.1^\circ$

النسبة $\tan\theta$ سالبة في الربع الثاني والرابع

في الربع الثاني ← $\theta = 180^\circ - 57.1^\circ$

$\theta = 122.9^\circ$

في الربع الرابع ← $\theta = 360^\circ - 57.1^\circ$

$\theta = 302.9^\circ$

∴ قيم الزاوية θ هي $\{57.1^\circ, 122.9^\circ, 237.1^\circ, 302.9^\circ\}$

(١٥)

(ج) $\text{جتا}\theta = \pm 0.3830$

$\theta = \text{جتا}^{-1}(0.3830) = 67.5^\circ$

النسبة جتا موجبة في الربع الأول والرابع

في الربع الأول ← $\theta_1 = 67.5^\circ$

في الربع الرابع ← $\theta = 360^\circ - 67.5^\circ$

$\theta = 292.5^\circ$

النسبة جتا سالبة في الربع الثاني والثالث

في الربع الثاني ← $\theta = 180^\circ - 67.5^\circ$

$\theta = 112.5^\circ$

في الربع الثالث ← $\theta = 180^\circ + 67.5^\circ$

$\theta = 247.5^\circ$

∴ قيم الزاوية θ هي $\{67.5^\circ, 112.5^\circ, 247.5^\circ, 292.5^\circ\}$

(د) $\text{ظا}2\theta = 0.6976$

$2\theta = \text{ظا}^{-1}(0.6976) = 34.9^\circ$

النسبة ظا موجبة في الربع الأول والثالث

في الربع الأول ← $2\theta = 34.9^\circ \leftarrow \theta = \frac{34.9}{2} = 17.5^\circ$

∵ الزاوية في السؤال 2θ ∴ نضيف 180° لزاوية الدوران θ

∴ $\theta = 17.5^\circ + 180^\circ = 197.5^\circ$

في الربع الثالث ← $2\theta = 180^\circ + 34.9^\circ = 214.9^\circ \leftarrow \theta = \frac{214.9}{2} = 107.5^\circ$

∵ الزاوية في السؤال 2θ ∴ نضيف 180° لزاوية الدوران θ

∴ $\theta = 107.5^\circ + 180^\circ = 287.5^\circ$

∴ قيم الزاوية θ هي $\{17.5^\circ, 107.5^\circ, 197.5^\circ, 287.5^\circ\}$

(2) أوجد الزاوية θ حسب الشروط المعطاه :-

(أ) جاθ = 0.5 حيث $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ، جتاθ موجب .

الحل

$\theta = جا^{-1}(0.5) = 30^\circ$

الشرط (جاθ ، جتاθ) ← (موجبة)

∴ θ تقع في الربع الأول فقط ←	∴ $\theta = 30^\circ$

(ب) ظاθ = $-\sqrt{3}$ حيث $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ ، جاθ سالب .

الحل

$\theta = ظا^{-1}(-\sqrt{3}) = 60^\circ$

الشرط (ظاθ ، جاθ)
(موجبة سالبة)

∴ θ تقع في الربع الثالث فقط ←	∴ $\theta = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ$

(ج) جاθ = -0.7660 ، $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ، جتاθ سالب .

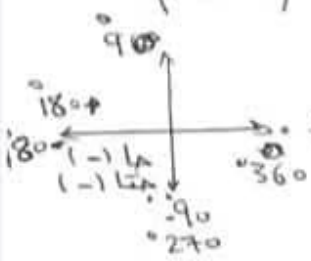
الحل

$\theta = جا^{-1}(0.7660) = 50^\circ$ ، الشرط (جاθ ، جتاθ) ← (سالبة)

حسب نظام قياس الزاوية θ ← $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

θ تقع في الربع الأول والثاني بدوران ضد عقارب الساعة ،

θ تقع في الربع الثالث والرابع = مع حركة عقارب الساعة



$\therefore \theta = -180^\circ + 50^\circ = -130^\circ$

(د) جتا θ = −0.3567 ، 180° ≤ θ ≤ 540° ، جا θ موجبة.

الحل

θ = جتا⁻¹(0.3567) = 69.1° ، الشرط (جتا θ سالبة ، جا θ موجبة)

∴ θ تقع في الربع الثاني فقط ← θ = (180° − 69.1°) = 110.9° هذه قيمة مرفوضة لأن مجال الزاوية θ هو (180° ≤ θ ≤ 540°) لذلك نضيف 360° للزاوية المستنجة θ لإيجاد زاوية الدوران المطلوبة

∴ θ = 110.9° + 360° = 470.9° بعد دورة كاملة

(3) أوجد ر حيث 0° ≤ ر ≤ 360°

(أ) جا ر = جتا 35° ← جا ر = 0.8192 ← ر = جا⁻¹(0.8192) = 55°

∵ النسبة (جا) موجبة في الربع الأول والثاني

∴ ر = 55° في الربع الأول	ر = 180° − 55° = 125° في الربع الثاني

∴ ر = {55° ، 125°}

(ب) جتا ر = جا 42° ← جتا ر = 0.6691 ← ر = جتا⁻¹(0.6691) = 48°

∵ النسبة (جتا) موجبة في الربع الأول والرابع

∴ ر = 48° في الربع الأول	ر = 360° − 48° = 312° في الربع الرابع

∴ ر = {48° ، 312°}

[13] ج) $\text{جا}\theta = -\text{جتا}30^\circ \leftarrow \text{جا}\theta = -0.8660 \leftarrow \theta = \text{جا}^{-1}(0.8660-) = 60^\circ$

∴ النسبة (جا) سالبة في الربع الثالث والرابع

$\theta = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$ في الربع الثالث

$\theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ في الربع الرابع

∴ $\theta = \{240^\circ, 300^\circ\}$

د) $\text{جا}\theta = \text{جا}320^\circ \leftarrow \text{جا}\theta = -0.6428 \leftarrow \theta = \text{جا}^{-1}(0.6428-) = 40^\circ$

∴ النسبة (جا) سالبة في الربع الثالث والرابع

$\theta = 180^\circ + 40^\circ = 220^\circ$ في الربع الثالث

$\theta = 360^\circ - 40^\circ = 320^\circ$ في الربع الرابع

∴ $\theta = \{220^\circ, 320^\circ\}$

هـ) $\text{ظا}\theta = \text{جتا}180^\circ \leftarrow \text{ظا}\theta = -1 \leftarrow \theta = \text{ظا}^{-1}(1-) = 45^\circ$

∴ النسبة (ظا) سالبة في الربع الثاني والرابع

$\theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ في الربع الثاني

$\theta = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$ في الربع الرابع

∴ $\theta = \{135^\circ, 315^\circ\}$

و) $\text{جا}2\theta = \text{جتا}40^\circ \leftarrow \text{جا}2\theta = 0.7660 \leftarrow 2\theta = \text{جا}^{-1}(0.7660) = 50^\circ$

∴ النسبة (جا) موجبة في الربع الأول والثاني

$2\theta = 50^\circ \leftarrow \theta = 25^\circ$ ، $\theta = 180^\circ + 25^\circ = 205^\circ$ في الربع الأول

«ضعف الزاوية»

$2\theta = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ \leftarrow \theta = 65^\circ$ ، $\theta = 180^\circ + 65^\circ = 245^\circ$ في الربع الثاني

«ضعف الزاوية»

(14) (ز) $\text{جتا}\frac{\theta}{2} = \text{جا}55^\circ \leftarrow \text{جتا}\frac{\theta}{2} = 0.8192 \leftarrow \frac{\theta}{2} = \text{جتا}^{-1}(0.8192)$

$\therefore \frac{\theta}{2} = 35^\circ$

∵ النسبة (جتا) موجبة في الربع الأول و الرابع

$\therefore \frac{\theta}{2} = 35^\circ \leftarrow \theta = 70^\circ$ في الربع الأول
$\therefore \frac{\theta}{2} = 360^\circ - 35^\circ = 325^\circ \leftarrow \theta = 650^\circ$ مرفوضة لأن $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ في الربع الرابع

---

(14) في كل من الأسئلة الآتية أوجد قيمة θ حيث $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ لأقرب درجة.

(أ) $2\text{جا}\theta = 1 \leftarrow \text{جا}\theta = \frac{1}{2} \leftarrow \theta = \text{جا}^{-1}(\frac{1}{2}) = 30^\circ$

∵ (جا) موجبة في الربع الأول و الثاني

$\therefore \theta = 30^\circ$ في الربع الأول	$\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ في الربع الثاني
$\therefore \theta = \{30^\circ, 150^\circ\}$	

(ب) $2\text{جا}\theta = \text{جتا}\theta \leftarrow \frac{2\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = 1 \leftarrow 2\text{ظا}\theta = 1 \leftarrow \text{ظا}\theta = \frac{1}{2} \leftarrow$

$\theta = \text{ظا}^{-1}(\frac{1}{2}) = 26.6^\circ \approx 27^\circ$

∵ (ظا) موجبة في الربع الأول و الثالث	
$\therefore \theta = 26.6^\circ \approx 27^\circ$ في الربع الأول	$\theta = 180^\circ + 27^\circ = 207^\circ$ في الربع الثالث
$\therefore \theta = \{27^\circ, 207^\circ\}$	

[15]

ج) جتا $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ← $\theta = \frac{\pi}{2}$ = جتا$^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ = 45°

∵ (جتا) موجبة في الربع الأول و الرابع

∴ ى = $45^\circ \times 2 = 90^\circ$ في الربع الأول
ى = $2(360^\circ - 45^\circ) = 630^\circ$ في الربع الرابع مرفوضة لأن $0^\circ \leq$ ى $\leq 360^\circ$
∴ ى = $\{90^\circ\}$

د) 2 جا $\frac{\theta}{2} = 1$ ← جا $\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ ← $\frac{\theta}{2}$ = جا$^{-1}(\frac{1}{2})$ = 30°

∵ (جا) موجبة في الربع الأول و الثاني

∴ ى = $30^\circ \times 2 = 60^\circ$ في الربع الأول
ى = $2(180^\circ - 30^\circ) = 300^\circ$ في الربع الثاني مقبولة لأنها محصورة بين $0^\circ \leq$ ى $\leq 360^\circ$
∴ ى = $\{60^\circ, 300^\circ\}$

(5) أوجد القيم العددية لكل من جتا2ى ، ظا3ى ، جا4ى عندما ى = $\frac{3\pi}{5}$ راديان.

ى بالدرجات = $\frac{3\pi}{5} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 108^\circ$ الحل

جا4ى = جا$(4 \times 108^\circ)$ = جا432° = 0.9511

جتا2ى = جتا$(2 \times 108^\circ)$ = جتا216° = -0.8090

ظا3ى = ظا$(3 \times 108^\circ)$ = ظا324° = -0.7265

⊛ اثبت المتطابقات الآتية :-

تمرين 3-ج

(٢) $\frac{1 + \text{ظا}\theta}{\text{قا}\theta} \equiv \frac{1 + \text{ظتا}\theta}{\text{قتا}\theta}$

الحل

الطرف الأيمن :-

$$\frac{\frac{1}{\text{ظتا}\theta} + 1}{\text{قا}\theta} = \frac{\frac{1 + \text{ظتا}\theta}{\text{ظتا}\theta}}{\text{قا}\theta} = \frac{1 + \text{ظتا}\theta}{\text{قا}\theta \times \text{ظتا}\theta}$$

$$\frac{1 + \text{ظتا}\theta}{\text{قا}\theta \times \frac{\text{قتا}\theta}{\text{قا}\theta}} = \frac{1 + \text{ظتا}\theta}{\text{قتا}\theta} \leftarrow$$

∴ الطرفان متكافئتان

يمكن للطلبة استخدام الطرف الأيسر للإثبات

* لطريقة أخرى :-

الطرف الأيمن ←

$$\frac{\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} + 1}{\frac{1}{\text{جتا}\theta}} = \frac{\frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{\text{جتا}\theta}}{\frac{1}{\text{جتا}\theta}}$$

$$= \text{جا}\theta + \text{جتا}\theta$$

الطرف الأيسر ←

$$\frac{\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} + 1}{\frac{1}{\text{جا}\theta}} = \frac{\frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}}{\frac{1}{\text{جا}\theta}}$$

$$= \text{جا}\theta + \text{جتا}\theta$$

∴ الطرفان متكافئتان

[16]

يوجد أحيانا أن للطرف الأيمن للوصول للطرف الأيسر وأيضا العكس على الطلبة التفكير فيها

ب) $\text{ظا}\theta + \text{ظتا}\theta \equiv \text{ظا}\theta\,\text{ظتا}\theta$

الحل

الطرف الإيمن :-

$$\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} + \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} = \frac{\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta} = \frac{1}{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta}$$

$$\frac{1}{\text{جا}\theta} \times \frac{1}{\text{جتا}\theta} = \text{قتا}\theta\,\text{قا}\theta = \text{قا}\theta\,\text{قتا}\theta$$

∴ الطرفان متكافئان

= الطرف الإيسر

ج) $\frac{1+\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} \equiv \frac{\text{جتا}\theta}{1-\text{جا}\theta}$

الحل

الطرف الإيمن :-

بضرب البسط والمقام × $\frac{1-\text{جا}\theta}{1-\text{جا}\theta}$ « مرافق البسط »

$$\frac{1+\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} \times \frac{1-\text{جا}\theta}{1-\text{جا}\theta} = \frac{1-\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}\theta(1-\text{جا}\theta)} = \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}\theta(1-\text{جا}\theta)}$$

$$= \frac{\text{جتا}\theta}{1-\text{جا}\theta} = \text{الطرف الإيسر}$$

∴ الطرفان متكافئان

الطرف الإيسر :-

بضرب البسط والمقام × $\frac{1+\text{جا}\theta}{1+\text{جا}\theta}$ « مرافق المقام »

$$\frac{\text{جتا}\theta}{1-\text{جا}\theta} \times \frac{1+\text{جا}\theta}{1+\text{جا}\theta} = \frac{\text{جتا}\theta(1+\text{جا}\theta)}{1-\text{جا}^2\theta} = \frac{\text{جتا}\theta(1+\text{جا}\theta)}{\text{جتا}^2\theta}$$

$$= \frac{1+\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \text{الطرف الإيمن}$$

∴ الطرفان متكافئان

- طرق أخرى لإثبات المتطابقات ⑤

الطرف الأيمن :-

$$\frac{1}{\text{ظا}\theta} + \text{ظا}\theta = \frac{1 + \text{ظا}^2\theta}{\text{ظا}\theta} = \frac{\text{قا}^2\theta}{\text{ظا}\theta}$$

$$\frac{\text{قتا}\theta}{\text{ظا}\theta}\ \text{قتا}\theta = \frac{\text{قتا}\theta}{\frac{\text{قتا}\theta}{\text{قا}\theta}}\ \text{متا}\theta = \frac{\text{قا}\theta\ \text{قتا}\theta}{\text{متا}\theta}\ \text{متا}\theta$$

$$= \text{قا}\theta\ \text{قتا}\theta$$

= الطرف الأيسر

الطرف الأيمن :-

$$\text{ظا}\theta + \frac{1}{\text{ظا}\theta} = \frac{\text{ظا}^2\theta + 1}{\text{ظا}\theta} = \frac{\text{قا}^2\theta}{\text{ظا}\theta}$$

$$\frac{\text{قا}\theta}{\text{ظا}\theta}\ \text{قا}\theta = \frac{\text{قا}\theta}{\frac{\text{قا}\theta}{\text{متا}\theta}}\ \text{قا}\theta = \frac{\text{قا}\theta\ \text{قتا}\theta}{\text{قا}\theta}\ \text{قا}\theta$$

$$= \text{قتا}\theta\ \text{قا}\theta = \text{قا}\theta\ \text{قتا}\theta$$

= الطرف الأيسر

الطرف الأيسر :- $\because \text{ظا}\theta = \frac{\text{قا}\theta}{\text{قتا}\theta} \rightarrow \text{قا}\theta = \text{ظا}\theta\ \text{قتا}\theta$

$$\text{ظا}\theta\ \text{متا}\theta \cdot \text{قتا}\theta = \text{ظا}\theta\ \text{قتا}^2\theta = \text{ظا}\theta(1 + \text{ظتا}^2\theta) =$$

$$\text{ظا}\theta + \text{ظا}\theta\ \text{ظتا}^2\theta = \text{ظا}\theta + \frac{1}{\text{ظتا}\theta} \cdot \text{ظتا}^2\theta =$$

$$\text{ظا}\theta + \text{ظتا}\theta$$

= الطرف الأيمن

18

ⓒ $(جا\theta + قا\theta)^2 + جتا^2\theta \equiv (1 + ظا\theta)^2 + 1$

الحل

الطرف الإيمن :- $جا^2\theta + 2جا\theta قا\theta + قا^2\theta + جتا^2\theta$

$جا^2\theta + جتا^2\theta + 2جا\theta قا\theta + قا^2\theta$

$1 + ظا^2\theta + \frac{1}{جتا\theta} \times جا\theta \times 2 + 1$

$1 + ظا^2\theta + ظا\theta \times 2 + 1$

$1 + 1 + ظا^2\theta + 2ظا\theta$

$1 + (1 + ظا\theta)^2$ ∴ الطرف الإيسر

∴ الطرفان متكافئان

الطرف الإيسر :- $1 + 2ظا\theta + ظا^2\theta + جا^2\theta + جتا^2\theta$

$1 + 2\frac{جا\theta}{جتا\theta} + قا^2\theta - 1 + جا^2\theta + جتا^2\theta$

$2جا\theta \cdot \frac{1}{جتا\theta} + قا^2\theta + جتا^2\theta + جتا^2\theta$

$2جا\theta قا\theta + قا^2\theta + جا^2\theta + جتا^2\theta$

$جا^2\theta + 2جا\theta قا\theta + قا^2\theta + جتا^2\theta$

$(جا\theta + قا\theta)^2 + جتا^2\theta$ ∴ الطرف الإيمن

∴ الطرفان متكافئان

(2) $(جا\theta + جتا\theta)(قا\theta + قتا\theta) - 2 \equiv ظا\theta + ظتا\theta$

الحل

الطرف الأيمن:- $جا\theta\, قا\theta + جا\theta\, قتا\theta + جتا\theta\, قا\theta + جتا\theta\, قتا\theta - 2$

$جا\theta \cdot \frac{1}{جتا\theta} + \frac{1}{جا\theta} \cdot جا\theta + \frac{1}{جتا\theta} \cdot جتا\theta + جتا\theta \cdot \frac{1}{جا\theta} - 2$

$\frac{جا\theta}{جتا\theta} + 1 + 1 + \frac{جتا\theta}{جا\theta} - 2 = ظا\theta + ظتا\theta$ الطرف الأيسر

∴ الطرفان متكافئان

---

(3) $ظا\theta + ظتا\theta + قا\theta + قتا\theta \equiv (1 + جا\theta)(1 + جتا\theta)\, قا\theta\, قتا\theta - 1$

الحل

الطرف الأيمن:- $\frac{جا\theta}{جتا\theta} + \frac{جتا\theta}{جا\theta} + \frac{1}{جتا\theta} + \frac{1}{جا\theta} = \frac{جا^2\theta + جتا^2\theta + جا\theta + جتا\theta}{جا\theta\, جتا\theta}$

$= \frac{1 + جا\theta + جتا\theta}{جا\theta\, جتا\theta}$

الطرف الأيسر:- $(1 + جتا\theta + جا\theta + جا\theta\, جتا\theta)\, قا\theta\, قتا\theta - 1$

$قا\theta\, قتا\theta + جتا\theta\, قا\theta\, قتا\theta + جا\theta\, قا\theta\, قتا\theta + جا\theta\, جتا\theta\, قا\theta\, قتا\theta - 1$

$\frac{1}{جتا\theta جا\theta} + جتا\theta \times \frac{1}{جتا\theta جا\theta} + جا\theta \times \frac{1}{جتا\theta جا\theta} + جا\theta\, جتا\theta \times \frac{1}{جتا\theta جا\theta} - 1$

$\frac{1}{جا\theta جتا\theta} + \frac{1}{جا\theta} + \frac{1}{جتا\theta} + 1 - 1 = \frac{1 + جتا\theta + جا\theta}{جا\theta\, جتا\theta} = \frac{1 + جا\theta + جتا\theta}{جا\theta\, جتا\theta}$

20

(أ) $\text{قتا}\theta - \text{جا}\theta \equiv \text{جتا}\theta \text{ ظا}\theta$

الحل

الطرف الايمن :- $\frac{1}{\text{جا}\theta} - \text{جا}\theta = \frac{1 - \text{جا}^2\theta}{\text{جا}\theta} = \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}\theta} = \text{جتا}\theta \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$

$\text{ظا}\theta \text{ جتا}\theta = \text{جتا}\theta \text{ ظا}\theta$ ∴ الطرف الايسر ≡

∴ الطرفان ≡ متكافئان ≡

أو

الطرف الايسر :- $\text{جتا}\theta \times \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} = \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}\theta} = \frac{1 - \text{جا}^2\theta}{\text{جا}\theta} = \frac{1}{\text{جا}\theta} - \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جا}\theta}$

$\text{قتا}\theta - \text{جا}\theta = \frac{1}{\text{جا}\theta} - \text{جا}\theta$ ∴ الطرف الايمن ≡

∴ الطرفان ≡ متكافئان ≡

حل آخر :-

الطرف الايمن :- $\text{قتا}\theta - \frac{1}{\text{قتا}\theta} = \frac{\text{قتا}^2\theta - 1}{\text{قتا}\theta} = \frac{\text{ظا}^2\theta}{\text{قتا}\theta}$

$= \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}\theta} = \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta} \text{ جا}\theta = \text{جا}\theta \text{ ظا}^2\theta = \frac{1}{\text{قتا}\theta} \times \text{ظا}^2\theta$

$\frac{\text{جتا}\theta \text{ جتا}\theta}{\text{جا}\theta} = \text{جتا}\theta \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$

= جتاθ ظاθ ∴ الطرف الايسر ≡

[21] ح) $(\text{جا}\theta + \text{ظا}\theta)^2 + (\text{جتا}\theta + \text{ظتا}\theta)^2 - (\text{قا}\theta + \text{قتا}\theta)^2 = 5$

الحل

الطرف الأيمن :-

$$\text{جا}^2\theta + 2\,\text{جا}\theta\,\text{ظا}\theta + \text{ظا}^2\theta \oplus \text{جتا}^2\theta + 2\,\text{جتا}\theta\,\text{قا}\theta + \text{قا}^2\theta \ominus (\text{ظا}^2\theta +$$

$$2\,\text{ظا}\theta\,\text{ظتا}\theta + \text{ظتا}^2\theta) = 5$$

$$\text{جا}^2\theta + 2\,\text{جا}\theta \times \frac{1}{\text{جا}\theta} + \text{ظا}^2\theta \oplus \text{جتا}^2\theta + 2\,\text{جتا}\theta \times \frac{1}{\text{جتا}\theta} + \text{قا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta$$

$$\ominus 2\,\text{ظا}\theta \times \frac{1}{\text{ظا}\theta} - \text{ظتا}^2\theta = 5$$

$$\text{جا}^2\theta + 2 + \text{ظا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta + 2 + \text{قا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta - 2 - \text{ظتا}^2\theta = 5$$

$$5 = 2 - 2 + 2 \oplus \underbrace{\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}_{1} \oplus \underbrace{\text{ظا}^2\theta - \text{قا}^2\theta}_{1} \oplus \underbrace{\text{قتا}^2\theta - \text{ظتا}^2\theta}_{1}$$

$$5 = 2 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 5$$

∴ الطرفان متساويان

$1 = \text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta$

$1 = \text{قا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta \Leftarrow \text{قا}^2\theta = \text{ظا}^2\theta + 1$

$1 = \text{قتا}^2\theta - \text{ظتا}^2\theta \Leftarrow \text{قتا}^2\theta = \text{ظتا}^2\theta + 1$

تمرين 3-ج

22

(1) أوجد قيم س لكل من المعادلات الآتية حيث $0° \leq س \leq 360°$.

(أ) $جا^2 س = جتا^2 س \leftarrow جا^2 س = \frac{1}{جا^2 س} \leftarrow جا^2 س = 1 \leftarrow جا^2 س - 1 = 0$

$(جا س - 1)(جا س + 1) = 0$

$جا س = 1$ ، $جا س + 1 = 0 \leftarrow جا س = -1$

$س = جا^{-1}(1) = 90°$ ، $س = جا^{-1}(-1) = 270°$

أو

$جا^2 س = 1$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$جا س = \pm 1 \leftarrow س = جا^{-1}(1) = 90°$ ، $س = جا^{-1}(-1) = 270°$

أو

$جا^2 س - 1 = 0 \leftarrow جتا^2 س = 0$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$جتا س = 0 \leftarrow س = جتا^{-1}(0) = 90°$ ، $270°$

(ب) $2 جا س جتا س = جا س$

$2 جا س جتا س - جا س = 0$

$جا س (2 جتا س - 1) = 0 \leftarrow جا س = 0$ أو $2 جتا س - 1 = 0 \leftarrow 2 جتا س = 1$

$س = جا^{-1}(0) = 0°$ أو $180°$ أو $360°$

$\therefore$ جتا موجبة في الربع الأول والرابع

$جتا س = جتا^{-1}(\frac{1}{2}) = 60°$

الرابع أيضاً $\leftarrow س = 360° - 60° = 300°$

$\therefore س = \{0°, 60°, 180°, 300°, 360°\}$

[23]

ج) $2جتا^2 ى - 3جتا ى + 1 = 0$

نستخدم فكرة التحليل الخاصة بالمقدار الثلاثي الحدود =

$(2جتا ى - 1)(جتا ى - 1) = 0$

- $2جتا ى - 1 = 0 \leftarrow 2جتا ى = 1 \leftarrow جتا ى = \frac{1}{2} \leftarrow ى = جتا^{-1}(\frac{1}{2}) = 60°$

∵ جتا موجبة في الربع الرابع أيضاً $\leftarrow ى = 360° - 60° = 300°$

- $جتا ى - 1 = 0 \leftarrow جتا ى = 1 \leftarrow ى = جتا^{-1}(1) = 0°, 360°$

زوايا ربعية =

$\therefore ى = \{0°, 60°, 300°, 360°\}$

د) $2جتا^2 ى - 2جتا ى + جا^2 ى = 0$

∵ $جا^2 ى + جتا^2 ى = 1 \leftarrow جا^2 ى = 1 - جتا^2 ى$

$2جتا^2 ى - 2جتا ى + 1 - جتا^2 ى = 0$

$(جتا^2 ى - 2جتا ى + 1) = 0$

$(جتا ى - 1)(جتا ى - 1) = 0$

$جتا ى - 1 = 0 \leftarrow جتا ى = 1 \leftarrow ى = جتا^{-1}(1) = 0°, 360°$

$\therefore ى = \{0°, 360°\}$

24

② $\text{ظا}^2 س - 1 = \text{ظا} س$

من المتطابقة $(\text{ظا}^2 س - 1 = \text{ظا}^2 س)$

$\text{ظا}^2 س = \text{ظا} س \leftarrow \text{ظا}^2 س - \text{ظا} س = 0 \leftarrow \text{ظا} س (\text{ظا} س - 1) = 0$

$\text{ظا} س = 0 \leftarrow س = \text{ظا}^{-1}(0) = 0°, 180°, 360°$ زوايا خاصة

$\text{ظا} س - 1 = 0 \leftarrow \text{ظا} س = 1 \leftarrow س = \text{ظا}^{-1}(1) = 45°$

∵ ظا موجبة في الربع الثالث أيضاً

∴ $س = 180° + 45° = 225°$

$$\therefore س = \{0, 45°, 180°, 225°, 360°\}$$

---

③ $\text{جا} س \text{ظا} س + 1 = 2 \text{ظا} س$

$$\text{جا} س \frac{1}{\text{جتا} س} + 1 = 2 \text{ظا} س \leftarrow \frac{\text{جا} س}{\text{جتا} س} + 1 - 2 \text{ظا} س = 0 \leftarrow$$

$\text{ظا} س + 1 - 2 \text{ظا} س = 0 \leftarrow - \text{ظا} س + 1 = 0 \leftarrow \text{ظا} س - 1 = 0$

$\text{ظا} س = 1 \leftarrow س = \text{ظا}^{-1}(1) = 45°$

∵ ظا موجبة في الربع الثالث أيضاً ∴ $س = 180° + 45° = 225°$

$$\therefore س = \{45°, 225°\}$$

② أوجد ى في كل من المعادلات الآتية

(أ) $6جا^2ى - 5جاى + 1 = 0$ حيث $0° \leq ى \leq 180°$

الحل

$(3جاى - 1)(2جاى - 1) = 0$

$3جاى - 1 = 0 \leftarrow 3جاى = 1 \leftarrow جاى = \frac{1}{3} \leftarrow ى = جا^{-1}(\frac{1}{3})$

$\therefore ى = 19.5°$

∵ جا موجبة في الربع الثاني أيضاً $\leftarrow$ ∴ $ى = 180° - 19.5° = 160.5°$

$2جاى - 1 = 0 \leftarrow 2جاى = 1 \leftarrow جاى = \frac{1}{2} \leftarrow ى = جا^{-1}(\frac{1}{2}) = 30°$

∵ جا موجبة في الربع الثاني أيضاً $\leftarrow$ ∴ $ى = 180° - 30° = 150°$

∴ $ى = \{19.5°, 30°, 150°, 160.5°\}$

(ب) $3جاى + 3جتاى = \frac{1}{جتاى - جاى}$ حيث $0° \leq ى \leq 360°$

الحل

$3جاى + 3جتاى - \frac{1}{جتاى - جاى} = 0$

$\frac{(3جاى + 3جتاى)(جتاى - جاى) - 1}{جتاى - جاى} = 0$

$\frac{3جاى جتاى - 3جا^2ى + 3جتا^2ى - 3جتاى جاى - 1}{جتاى - جاى} = 0$

29

$$\frac{-3\,جا^2 ا + 3\,جتا^2 ا - 1}{جتا ا - جا ا} = 0$$

$جا^2 ا + جتا^2 ا = 1$

$$\frac{-3\,جا^2 ا + 3\,جتا^2 ا - (جا^2 ا + جتا^2 ا)}{جتا ا - جا ا} = 0$$

يوجد طريقة أخرى لتبسيط هذا المقدار وهو اختصار $جتا ا - جا ا$ (وهو العكس بينهما) وذلك بضرب البسط والمقام في $جتا ا + جا ا$

$$\frac{-3\,جا^2 ا + 3\,جتا^2 ا - جا^2 ا - جتا^2 ا}{جتا ا - جا ا} = 0$$

$$\frac{-4\,جا^2 ا + 2\,جتا^2 ا}{جتا ا - جا ا} = 0$$ بضرب الطرفين في المقام ⇐

$-4\,جا^2 ا + 2\,جتا^2 ا = 0 \leftarrow 4\,جا^2 ا = 2\,جتا^2 ا \leftarrow جتا^2 ا = 2\,جا^2 ا$

$\frac{جتا^2 ا}{جا^2 ا} = 2 \leftarrow جتا^2 ا = 2 \leftarrow$ بالجذر $جتا ا = \sqrt{2} \leftarrow ظا ا = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$ظا ا = \frac{\sqrt{2}}{2} \leftarrow ا = ظا^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 35.3°$

(ظا) موجبة في الربع الاول والثالث ، (ظا) سالبة في الربع الثاني والرابع

$\therefore ا = 35.3°$ في الربع الاول ، $ا = 180 - 35.3 = 144.7°$ في الربع الثاني

$ا = 180 + 35.3 = 215.3°$ في الربع الثالث

$ا = 360 - 35.3 = 324.7°$ في الربع الرابع

$\therefore ا = \{35.3°, 144.7°, 215.3°, 324.7°\}$

27

ج) $2\text{ظتا}^2\theta - 5\text{ظتا}\theta + 2 = 0$ حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل

$(2\text{ظتا}\theta - 1)(\text{ظتا}\theta - 2) = 0$

- $2\text{ظتا}\theta - 1 = 0 \leftarrow 2\text{ظتا}\theta = 1 \leftarrow \text{ظتا}\theta = \frac{1}{2} \leftarrow$

$\frac{1}{\text{ظا}\theta} = \frac{1}{2} \leftarrow \text{ظا}\theta = 2 \leftarrow \theta = \text{ظا}^{-1}(2) = 63.4^\circ$

ظا موجبة في الربع الثالث أيضاً $\leftarrow \theta = 180^\circ + 63.4^\circ = 243.4^\circ$

- $\text{ظتا}\theta - 2 = 0 \leftarrow \text{ظتا}\theta = 2 \leftarrow \frac{1}{\text{ظا}\theta} = 2 \leftarrow$

$\text{ظا}\theta = \frac{1}{2} \leftarrow \theta = \text{ظا}^{-1}(\frac{1}{2}) = 26.6^\circ$

ظا موجبة أيضاً في الربع الثالث $\leftarrow \theta = 180^\circ + 26.6^\circ = 206.6^\circ$

$\therefore \theta = \{243.4^\circ, 206.6^\circ, 63.4^\circ, 26.6^\circ\}$

د) $\text{جتا}^2\theta - 3\text{جا}\theta + 3 = 0$ حيث $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

الحل

نعوض عن قيمة $\text{جا}^2\theta$ بـ $(1 - \text{جتا}^2\theta)$ حيث $(\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1)$

لجعل المعادلة في مجهول واحد فقط وأيضاً يمكن التعويض بالعكس

$\text{جتا}^2\theta = 1 - \text{جا}^2\theta$

$\text{جتا}^2\theta - 3(1 - \text{جتا}^2\theta) + 3 = 0$

$\text{جتا}^2\theta - 3 + 3\text{جتا}^2\theta + 3 = 0$

[28] $4\,\text{جتا}^2\theta = 0 \leftarrow \text{جتا}^2\theta = 0 \leftarrow \text{جتا}\theta = 0 \leftarrow$

$\therefore \theta = \text{جتا}^{-1}(0) = 90^\circ, 270^\circ \leftarrow \theta = \{90^\circ, 270^\circ\}$

(و) $3\,\text{جا}\theta + 2 = \text{جتا}\theta$ حيث $0^\circ < \theta < 180^\circ$

الحل

$3\,\text{جا}\theta + 2 \times \frac{1}{\text{جا}\theta} \leftarrow 3\,\text{جا}^2\theta + 2\,\text{جا}\theta = 1 \leftarrow$

$3\,\text{جا}^2\theta + 2\,\text{جا}\theta - 1 = 0 \leftarrow (3\,\text{جا}\theta - 1)(\text{جا}\theta + 1) = 0$

$3\,\text{جا}\theta - 1 = 0 \leftarrow 3\,\text{جا}\theta = 1 \leftarrow \text{جا}\theta = \frac{1}{3} \leftarrow \theta = \text{جا}^{-1}(\frac{1}{3})$

$\therefore \theta = 19.5^\circ$ ، جا موجبة أيضاً في الربع الثاني $\leftarrow \theta = 180 - 19.5 = 160.5^\circ$

$\text{جا}\theta + 1 = 0 \leftarrow \text{جا}\theta = -1 \leftarrow \theta = \text{جا}^{-1}(-1) = 270^\circ$

مرفوضة لأنه يخالف $0^\circ < \theta < 180^\circ$

$\therefore \theta = \{19.5^\circ, 160.5^\circ\}$

(ز) $\text{جا}^2(\theta + 15) = 0.6$ حيث $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

الحل

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$\text{جا}(\theta + 15) = \pm\sqrt{0.6} \leftarrow (\theta + 15) = 50.8^\circ$

$\therefore$ توجد جا في الأرباع الأربعة -

29

$\theta = 35.8^\circ$ ← $\theta = 15^\circ - 50.8^\circ =$ ← $50.8^\circ = (15 + \theta)^\circ$.

في الربع الأول =

$\theta = 114.2^\circ$ ← $129.2^\circ = (15 + \theta)^\circ$ ← $50.8^\circ - 180^\circ = (15 + \theta)^\circ$.

في الربع الثاني =

$(15 + \theta)^\circ = 180^\circ + 50.8^\circ = 230.8^\circ$ ← $(15 + \theta)^\circ = 230.8^\circ$.

في الربع الثالث = $\theta = 215.8^\circ$

$(15 + \theta)^\circ = 360^\circ - 50.8^\circ$ ← $(15 + \theta)^\circ = 309.2^\circ$ ←

في الربع الرابع = $\theta = 294.2^\circ$

$\therefore \theta = \{35.8^\circ, 114.2^\circ, 215.8^\circ, 294.2^\circ\}$

(j) جتا $(2\theta + 10) = 0.2$ حيث $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$

الحل

نأخذ الجذر التربيعي للطرفين

جتا $(2\theta + 10) = \pm \sqrt{0.2}$ ← جتا $(2\theta + 10) = 63.4^\circ$

∴ توجد جتا في الأرباع الأربعة =

في الربع الأول $(2\theta + 10)^\circ = 63.4^\circ$ ← $2\theta = 53.4^\circ$

في الربع الثاني $(2\theta + 10)^\circ = 180^\circ - 63.4^\circ$ ← $2\theta + 10 = 116.6^\circ$ ← $2\theta = 106.6^\circ$

في الربع الثالث $(2\theta + 10)^\circ = 180^\circ + 63.4^\circ$ ← $2\theta + 10 = 243.4^\circ$ ← $2\theta = 233.4^\circ$

في الربع الرابع $(2\theta + 10)^\circ = 360^\circ - 63.4^\circ$ ← $296.6^\circ = 2\theta + 10$ ← $2\theta = 286.6^\circ$

= جميعها قيم θ في الدورة الأولى

B9 ربع أول ← $\theta = 413.4^\circ = 512 \leftarrow 423.4 = 63.4 + 360 = (10 + 512)^\circ$

ربع ثاني ← $\theta = 466.6^\circ = 512 \leftarrow 476.6 = 63.4 - 90 = (10 + 512)^\circ$

ربع ثالث ← $\theta = 593.4^\circ = 512 \leftarrow 603.4 = 63.4 + 540 = (10 + 512)^\circ$

ربع رابع ← $\theta = 646.6^\circ = 512 \leftarrow 656.6 = 63.4 - 720 = (10 + 512)^\circ$

← جميعها تم 512 في الدورة الثانية ←

$\therefore S = \{ 323.3^\circ, 296.7^\circ, 233.3^\circ, 206.7^\circ, 143.3^\circ, 116.7^\circ, 53.3^\circ, 26.7^\circ \}$

تمرين ٤-و

[٣١]

(1) إذا كان $2جا^2\theta - جتا^2\theta = 1$ فأثبت أن $جا^2\theta = 2جتا^2\theta$ ، ومن ثم أوجد قيم $ظا\theta$ الممكنة .

الحل

$2جا^2\theta - جتا^2\theta = 1 \leftarrow 2جا^2\theta = 1 + جتا^2\theta \leftarrow 2جا^2\theta = جا^2\theta + جتا^2\theta + جتا^2\theta$

$\leftarrow 2جتا^2\theta = جا^2\theta - 2جا\theta \leftarrow 2جتا^2\theta + 2جا\theta = جا^2\theta$

$\therefore جا\theta = 2جتا\theta$ بقسمة الطرفين على $جتا\theta$.

$\frac{جا\theta}{جتا\theta} = 2 \leftarrow ظا\theta = 2$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين .

$\therefore ظا\theta = \pm\sqrt{2}$

---

(2) إذا كان $3جتا\theta + ظا^2\theta = 5$ فأوجد القيم الممكنة لكل من :-

(أ) $ظا\theta$ (ب) $جا\theta$ (ج) $جتا\theta$

الحل

(أ) $ظا\theta$

$3 + ظا^2\theta(1 + ظا^2\theta) = 5 \leftarrow 3 + 3ظا^2\theta + ظا^4\theta = 5$

$ظا^4\theta + 3ظا^2\theta = 5 \leftarrow ظا^4\theta + 3ظا^2\theta - 5 = 0 \leftarrow (ظا^2\theta + 5)(ظا^2\theta - 1) = 0$

$ظا^2\theta = 1 \leftarrow ظا\theta = \pm 1$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين .

$ظا\theta = \pm 1$

[32]

(ب) $\text{جتا}\theta$

$\text{جتا}^2\theta + \text{ظا}^2\theta = 1 \leftarrow 5 = 1 - \text{ظا}^2\theta \leftarrow 6 = \text{ظا}^2\theta 4$

$\text{ظا}\theta = \frac{6}{4} \leftarrow \frac{1}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{6}{4} \leftarrow \text{جتا}^2\theta = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\therefore \text{جتا}\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \leftarrow \text{جتا}\theta = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

(ج) $\text{جا}\theta$

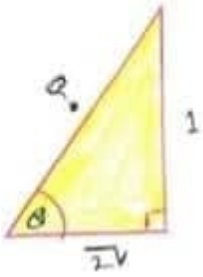
$5 = \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} + \left(\frac{1}{\text{جتا}^2\theta}\right)3 \leftarrow 5 = \frac{\text{جا}^2\theta + 3}{\text{جتا}^2\theta}$

$3 + \text{جا}^2\theta = 5\,\text{جتا}^2\theta \leftarrow 3 + \text{جا}^2\theta = 5(1 - \text{جا}^2\theta)$

$3\,\text{جا}^2\theta = 5 - 5\,\text{جا}^2\theta \leftarrow 6\,\text{جا}^2\theta = 2 \leftarrow \text{جا}^2\theta = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore \text{جا}\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \leftarrow \text{جا}\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

• طريقة أخرى لاستنتاج القيمة ① ، ② عن طريق مثلث فيثاغورس وشرط أخذ القيمة الموجبة لـ θ الواقعة في المربع Δ وإيجاد قيمة الوتر :-



$\because \text{جا}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ الوتر $= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$

$\therefore \text{جتا}\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \text{جا}\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

ملاحظة :- $\pm$ لكل من جتا، جا لأنه لها المستخدم $\pm$

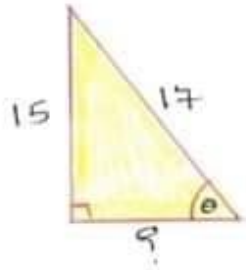
33

(3) أوجد بدون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة . قيم كل من

(أ) ظاθ ، جتاθ ، إذا كان جاθ = $\frac{15}{17}$ ، θ زاوية منفرجة .

(ب) ظتاθ ، قاθ ، إذا كان ظاθ = $\frac{29}{20}$ ، θ زاوية منعكسة .

الحل



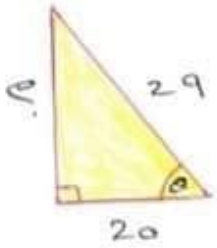
(أ) بأستخدام نظرية فيثاغورس

المجاور = $\sqrt{(17)^2 - (15)^2}$ = 8

∵ θ زاوية منفرجة ∴ ظاθ ، جتاθ في الربع الثاني جاθ تقع في الربع الثاني

ظاθ = $\frac{15}{8}$ ، جتاθ = $-\frac{8}{17}$

(ب) ∵ قاθ = $\frac{1}{\text{جتاθ}}$ ← $\frac{20}{29}$ = جتاθ ∴



المقابل = $\sqrt{(29)^2 - (20)^2}$ = 21

∵ θ زاوية منعكسة ∴ جاθ سالبة ، ظتاθ سالبة

تقع في الربع الرابع فقط

∴ جاθ = $-\frac{21}{29}$ ، ظتاθ = $\frac{1}{\text{ظاθ}} = \frac{1}{-\frac{21}{20}} = -\frac{20}{21}$

B4

④ أثبت صحة المتطابقات الآتية :-

④ (أ) $\text{قا}\theta\ \text{ظا}\theta + \text{قتا}\theta \equiv \text{قا}\theta\ \text{قتا}\theta$

الحل

• الطرف الأيمن :- $\text{قا}\theta\ \text{ظا}\theta + \text{قتا}\theta \leftarrow \frac{1}{\text{جا}\theta} + \frac{\text{جا}\theta\ \text{قا}\theta\ \text{ظا}\theta + 1}{\text{جا}\theta}$

$\leftarrow \frac{1 + \text{جا}\theta\ \text{ظا}\theta\ (\frac{1}{\text{جتا}\theta})}{\text{جا}\theta} = \frac{1 + \text{ظا}\theta\ (\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta})}{\text{جا}\theta} = \frac{1 + \text{ظا}^2\theta}{\text{جا}\theta}$

$= \frac{\text{قا}^2\theta}{\text{جا}\theta} = \text{قا}^2\theta\ \frac{1}{\text{جا}\theta} =$ **$\text{قا}^2\theta\ \text{قتا}\theta$** = الطرف الأيسر

• الطرف الأيسر :- $(\text{ظا}^2\theta + 1)\ \text{قتا}\theta \leftarrow \text{قتا}\theta + \text{قتا}\theta\ \text{ظا}^2\theta \leftarrow$

$\text{قتا}\theta + \frac{1}{\text{جا}\theta} \cdot \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} + \text{قتا}\theta = \text{ظا}\theta + \text{قتا}\theta$

$\text{ظا}\theta\ \text{قا}\theta + \text{قتا}\theta =$ **$\text{قا}\theta\ \text{ظا}\theta + \text{قتا}\theta$** = الطرف الأيمن

∴ الطرفان متكافئان في الحالتان

35

(ب) $\text{ظتا}^2\theta\,\text{قا}^2\theta = \text{ظتا}^2\theta + \text{قا}^2\theta$

الحل

• الطرف الأيمن :- $\text{ظتا}^2\theta\,(1 + \text{ظا}^2\theta) = \text{ظتا}^2\theta + \text{ظتا}^2\theta\,\text{ظا}^2\theta$

$$\text{ظتا}^2\theta + \text{ظتا}^2\theta \cdot \frac{1}{\text{ظا}^2\theta} = \text{ظتا}^2\theta + \frac{1}{\frac{\text{ظا}^2\theta}{\text{ظتا}^2\theta}}$$

$$\text{ظتا}^2\theta + \frac{\text{ظتا}^2\theta}{\text{ظا}^2\theta} \leftarrow \boxed{\text{ظتا}^2\theta + \text{قا}^2\theta}$$ الطرف الأيسر

• الطرف الأيسر :- $\text{قتا}^2\theta + \frac{1}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{1 + \text{جتا}^2\theta\,\text{قتا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{1 + \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}}{\text{جتا}^2\theta}$

$$\text{قتا}^2\theta = \frac{1}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{1 + \text{ظتا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{1 + \left(\frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}\right)}{\text{جتا}^2\theta}$$

$\leftarrow \boxed{\text{قتا}^2\theta\,\text{قا}^2\theta}$ الطرف الأيمن

أو

$$\frac{\text{ظا}^2\theta + 1}{\text{جا}^2\theta} = \frac{\left(\frac{1}{\text{ظتا}^2\theta}\right)\text{جا}^2\theta + 1}{\text{جا}^2\theta} = \frac{\text{قا}^2\theta\,\text{جا}^2\theta + 1}{\text{جا}^2\theta} = \text{قا}^2\theta + \frac{1}{\text{جا}^2\theta}$$

$$\frac{\text{قا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta} = \text{قا}^2\theta \cdot \frac{1}{\text{جا}^2\theta} \leftarrow \text{قتا}^2\theta = \boxed{\text{ظتا}^2\theta\,\text{قا}^2\theta}$$ الطرف الأيمن

∴ الطرفان متكافئان في جميع الحالات

[36]

ج) $\frac{\text{جتا}^2\theta - 1}{1 - \text{ظا}^2\theta} = \text{جا}^2\theta - 1$

الحل

• الطرف الأيمن :-

$$\frac{\text{جتا}^2\theta - 1}{\text{ظا}^2\theta} = \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta} - \frac{1}{\text{جا}^2\theta} \leftarrow$$

$$\frac{\text{جتا}^2\theta}{\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}} - \frac{1}{\text{جا}^2\theta} = \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta} - \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta} \leftarrow$$

$$= \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta} = \frac{\text{جتا}^2\theta(1 - \text{جتا}^2\theta)}{\text{جا}^2\theta} = \frac{\text{جتا}^2\theta - \text{جتا}^4\theta}{\text{جا}^2\theta}$$

$= \text{جتا}^2\theta = 1 - \text{جا}^2\theta$ " الطرف الأيسر "

• الطرف الأيسر :- $1 - \frac{1}{\text{قتا}^2\theta} = \frac{\text{قتا}^2\theta - 1}{\text{قتا}^2\theta} = \frac{\text{ظا}^2\theta}{\text{قتا}^2\theta}$

$$\frac{\text{جا}^2\theta}{\frac{1}{\text{ظا}^2\theta}} = \frac{1}{\text{قتا}^2\theta \cdot \text{ظا}^2\theta} = \frac{1}{\text{قتا}^2\theta} \cdot \frac{1}{\text{ظا}^2\theta} = \frac{1}{\text{ظا}^2\theta} \cdot \text{جا}^2\theta$$

$\frac{1 - \text{جتا}^2\theta}{1 - \text{قا}^2\theta} = \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{ظا}^2\theta}$ " الطرف الأيمن "

∴ الطرفان متكافئان في الحالتين

37

(٢) $\sqrt{\text{قتا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta} + \sqrt{\text{قتا}^2\theta - \text{ظتا}^2\theta} \equiv 2$

الحل

$\because$ قا$^2\theta = 1 + $ ظا$^2\theta$ ، قتا$^2\theta = 1 + $ ظتا$^2\theta$

$\therefore \sqrt{1 + \text{ظا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta} + \sqrt{1 + \text{ظتا}^2\theta - \text{ظتا}^2\theta}$

$2 = \sqrt{1} + \sqrt{1}$

∴ الطرفان متكافئتان

---

(٣) $\text{قا}\theta - \text{جا}\theta \equiv \dfrac{\text{ظا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}{\text{قا}\theta + \text{جا}\theta}$

الحل

الطرف الأيمن :- $\dfrac{\text{قا}\theta - \text{جا}\theta}{1}$ ($\dfrac{\text{قا}\theta + \text{جا}\theta}{\text{قا}\theta + \text{جا}\theta}$) ← مرافق البسط

$$\frac{\text{قا}^2\theta - \text{جا}^2\theta}{\text{قا}\theta + \text{جا}\theta} = \frac{1 + \text{ظا}^2\theta - (1 - \text{جتا}^2\theta)}{\text{قا}\theta + \text{جا}\theta} = \frac{1 + \text{ظا}^2\theta - 1 + \text{جتا}^2\theta}{\text{قا}\theta + \text{جا}\theta}$$

$= \dfrac{\text{ظا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}{\text{قا}\theta + \text{جا}\theta}$ ∴ الطرف الأيسر

38

• الطرف الأيسر :- $\frac{\text{قتا}^2\theta - 1 + 1 - \text{جا}^2\theta}{\text{قا}\theta + \text{جا}\theta} = \frac{\text{قتا}^2\theta - \text{جا}^2\theta}{\text{قا}\theta + \text{جا}\theta}$

$= \frac{(\text{قا}\theta - \text{جا}\theta)(\text{قا}\theta + \text{جا}\theta)}{\text{قا}\theta + \text{جا}\theta}$ = **قاθ - جاθ** الطرف الأيمن ~

∴ الطرفان متكافئان ~ في الحالتان

ج) $\frac{1 + \text{جا}\theta}{1 - \text{جا}\theta} \equiv (\text{قا}\theta + \text{ظا}\theta)^2$

الحل

• الطرف الأيمن :- $\frac{1 + \text{جا}\theta}{1 - \text{جا}\theta} \times \frac{1 + \text{جا}\theta}{1 + \text{جا}\theta} \leftarrow$

$\frac{(1 + \text{جا}\theta)^2}{1 - \text{جا}^2\theta} = \frac{1 + 2\text{جا}\theta + \text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{1}{\text{جتا}^2\theta} + \frac{2\text{جا}\theta}{\text{جتا}^2\theta} + \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}$

$\leftarrow \text{قتا}^2\theta + 2 \cdot \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} + \text{ظا}^2\theta = \text{قا}^2\theta + 2\text{ظا}\theta\text{قا}\theta + \text{ظا}^2\theta$

$(\text{قا}\theta + \text{ظا}\theta)^2$ الطرف الأيسر =

• الطرف الأيسر :- $\text{قا}^2\theta + 2\,\text{قا}\theta\,\text{ظا}\theta + \text{ظا}^2\theta$

$1 + \text{ظا}^2\theta + 2\,\text{قا}\theta\,\text{ظا}\theta + \text{ظا}^2\theta$

[59] $\frac{\theta جا}{\theta تا} \times \frac{1}{\theta جا} \times 2 + \frac{\theta^2 تا}{\theta^2 تا} 2 + 1 \leftarrow \theta جا \theta تا 2 + \theta^2 جا 2 + 1$

$$\leftarrow \quad \frac{\theta جا 2}{\theta^2 تا} + \frac{\theta^2 تا 2}{\theta^2 جا - 1} + 1$$

$$\frac{\theta جا 2}{\theta^2 جا - 1} + \frac{\theta^2 تا 2}{\theta^2 جا - 1} + 1$$

$$\frac{\theta جا 2 + \theta^2 جا + 1}{\theta^2 جا - 1} = \frac{\theta جا 2 + \theta^2 تا 2 + \theta^2 جا - 1}{\theta^2 جا - 1}$$

$$\frac{(\theta جا + 1)^2}{(\theta جا - 1)(\theta جا + 1)} = \boxed{\frac{\theta جا + 1}{\theta جا - 1}}$$ الطرف الأيمن

∴ الطرفان متكافئان في الحالتين

---

(5) (أ) أوجد قيمة :- ① $جا \frac{5}{3}\pi$ ② $تا(\frac{-3}{4}\pi)$

(ب) إذا كانت ى زاوية متفرجة، وأن جا ى = 0.91 فأوجد قيمة ظا ى

الحل

(أ) الزاوية بالتقدير الستيني = $\frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{5}{3}\pi = 300^\circ \leftarrow جا 300^\circ \leftarrow$

الزاوية تقع في الربع الرابع

∴ قيا الزاوية الأساسية = $(360^\circ - 300^\circ) = 60^\circ$

∴ $جا 300^\circ = -جا 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(أ) الزاوية بالتقدير الستيني $= -\frac{3}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -135^\circ$

جتا$(-\frac{3}{4}\pi)$ = جتا(-135°)

∵ إشارة الزاوية المعطاه سالبة

∴ تقع في الربع الثاني بدوران مع حركة عقارب الساعة (هو الربع الثالث بدوران ضد حركة عقارب الساعة)

∴ قياس الزاوية الأساسية $= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

∴ جتا(-135°) = $-$ جتا$45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(ب) جا س $= 0.91 \leftarrow$ س $=$ جا$^{-1}(0.91) = 65.5^\circ$

∵ س زاوية منفرجة ∴ تقع في الربع الثاني

و ظا موجبة

∴ س $= 180^\circ - 65.5^\circ = 114.5^\circ$

∴ ظا س = ظا 114.5° = ظا 572.5° = 0.637

(6) إذا كان د : ى ← أ + ب جا ى حيث ى بالراديان

د $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = 1 ، د $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ = 2 فأوجد قيمة كل من أ ، ب .

أحسب :- (أ) د $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ ، (ب) د (π ن) حيث ن عدد صحيح موجب

الحل

د (ى) = أ + ب جا ى

د $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = أ + ب جا $\frac{\pi}{2}$ = 1 ← أ + ب جا 90° = 1 ← أ + ب = 1

د $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ = أ + ب جا $\frac{\pi}{6}$ = 2 ← أ + ب جا 30° = 2 ← أ + $\frac{1}{2}$ ب = 2

بالطرح نشتج ← $\begin{cases} \text{(1)} \leftarrow 1 = \text{ب} + \text{أ} \\ \text{(2)} \leftarrow 2 = \frac{1}{2}\text{ب} + \text{أ} \end{cases}$ ← $\frac{1}{2}$ ب = −1 ← ب = −2

∴ ب = −2 ، أ − 2 = 1 ← أ = 3 ∴ د (ى) = 3 − 2 جا ى

(أ) د $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ = 3 − 2 جا $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ ←

3 − 2 جا 150° ← 3 − 2 ($\frac{1}{2}$) = 2

∴ د $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ = 2

(ب) د (π ن) = 3 − 2 جا (π ن) ←

3 − 2 جا π ← 3 − 2 جا 180° ←

3 − 2 (0) = 3

∴ د (π ن) = 3

(42) (7) أوجد جميع قياسات الزوايا بين 0° ، 360° التي تحقق المعادلات

(1) $\text{جا}\theta = -\text{جا}60^\circ$ ، (2) $\text{ظا}2\theta = 1$

الحل

(1) $\text{جا}\theta = -\text{جا}60^\circ \leftarrow \text{جا}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

∵ جا سالبة في الربع الثالث و الرابع

∴ $\theta = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$ ربع ثالث

∴ $\theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ ربع رابع

(2) $\text{ظا}2\theta = 1 \leftarrow 2\theta = \text{ظا}^{-1}(1) = 45^\circ$

∵ ظا سالبة في الربع الثاني و الرابع

∴ $2\theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ الدورة الأولى ربع ثاني

$2\theta = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$ الدورة الأولى ربع رابع

$2\theta = 540^\circ - 45^\circ = 495^\circ$ الدورة الثانية ربع ثاني

$2\theta = 720^\circ - 45^\circ = 675^\circ$ الدورة الثانية ربع رابع

∴ $\theta = \{\frac{135^\circ}{2}, \frac{315^\circ}{2}, \frac{495^\circ}{2}, \frac{675^\circ}{2}\}$

$\theta = \{67.5^\circ, 157.5^\circ, 247.5^\circ, 337.5^\circ\}$

⑧ أثبت صحة المتطابقة $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \sin^2\theta$

الحل

• الطرف الأيمن :- $(\sec^2\theta - 1) - \sin^2\theta \leftarrow \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 - \sin^2\theta \leftarrow$

$$\frac{(1-\cos^2\theta)-(\cos^2\theta\sin^2\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \sin^2\theta \tan^2\theta = \boxed{\tan^2\theta \sin^2\theta}$$ = الطرف الأيسر

• الطرف الأيسرة :- $\tan^2\theta (1-\cos^2\theta) \leftarrow \tan^2\theta - \tan^2\theta \cos^2\theta \leftarrow$

$$\tan^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^2\theta = \boxed{\tan^2\theta - \sin^2\theta}$$ = الطرف الأيمن

∴ الطرفان متكافئان في الحالتان

• أيضاً الطرف الأيمن :- $\sin^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \leftarrow \sin^2\theta\left(1 - \frac{1}{\cos^2\theta}\right) \leftarrow$

$\sin^2\theta(\sec^2\theta - 1) \longleftarrow \boxed{\sin^2\theta \tan^2\theta}$ = الطرف الأيسر

أرجوا التوفيق للجميع

[44]

⑨ أثبت المتطابقة $\frac{\text{ظا}^2\theta - \text{ظا}^2\phi}{\text{ظتا}^2\theta + \text{ظا}^2\phi} = \text{جتا}^2\phi - \text{جا}^2\phi$

الحل

• الطرف الأيمن :-

$$\frac{\frac{\text{جا}^2\phi}{\text{جتا}^2\phi} - \frac{\text{جتا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}}{\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} + \frac{\text{جتا}^2\phi}{\text{جا}^2\phi}} = \frac{\frac{\text{جا}^2\phi\,\text{جا}^2\theta - \text{جتا}^2\theta\,\text{جتا}^2\phi}{\text{جا}^2\theta\,\text{جتا}^2\phi}}{\frac{\text{جا}^2\theta\,\text{جا}^2\phi + \text{جتا}^2\theta\,\text{جتا}^2\phi}{\text{جا}^2\theta\,\text{جتا}^2\phi}}$$

$$= \frac{\text{جا}^2\phi\,\text{جا}^2\theta - \text{جتا}^2\theta\,\text{جتا}^2\phi}{\text{جا}^2\theta\,\text{جا}^2\phi + \text{جتا}^2\theta\,\text{جتا}^2\phi} = \frac{\text{جتا}^2\phi - \text{جا}^2\phi}{1} = \boxed{\text{جتا}^2\phi - \text{جا}^2\phi}$$ ← الطرف الأيسر

• الطرف الأيسر :-

$$\frac{1}{\text{ظا}^2\theta} - \frac{1}{\text{ظتا}^2\theta} = \frac{\text{ظتا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta}{\text{ظا}^2\theta\,\text{ظتا}^2\theta} \leftarrow$$

$$\leftarrow \frac{\text{ظا}^2\theta + 1 - \text{ظتا}^2\theta - 1}{1 + \text{ظتا}^2\theta + \text{ظا}^2\theta + \text{ظا}^2\theta\,\text{ظتا}^2\theta} = \frac{(\text{ظا}^2\theta + 1) - (\text{ظتا}^2\theta + 1)}{(1 + \text{ظا}^2\theta)(1 + \text{ظتا}^2\theta)}$$

$$= \frac{\text{ظتا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta}{2 + \text{ظتا}^2\theta + \text{ظا}^2\theta} = \frac{\text{ظتا}^2\theta - \text{ظا}^2\theta}{(\text{ظتا}\theta + \text{ظا}\theta)^2} = \frac{(\text{ظتا}\theta - \text{ظا}\theta)(\text{ظتا}\theta + \text{ظا}\theta)}{(\text{ظتا}\theta + \text{ظا}\theta)^2}$$

$$\boxed{\frac{\text{ظتا}\theta - \text{ظا}\theta}{\text{ظتا}\theta + \text{ظا}\theta}}$$ ← الطرف الأيمن

∴ الطرفان متكافئان في الحالتان

[45] أيضاً الطرف الأيمن :-

$$\frac{\text{ظا}\theta - \text{ظا}\alpha}{\text{ظا}\theta + \frac{1}{\text{ظا}\theta}} = \frac{\text{ظا}\theta - \text{ظا}\alpha}{\frac{\text{ظا}^2\theta + 1}{\text{ظا}\theta}} \rightarrow$$

$$= \frac{\text{ظا}\theta\,\text{ظا}\alpha\,(\text{ظا}\theta - \text{ظا}\alpha)}{\text{ظا}^2\theta + 1} = \frac{\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} - \frac{1}{\text{ظا}\alpha}}{\text{قا}^2\theta} = \frac{\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta} - 1}{\text{قا}^2\theta}$$

$$= \frac{\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}^2\theta}}{\text{قا}^2\theta} - \frac{1}{\text{قا}^2\theta} = \frac{\text{جا}\theta}{\text{قا}^2\theta\,\text{جتا}^2\theta} - \text{جتا}^2\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\frac{1}{\text{جتا}^2\theta}} - \text{جتا}^2\theta$$

$$= \text{جا}\theta\,\text{جتا}^2\theta - \text{جتا}^2\theta$$

، الطرف الأيسر .

---

(10) أوجد قياسات الزوايا بين 0° ، 360° التي تحقق المعادلات :-

(أ) ظا $(\theta + 20^\circ) = -0.8$ (ب) $2\,\text{جتا}^2\theta + 3\,\text{جا}\theta = 0$ (ج) ظا $\theta - 2\,\text{جا}\theta = 0$

الحل

(أ) ظا $(\theta + 20^\circ) = -0.8 \rightarrow \theta + 20^\circ = \text{ظا}^{-1}(0.8) = 38.7^\circ$

∵ ظا سالبة في الربع الثاني والرابع

$\therefore \theta + 20^\circ = 180^\circ - 38.7^\circ = 141.3^\circ \rightarrow \theta = 121.3^\circ$ ، ربع ثاني

$\theta + 20^\circ = 360^\circ - 38.7^\circ = 321.3^\circ \rightarrow \theta = 301.3^\circ$ ، ربع رابع

46

ب) $2(1 - \text{جا}^2 س) + 3 \text{جا} س = 0$

$2 - 2\text{جا}^2 س + 3 \text{جا} س = 0$

$-2\text{جا}^2 س + 3 \text{جا} س + 2 = 0$

$(2\text{جا} س + 1)(-\text{جا} س + 2) = 0$

$2\text{جا} س + 1 = 0 \longleftarrow 2\text{جا} س = -1 \longleftarrow \text{جا} س = -\frac{1}{2} \longleftarrow$

$س = \text{جا}^{-1}(\frac{1}{2}) = 30°$

∵ جا سالبة في الربع الثالث والرابع

∴ س = 180° + 30° = 210° ، ربع ثالث
س = 360° - 30° = 330° ، ربع رابع

ج) $-\text{جا} س + 2 = 0 \longleftarrow -\text{جا} س = -2 \longleftarrow \text{جا} س = 2 \longleftarrow س = \text{جا}^{-1}(2)$

س = قيمة تخيلية ← مرفوضة لانها خارج نطاق $0° \leq س \leq 360°$

ج) $\frac{\text{جا} ع}{\text{جتا} ع} - 2\text{جا} ع = 0 \longleftarrow \frac{\text{جا} ع - 2\text{جا} ع \text{جتا} ع}{\text{جتا} ع} = 0$ بضرب الطرفين في جتا ع

$\text{جا} ع - 2\text{جا} ع \text{جتا} ع \leftarrow \text{جا} ع (1 - 2\text{جتا} ع) = 0 \longleftarrow$

$\text{جا} ع = 0$ ، $1 - 2\text{جتا} ع = 0 \leftarrow 2\text{جتا} ع = 1 \leftarrow \text{جتا} ع = \frac{1}{2}$

$ع = \text{جا}^{-1}(0) = 0°$ ، $ع = \text{جتا}^{-1}(\frac{1}{2}) = 60°$

[47] ∵ (ما) قياسات منفرجة ∴ الزاوية ع ربعية «محورية»

∴ ع = (٥)°	ع = (١٨٠)°	ع = (٣٦٠)°

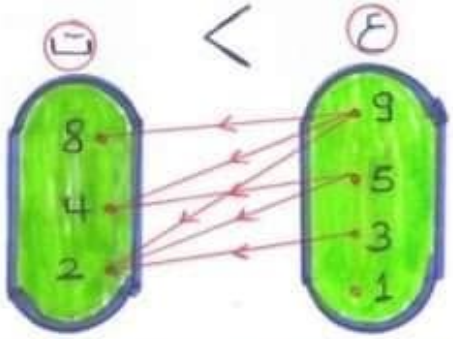
∵ (هنا) موجبة في الربع الأول والرابع

∴ ع = (٦٠)° في الربع الأول	ع = ٣٦٠ - ٦٠ = (٣٠٠)° في الربع الرابع

الباب الرابع: العلاقات والدوال والأشكال البيانية

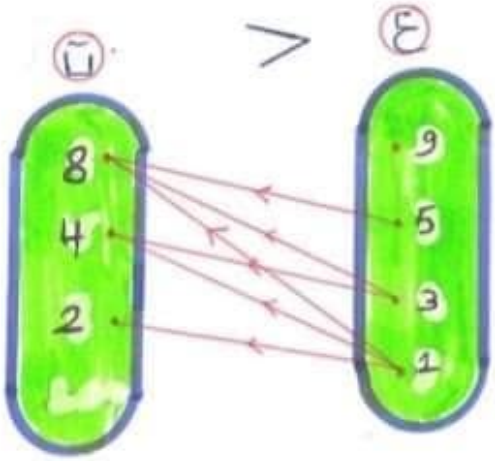
تمرين 4-2 ص 96

(1) مجموعتاه من الأعداد ع، ت موضحتاه في الشكل 4-2 أنقل وأكمل المخطط السهمي لتوضيح العلاقة "أكبر من" من المجموعة ع إلى المجموعة ت.

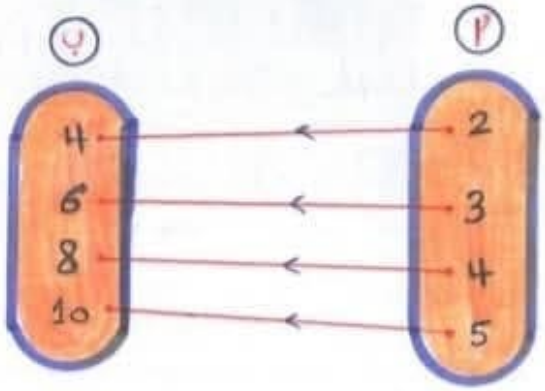


---

(2) بأستخدام نفس المجموعتين ت، ع في السؤال (1) أرسم المخطط السهمي يوضح العلاقة "أصغر من" من المجموعة ع إلى المجموعة ت.



2 (3) ما العلاقة من المجموعة أ إلى المجموعة ب الموضحة في الشكل التالي :-



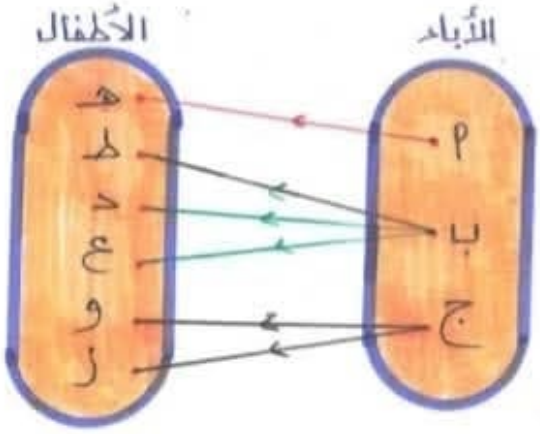
العلاقة هي أ نصف ب

$\frac{أ}{ب} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ← أ $\frac{1}{2}$ = ب

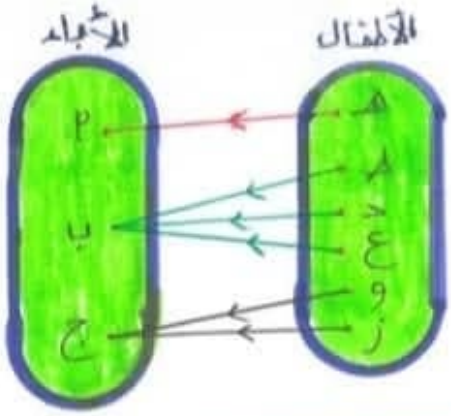
---

(4) أ والد هـ ، ب والد كل من د ، ع ، ج والد كل من و ، ز

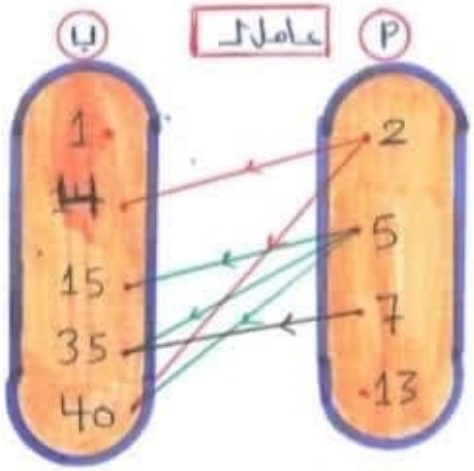
أنقل الشكل المعطى ثم أكمل المخطط السهمي لتوضيح العلاقة "والد" من الآباء إلى مجموعة الأطفال.



3 (5) باستخدام نفس المجموعتين في السؤال (4) أرسم المخطط لتوضيح العلاقة «ابن أو ابنة» من مجموعة الأطفال إلى مجموعة الآباء .



(6) أنشئ مخططاً سهمياً لتوضيح علاقة «عامل لـ» من المجموعة P = {2 ، 5 ، 7 ، 13} إلى المجموعة ب = {1 ، 4 ، 15 ، 35 ، 40} .

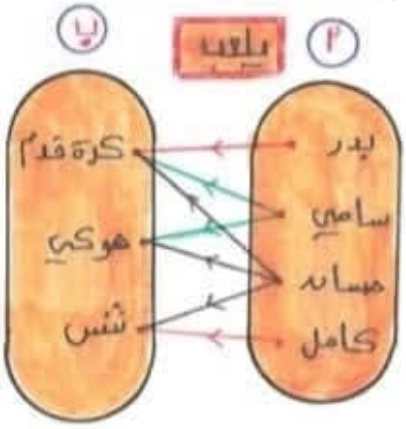


4 تمرين 4-ب ص 193

(1) يوضح الشكل المعطى العلاقة «يلعب» للمجموعتين الموضحتين.

(أ) عبر عن العلاقة كمجموعة من الأزواج المرتبة (استخدم الحروف الأولى المناسبة).

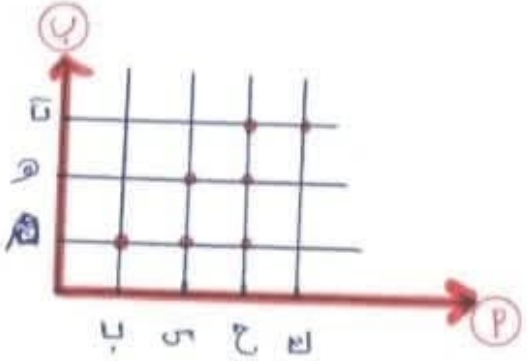
(ب) ارسم الشكل الديكارتي للعلاقة.



(أ)

{(ب، ق)، (س، ق)، (س، ه)، (ح، ق)، (ح، ه)، (ح، ن)، (ك، ن)}

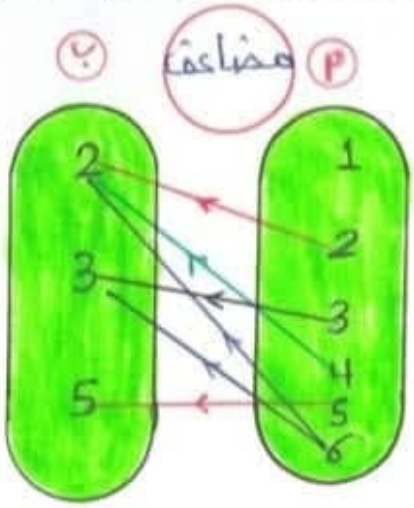
(ب)



5 ② $\{6, 5, 4, 3, 2, 1\} = P$

$\{5, 3, 2\} = B$

① وضح العلاقة "مضاعف" من P الى B بمخطط سهمي .



② أكتب العلاقة كمجموعة من الأزواج المرتبة .

$\{(5, 5), (3, 6), (2, 6), (2, 4), (3, 3), (2, 2)\}$

أرجوا التوفيق للجميع

6 (3) العلاقة بين مجموعتين معرفة بمجموعة أزواج مرتبة $\{(-1,2)(1,4)(3,6)(5,8)(7,10)\}$ اسرد عناصر المجموعتين وصف بكلمات العلاقة الممكنة بين المجموعة الأولى والمجموعة الثانية .

الحل

المجموعة الأولى = $\{-1, 1, 3, 5, 7\}$

المجموعة الثانية = $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

المجموعة الأولى أقل بـ 3 من المجموعة الثانية

---

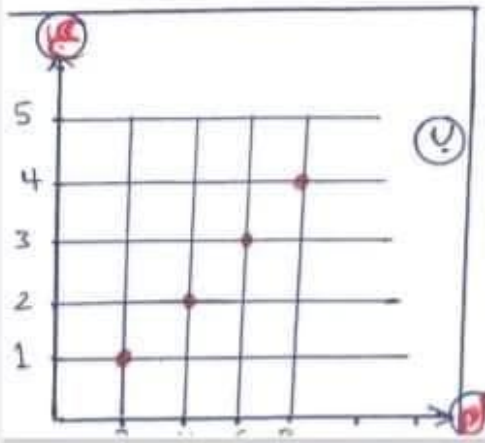
(4) س = $\{2,4,6,8\}$ ص = $\{1,2,3,4,5\}$

(أ) إذا كانت ل ⊆ س × ص من اسرد مجموعة الأزواج المرتبة في العلاقة "ل ضعف ع" .

(ب) وضح العلاقة بأستخدام شكل ديكارتي .

الحل

(أ) $\{(2,4)(3,6)(4,8)\}$



7 (5) إذا كانت أ = ب = {1، 2، 3، 6}

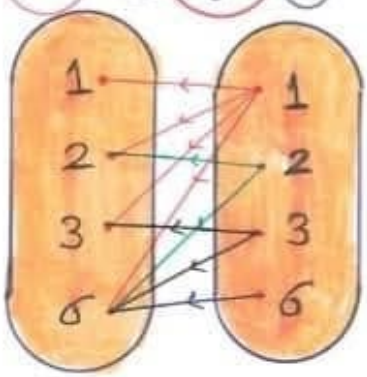
(أ) أنقل وأكمل الشكل المعطى للعلاقة "عامل لـ" من المجموعة أ إلى المجموعة ب .

(ب) عبر عن العلاقة كمجموعة من الأزواج المرتبة .

(ج) وضح العلاقة بشكل ديكارتي .

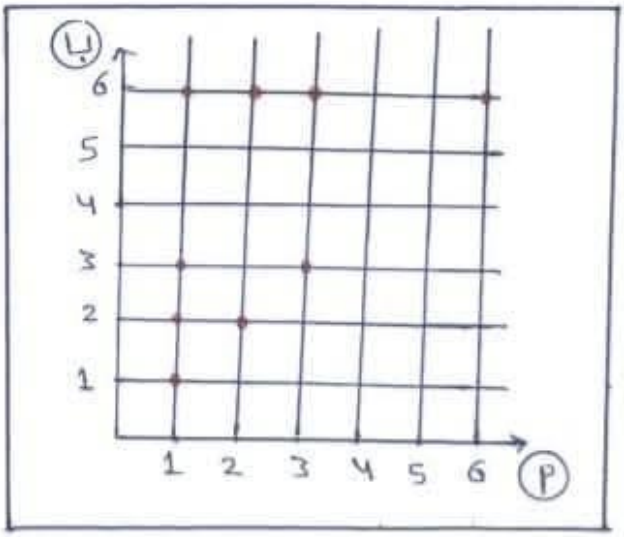
الحل

(أ) عامل لـ (ب)



(ب) {(1،1)، (2،1)، (3،1)، (6،1)، (2،2)، (6،2)، (3،3)، (6،3)، (6،6)}

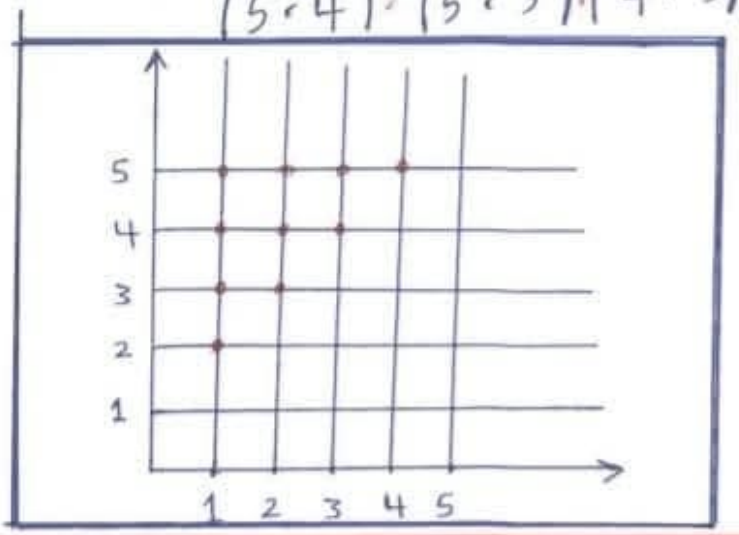
(ج)



8 (ه) اسرد مجموعة الأزواج المرتبة التي تصف العلاقة "أقل من" على المجموعة $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ثم ارسم الشكل الديكارتي للعلاقة.

الحل

$$\{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$$



---

(7) علاقة معرفة بالمجموعة $\{(1,4), (2,2), (4,1), (8,\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},8)\}$.

(أ) أسرد مجموعة العناصر الأولى للأزواج، مجموعة العناصر الثانية للأزواج. صف بكلمات علاقة ممكنة بين المجموعة الأولى و المجموعة الثانية.

(ب) أرسم الشكل الديكارتي للعلاقة ثم أرسم منحنى خفيف يمر بالنقط.

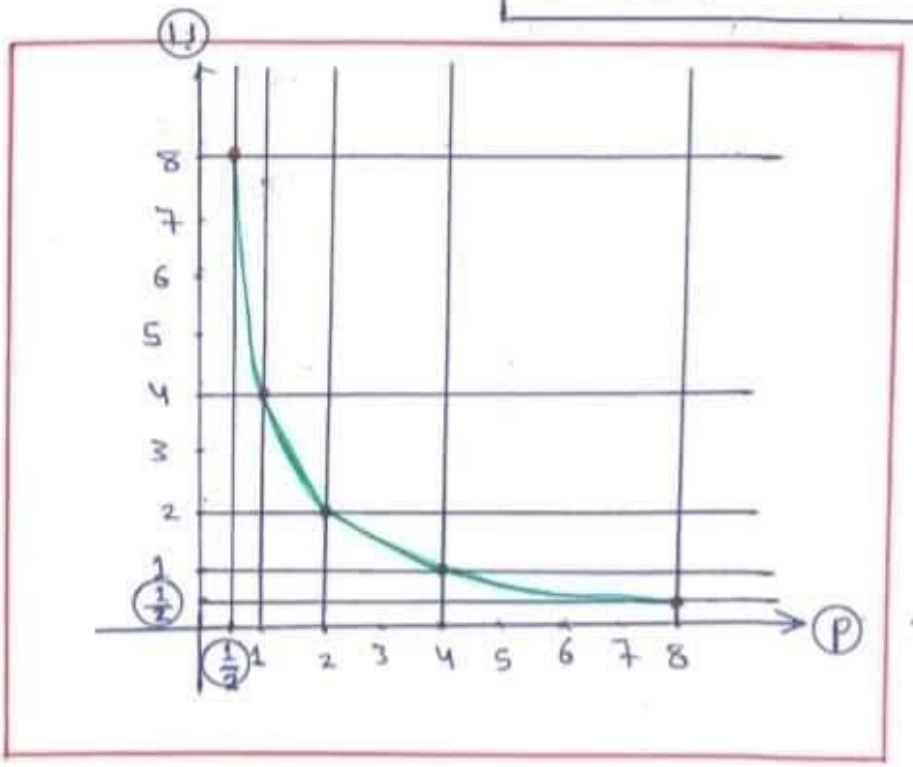
الحل

٩ (أ) المجموعة الأولى أ = $\{8، 4، 2، 1، \frac{1}{2}\}$

المجموعة الثانية ب = $\{\frac{1}{2}، 1، 2، 4، 8\}$

العلاقة هي $ص = ب \times أ$ = 4

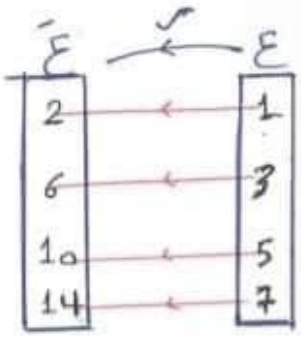
(ب)



١٥ تمرين ٤-٢ مراد

(1) إذا كانت ع المضعف = {1، 3، 5، 7} فأسرد عناصر عَ المجموعة التي رسمتها اليها ع تحت الراسم د .

الحل



عَ = {14 10 6 2}

عَ = ع 2

✓ عَ ≠ ع 2

---

(2) عملية د ترسم أي عدد س إلى العدد 2س + 1 . أوجد صورة كل من قيم س الآتية تحت الراسم د :-

أ) 1 ب) 2 ج) 0 د) -1

الحل

أ)

د(س) = 2س + 1
د(1) = 2(1) + 1
د(1) = 3

ب)

د(س) = 2س + 1
د(2) = 2(2) + 1
د(2) = 5

ج)

د(س) = 2س + 1
د(0) = 2(0) + 1
د(0) = 1

د)

د(س) = 2س + 1
د(-1) = 2(-1) + 1
د(-1) = -1

11 (3) إذا كان د: س ← 2س+3 فأوجد:

(أ) د(٥) (ب) د(1) (ج) د(-2) (د) د($\frac{1}{2}$)

الحل

(أ)

د(س) = 2س + 3
د(٥) = 2(٥) + 3
د(٥) = 3

(ب)

د(س) = 2س + 3
د(1) = 2(1) + 3
د(1) = 5

(ج)

د(س) = 2س + 3
د(-2) = 2(-2) + 3
د(-2) = -1

(د)

د(س) = 2س + 3
د($\frac{1}{2}$) = 2($\frac{1}{2}$) + 3
د($\frac{1}{2}$) = 4

---

(4) إذا كان د: س ← 3(س-1) فأوجد:-

(أ) د(1) (ب) د(3) (ج) د(-1) (د) د($\frac{1}{2}$)

الحل

(أ)

د(س) = 3 - 3س
د(1) = 3 - 3(1)
د(1) = ٥

(ب)

د(س) = 3 - 3س
د(3) = 3 - 3(3)
د(3) = -6

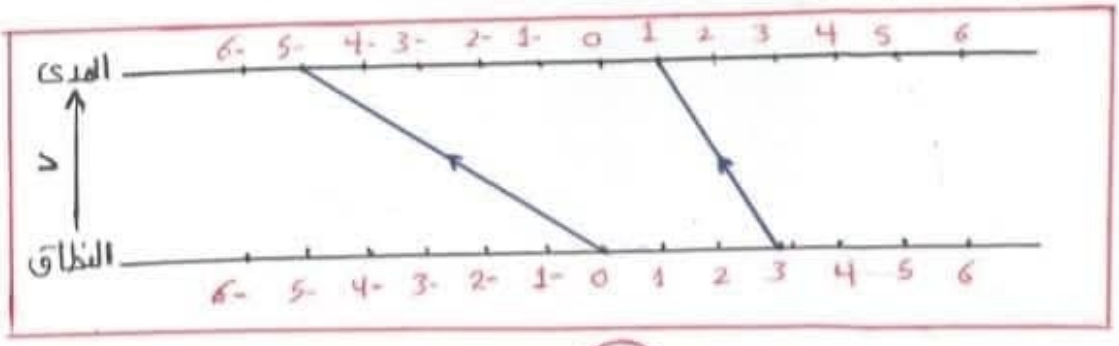
(ج)

د(س) = 3 - 3س
د(-1) = 3 - 3(-1)
د(-1) = -6

(د)

د(س) = 3 - 3س
د($\frac{1}{2}$) = 3 - 3($\frac{1}{2}$)
د($\frac{1}{2}$) = $\frac{3}{2}$

12 (5) المخطط السهمي في الشكل المقابل يمثل جزءاً من الشكل البياني للدالة الخطية د(س). حدد هذه الدالة. ثم أوجد د(1)، د(-4).



الحل

صورة الدالة الخطية: د(س) = أ س + ب

من الشكل البياني :-

د(3) = 1 ← أ + 3أ + ب = 1 ← ① أ + 3أ + ب = 1

د(0) = -5 ← أ(0)² + ب = -5 ← ② 0 + ب = -5

من المعادلة الثانية نستنتج قيمة ب = -5

① = ② ← أ + 3أ = 1 ← 3أ + 1 = 5 ← 3أ = 6

الدالة هي د(س) = 2س - 5

د(1) = 2(1) - 5 = 2 - 5 = -3

د(-4) = 2(-4) - 5 = -8 - 5 = -13

13 (6) ماصورة الأتي تحت الراسم س ← س² - 1 ؟

أ) 1 ب) 3 ج) 2- د) 1-

الحل

د(س) = س² - 1

أ) د(1) = 1² - 1 = 0

ب) د(3) = 3² - 1 = 8

ج) د(-2) = (-2)² - 1 = 3

د) د(-1) = (-1)² - 1 = 0

(7) إذا كانت د : س ← جاس° فأوجد :-

أ) د(30°) ب) د(45°) ج) د(90°) د) د(50°)

الحل

د(س) = جاس°

أ) د(30°) = 1/2

ب) د(45°) = 1/√2

ج) د(90°) = 1

د) د(50°) = 0.7760

(8) إذا كانت د : س ← جتا2س° فأوجد :-

أ) د(30°) ب) د(0°) ج) د(45°) د) د(10°)

الحل

د(س) = جتا2س°

أ) د(30°) = جتا60° = 1/2

ب) د(0°) = 1

ج) د(45°) = جتا90° = 0

د) د(10°) = 0.9397

14 (9) للدالة د(س) = س² - 3س + 5 فأوجد :-

(أ) د(٥) (ب) د(1) (ج) د(2) (د) د(-2)

الحل

(أ) د(٥) = 5	(ب) د(1) = 3	(ج) د(2) = 3	(د) د(-2) = 15

---

(10) إذا كانت د : س ← س³ - 4س² + 2س + 8. فأوجد صورة كل مما يأتي تحت الراسم د؟

(أ) ٥ (ب) 1 (ج) -1 (د) 2

الحل

ارجوا التوفيق للجميع

(أ) د(س) = س³ - 4س² + 2س + 8
د(٥) = 8

محمد الشعافي

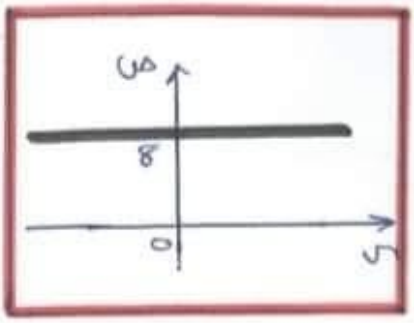
(ب) د(س) = س³ - 4س² + 2س + 8
د(1) = 7

(ج) د(س) = س³ - 4س² + 2س + 8
د(-1) = 1

(د) د(س) = س³ - 4س² + 2س + 8
د(2) = 4

15 تمرين 4-د صفحة 1

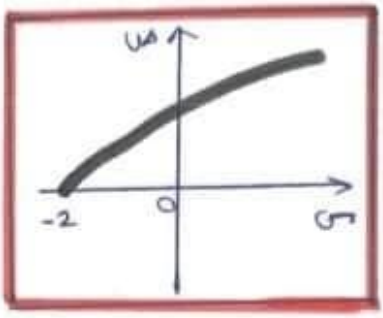
عين نطاق ومدى مما يأتي :-



(أ) د(س) = 8

النطاق = ح	المدى = {8}

(ب) ص = $\sqrt{2+س}$ ← $2+س \geq 0$ ← $س \geq -2$



النطاق = $[-2, \infty)$	المدى = $[0, \infty)$

(ج) ص = $\frac{5س}{1-2س}$

$1-2س \neq 0$ ← $2س \neq 1$ ← $س \neq \frac{1}{2}$

النطاق = ح - $\{\frac{1}{2}\}$

توجد الدالة العكسية للدالة المعطاه ونطاقها هو مدى الداله الأصلية

$س = \frac{5ص}{1-2ص}$ ← $س(1-2ص) = 5ص$ ← $س - 2سص = 5ص$

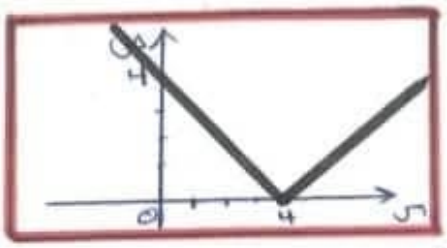
← $س = 5ص + 2سص$ ← $س = ص(5+2س)$

16 $ص = \frac{س}{5+2س^2}$ ، الدالة العكسية ←

$5+2س^2 \neq 0 \leftarrow 2س \neq -5 \leftarrow س \neq \frac{-5}{2} \leftarrow$ النطاق $= ح - \{\frac{-5}{2}\}$

$\therefore$ مدى الدالة الأصلية $= ح - \{\frac{-5}{2}\}$

① $ص = |س - 4|$



النطاق $= ح$	المدى $= [0, \infty)$

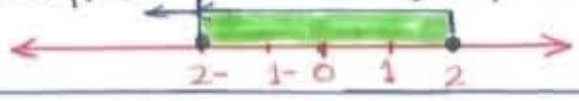
② $ص = \sqrt{4 - س^2}$

الطريقة الأولى للحل "التحليل"

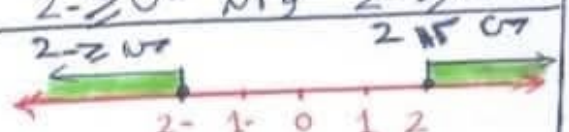
$4 - س^2 \geq 0$

$(2 - س)(2 + س) \geq 0$

الحالة الأولى نفرض أن	
$2 \geq س$ وأن $(2 + س)(2 - س) \geq 0$	
$-2 \leq س$ وأن $(2 + س)(2 - س) \geq 0$	
$2 \geq س$ وأن $(2 + س)(2 - س) \geq 0$	
$2 \geq س \geq -2$ وأن $(2 + س)(2 - س) \geq 0$	$س = [-2, 2]$



الحالة الثانية نفترض أنه $س \neq 2$ وأنه $س + 2 \geq 0$	
$س \neq -2$ وأنه $س + 2 < 0$	
$س < -2$ وأنه $س + 2 < 0$	$\phi = \{\} = س$



∴ مجموعة الحل هى $س = [-2، 2] \cup \{\} = [-2، 2]$

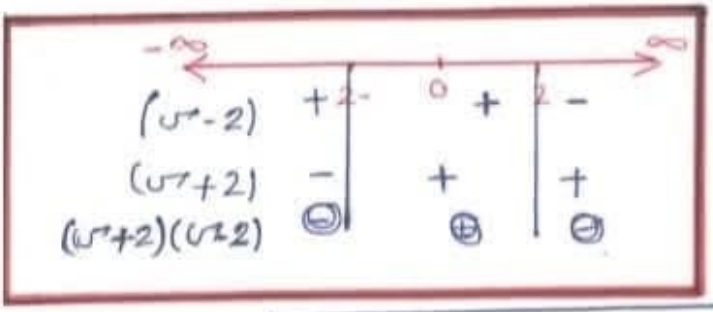
∴ نطاق الدالة هو $س = [-2، 2]$

مدى الدالة هو $ص = [0، 2]$

الطريقة الثانية للحل «تحديد إشارة المقدار»

$4 - س^2$

$(2 - س)(2 + س)$



∴ النطاق للدالة هو مجموعة الحل $س = [-2، 2]$

المدى للدالة هو $ص = [0، 2]$

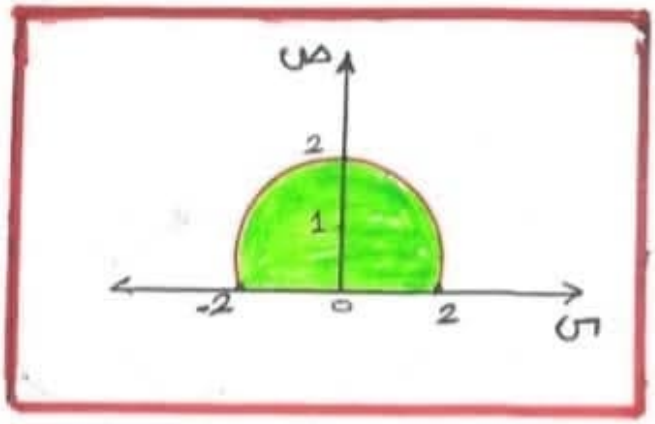
الطريقة الثالثة للحل بمتباينة القيمة المطلقة

$س^2 \leq 4 \leftarrow 4 - س^2 \geq 0 \leftarrow 4 - س^2 \leq 0$

$\sqrt{س^2} \leq 4 \leftarrow |س| \leq 2 \leftarrow -2 \leq س \leq 2$

النطاق للدالة هو س = $[-2 ، 2]$

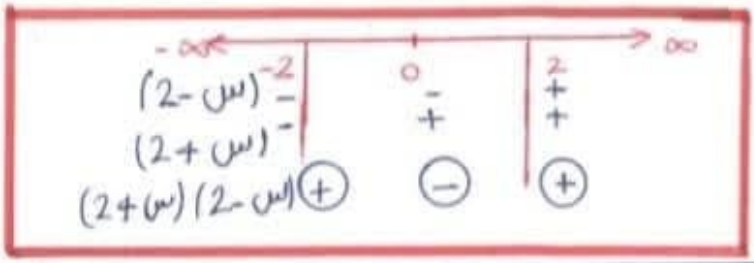
المدى للدالة هو ص = $[0 ، 2]$



ⓐ $د(س) = \sqrt{4 - س^2}$

الطريقة الأولى الحل بتحديد إشارة المقدار

$4 - س^2 \geq 0 \leftarrow (2 - س)(2 + س) \leq 0$



النطاق هو س = $(-\infty ، -2] \cup [2 ، \infty)$

19 المدى للدالة هو $[0, \infty)$

الطريقة الثانية الحل باطبانية القيمة المطلقة

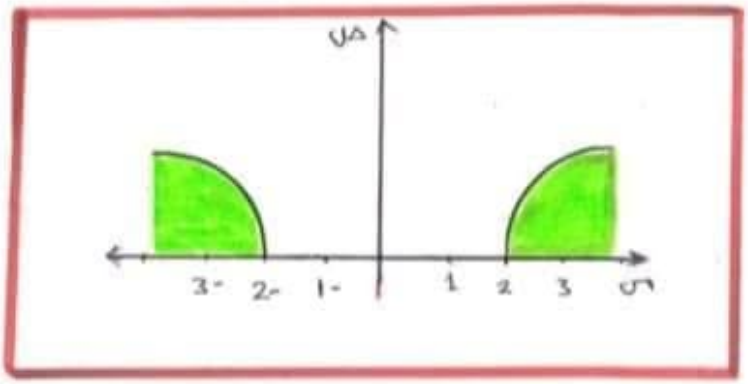
$س^2 - 4 = 0 \leftarrow س^2 = 4 \leftarrow \sqrt{س^2} = \sqrt{4} \leftarrow$

$|س| = 2 \leftarrow س = 2$ أو $س = -2$

$(-\infty, -2]$ أو $[2, \infty)$

∴ النطاق للدالة هو $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

المدى للدالة هو $[0, \infty)$



20 تمرين 4-ج ص 158

(1) إذا كانت $د_1(س) = \frac{1}{س}$ ، $د_2(س) = \frac{1}{1+س}$

دالتين مقيقتين فأوجد كلا من الدوال الآتية :-

(أ) $د_1 - د_2$ (ب) $د_1 . د_2$ (ج) $\frac{د_1}{د_2}$ (د) $\frac{د_2}{د_1}$

الحل

(أ) $د_1 - د_2 = \frac{1}{س} - \frac{1}{1+س} \leftarrow \frac{1}{س(1+س)} = \frac{1+س-س}{س(1+س)}$

$س \neq \{0, -1\}$

(ب) $د_1 . د_2 = \frac{1}{س} \frac{1}{1+س} = \frac{1}{س(1+س)}$ ، $س \neq \{0, -1\}$

(ج) $\frac{د_1}{د_2} = \frac{1}{س} \div \frac{1}{1+س} = \frac{1}{س} \times \frac{1+س}{1} = 1+\frac{1}{س}$ ، $س \neq \{0\}$

(د) $\frac{د_2}{د_1} = \frac{1}{1+س} \div \frac{1}{س} = \frac{1}{1+س} \times \frac{س}{1} = \frac{س}{1+س}$ ، $س \neq \{-1\}$

---

(2) إذا كانت $د_1(س) = \frac{س}{1+س^2}$ ، $د_2(س) = \sqrt{2س-1}$ دالتين حقيقيتين

(أ) أوجد كلا من الدالتين $\frac{د_1}{د_2}$ ، $\frac{د_2}{د_1}$ ؟

(ب) احسب العنصر 3 بواسطة كل منها ؟

الحل

(أ) $= \frac{1}{\sqrt{1-س^2}} \times \frac{س}{1-س^2} \Leftarrow \sqrt{1-س^2} \div \frac{س}{1-س^2} = \frac{1}{2}$

$\{1\} - (\infty، \frac{1}{2}) = س : \frac{س}{(\sqrt{1-س^2})(1-س^2)}$

$= \frac{1-س^2}{س} \times \sqrt{1-س^2} \Leftarrow \frac{س}{1-س^2} \div \sqrt{1-س^2} = \frac{2}{1}$

$(\infty، \frac{1}{2}] \ni س ، [0] \neq س : \frac{(1-س^2)(\sqrt{1-س^2})}{س}$

(ب) $\frac{3}{8} = \frac{3}{1-9} = \frac{3}{1-(3)^2} = (3)_{|1>}$

$\sqrt{5} = \sqrt{1-6} = \sqrt{1-(3)_2} = (3)_{2>}$