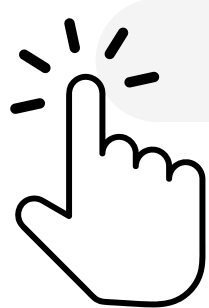


تم تحميل ورفع المادة على منصة



المعلم التعليمي

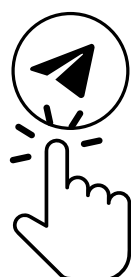
للعودة الى الموقع اكتب في بحث جوجل



المعلم التعليمي



ALMUALM.COM



انضم الى قناة المنهج السوداني على التليجرام

T.ME/ALMANHJ_S

بسم الله الرحمن الرحيم



جمهورية السودان
وزارة التربية والتعليم
المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
- بخت الرضا -

المرحلة الثانوية

الرياضيات

الصف الأول

إعداد لجنة بتكليف من المركز القومي للمناهج و البحث التربوي من :

الأستاذ : على محمد الجاك – المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
الأستاذ : محمد الحسن طه محمد – كلية التربية جامعة أم درمان الإسلامية
الأستاذ : عبد الرحمن عبد الكريم ساتي – كلية العلوم التربوية جامعة بخت الرضا

مراجعة :

الدكتور : عبد الغنى إبراهيم محمد – المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
الأستاذ : محمد الشيخ مدني – وزير التربية والتعليم بولاية الخرطوم

تنقيح :

د. عبد الله محمود عبد المجيد حسن – المركز القومي للمناهج و البحث التربوي
د. ابراهيم عثمان حسن – كلية التربية جامعة الخرطوم
د. شوقي حسين عبد الله – كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة السودان
أ. عبد الكريم احميدي طه – توجيه الرياضيات – ولاية الخرطوم

تنقيح و مراجعة :

د. الخطيب الطيب سيداحمد حمدتوده – المركز القومي للمناهج و البحث التربوي

الإشراف العام :

د. معاوية السرقشي – المدير العام
أ.حبيب آدم حبيب أحمدية – نائب المدير العام
أ.الباقر رحمة البشير – الأمين العام للمركز
أ.احمد حمد النيل حسب الله – مدير إدارة المناهج الأكاديمية

التصميم و الإخراج الفني :

تصميم الغلاف : د. الرفاعي عبد الله عبد المهيل – المناهج بخت الرضا
مساعد مصمم : أ.حافظ محمد إبراهيم – المناهج بخت الرضا

الجمع بالحاسوب :

أ. اشراقة فرح شريف – المناهج بخت الرضا
أ. عبد القادر موسى محمد مصطفى – المناهج بخت الرضا
أ. إلهام عبدالرحيم علي إسماعيل – المناهج بخت الرضا

حقوق التأليف للمركز القومي للمناهج و البحث التربوي ، و حقوق الطبع و النشر
لوزارة التربية و التعليم ولا يجوز لأي جهة طباعة أو بيع هذا الكتاب أو أي جزء
منه وإلا تعرضت لطائلة القانون .

الطبعة الثالثة ٢٠٢٥ م

المحتويات

الوحدة	الموضوع	رقم الصفحة
	مقدمة	
الأولى	المنطق الرياضي	١ - ٤١
الثانية	المجموعات (الفئات)	٤٢ - ٧٣
الثالثة	العلاقات	٧٤ - ١٠٦
الرابعة	كثيرات الحدود (الحدوديات)	١٠٧ - ١٦٩
الخامسة	التغير	١٧٠ - ١٩١
السادسة	الدوال الدائرية (المثلثية)	١٩٢ - ٢٣٧
السابعة	الهندسة التحليلية (الإحداثية)	٢٣٨ - ٢٧٧

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله وصحبه .

أما بعد

يسعدنا أن نقدّم لأبنائنا الطلاب و بناتنا الطالبات كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي، المعد وفقاً لمنهج المرحلة الثانوية في ضوء خطة التطوير التربوي، ومواكبة للتطور الكبير الذي شهده محتوى الرياضيات وأساليب عرضها في هذا القرن، لذلك سعيًا أن يكون المنهج معاصراً في الأسلوب والمحتوى وطرائق العرض. وقد قُدِّمت مادة الكتاب في دروس، يضمّ كل منها فكرة رئيسة، مع أمثلة وتدريبات مناسبة للصف والواجب المنزلي، مع ربط الموضوعات بما درسه الطلاب في المرحلة المتوسطة ، والاهتمام بالتوازن بين المفاهيم والمهارات. وقد أقرّت شعبة الرياضيات ولجنة تطوير مصفوفة المدى والتتابع لمادة الرياضيات بالمرحلة الثانوية **الإبقاء على النسخة المنقحة عام ٢٠٠٩م** أساساً، مع إضافة موضوعات جديدة في **وحدة الحدوديات**، هي:

• **نظرية الباقي**

• **نظرية العامل**

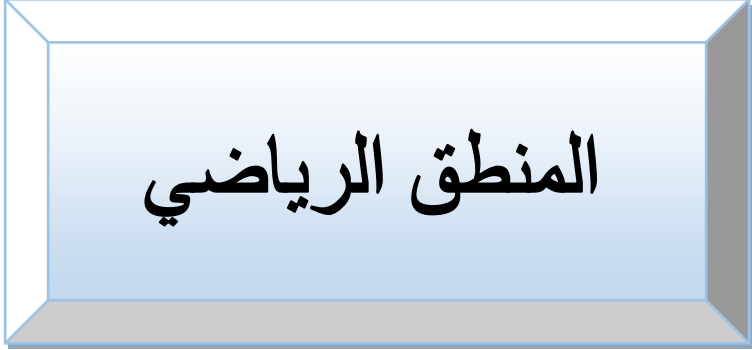
• **جذور المعادلات من الدرجة الأعلى من الثانية**

كما أُعطي اهتمام خاص **بربط المفاهيم الرياضية بالحياة اليومية** لتأكيد دور الرياضيات في فهم الواقع وتطبيقاته المتنوعة ، آمليّن أن نكون قد وفقنا في ذلك كله ، ومرحبين بكل نقد بناء من الطلاب وأولياء أمورهم ومعلميهم لإثراء الكتاب وتطويره.

والله الموفق

شعبة الرياضيات

الوحدة الأولى



المنطق الرياضي

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :-

- ١- يتعرّف القضية (العبارة) المنطقية .
- ٢- يتعرّف نفى القضية .
- ٣- يميّز القضية .
- ٤- يتعرّف القضية المركبة .
- ٥- يتعرّف الروابط المنطقية .
- ٦- يجد جدول صواب القضية .
- ٧- يتعرّف القضية الشرطية .
- ٨- يتعرّف القضية الشرطية الثنائية .
- ٩- يميّز القضايا المتكافئة منطقياً .
- ١٠- يتعرّف خواص الروابط المنطقية .
- ١١- يميّز القضايا الصائبة والخاطئة منطقياً .

(١ - ١) القضية المنطقية (العبارة)

إن كل فرع من فروع المعرفة له ألفاظه واصطلاحاته الخاصة . إلاّ إنّ الكثير من هذه الألفاظ تستخدم في حديثنا اليومي بمعناها الأصلي أو بمعنى قريب منه ، وأحيانا قد يكون المعنى مختلفاً تماماً . وكثيرا ما نستخدم عند نقل المعرفة تقارير وتعبيرات تصف هذه الألفاظ وتوضح خواصها والعلاقات بينها ، وفي الرياضيات تحتاج إلى سلسلة من الخطوات المرتبة بعضها على بعض لكي نصل إلى نتائج صحيحة، ومن هذه الزاوية يمكن النظر إلى الرياضيات على أساس أنها نظام منطقي.

وكتابة العبارات الرياضية في صور رمزية مع وضع قواعد ثابتة سهلة الاستخدام يكون ما يُسمّى بالمنطق الرياضي . وعلى هذا فالمنطق الرياضي ليس نظرية ولكنه لغة علمية متفق عليها بين الرياضيين . فاللغة العادية (الدارجة) من الجائز أن يختلف القراء في فهمها كلّ حسب علمه . أمّا في الرياضيات فلا نستطيع أن نترك مفهوم الجمل (العبارات) الرياضية لهذا الخلاف ، لذا وضع العلماء اتفاقات لكي نفسر بها أعداد من الجمل الرياضية التي نستعملها .

ففي اللغة نجد أن الجمل تقسم إلى جمل خبرية وجمل إنشائية . فالجمل الخبرية هي كل جملة تحتمل الصواب أو الخطأ (الصدق أو الكذب) مثل :

➤ مجموع قياس زوايا المثلث ١٨٠ .

➤ يدور القمر حول الأرض .

➤ $6 \times 5 = 31$.

➤ $3 > 7$

أما الجمل الإنشائية فهي التي لا يمكن أن يوصف قائلها بالصواب أو الخطأ (بالصدق أو الكذب) كجمل الاستفهام والأمر والتعجب والنهي والتمني والنداء مثل :

➤ يا علي ، اكتب الدرس.

➤ هل أكرمت ضيفك ؟

➤ ما أجمل العطف على اليتامى

➤ لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد .

ولما كان من أغراض المنطق تقرير صواب الكلام المعبر عن الأفكار أو خطئها فهو يهتم بدراسة الجمل الخبرية ، التي نسميها قضايا منطقية . أو تقارير أو عبارات

تعريف:

القضية أو (العبرة) هي جملة خبرية ذات معنى محدد يمكن وصفها بأنها صائبة أو خاطئة ، و لا يمكن أن توصف بأنها صائبة وخاطئة في وقت واحد.

نرمز للقضايا بحروف فنقول مثلاً: القضية ب أو القضية ج أو العبارة ب أو العبارة ج
مثال :

(أ) فالقضية $١ > ٣$ جملة خبرية صادقة فهي قضية صائبة .

(ب) أما قولنا : ((للمعادلة $٢س - ٥ = ٠$ حل في مجموعة الأعداد الصحيحة))
قضية خاطئة.

فإذا كانت القضية ب صائبة فنرمز لذلك بالحرف (ص) أما إذا كانت خاطئة فنرمز لذلك بالحرف (خ) ونلخص ما تقدم بالجدول (١ - ١)

القضية ب	قيمة الصواب
إذا كانت صائبة	ص
إذا كانت خاطئة	خ

جدول (١ - ١)

القضية	قيم الصواب
$٣ > ١$	ص
$٢س - ٥ = ٠$ ، $س \geq ٥$	خ

جدول (١ - ٢)

لاحظ أنّ جملة مثل $س + ٥ = ٣$ حيث $س$ عدد صحيح لا يمكن الحكم بأنها صائبة أو خاطئة ما لم تعطى قيمة معينة للرمز المعين $س$ الوارد فيها . لذا لا يمكن أن نسميها قضية أو تقريراً إلا بعد التعويض عن $س$ بقيمة معينة . فلو جعلنا $س = ٢$ لكانت قضية صائبة ، أما إذا كان $س$ عدداً صحيحاً لا يساوي ٢ لكانت قضية خاطئة ، تسمى مثل هذه الجملة ، جملة مفتوحة.

تمرين (١ - ١)

عين القضايا المنطقية في كل مما يأتي مبينا أيها صائبة وأيها خاطئة عندما يكون ذلك ممكنا .

١. اكتب خمسة أعداد من مضاعفات العدد ٣
 ٢. العدد ٢١ يقبل القسمة على ٧
 ٣. $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$
 ٤. $6 + 5 \neq 9 + 3$
 ٥. قطرا متوازي الأضلاع يتناصفان
- جملته (لست) ← ص
رئيسه

(١ - ٢) نفى القضية

إذا أردنا أن ننفي القضية : الجو حار ، نقول الجو ليس حاراً (أو ليس الجو حاراً) ، أي إذا أدخلنا على الجملة الخبرية إحدى أدوات النفي فأننا نقول أن القضية الناتجة نفيًا للقضية الأولى . وقد اتفق على أن يرمز لنفي القضية ب بالرمز $\sim$ ب أو ب⁻ ويقرأ نفي ب أو ليس ب فإذا كانت القضية صائبة فإن نفيها يكون خاطئاً ، وإذا كانت خاطئة فإن نفيها يكون صائباً. وفيما يلي جدول صواب ب و $\sim$ ب معا .

جدول (١ - ٣) (أ)

ب	$\sim$ ب
ص	خ
خ	ص

جدول (١ - ٣) (أ)

يستخدم أحيانا الرمز (١) بدلاً عن ص والرمز (٠) بدلاً عن خ كما موضح بالجدول

(١ - ٣) (ب)

ب	$\sim$ ب
١	٠
٠	١

جدول (١ - ٣) (ب)

مثال :

فيما يلي بعض القضايا ونفيها وقيمة صواب كل منها .

القضية	قيمة الصواب
أ: $١٧ = ١٢ + ٨$	(خ)
~ أ: $١٧ \neq ١٢ + ٨$	(ص)
ب: $١ < ٣$	(ص)
~ ب: $١ \geq ٣$ أو $١ \leq ٣$	(خ)
ج: لندن عاصمة الصين	(خ)
~ ج: لندن ليست عاصمة الصين	(ص)

تمرين (١ - ٢)

أكتب نفي كل من القضايا التالية وبيّن قيمة صواب كل من القضية ونفيها .

- أ. $٥ > ٧$.
- ب. القاهرة عاصمة الأردن
- ج. قطرا المعين يتعامدان
- د. مروي مدينة أثرية
- هـ. $٢ + ٣ \neq ٣ + ٢$
- و. الزاوية المحيطية المنشأة على قطر الدائرة قائمة.
- ز. مدينة سواكن تطل على البحر الأبيض المتوسط .

(١ - ٣) جدول الصواب لقضيتين وثلاث قضايا

علمنا أن الحكم على صواب قضية أو خطئها من اختصاص العلم الذي تتعلق به هذه القضية . وإن أي قضية به يمكن أن تكون صائبة وإلا فهي خاطئة ، ولا يمكن أن تكون صائبة و خاطئة في الوقت نفسه ، وفي النظام نفسه . أما إذا كانت لدينا قضيتان أ ، ب فإننا نجد حالات أربع تتعلق بأوضاع هاتين القضيتين مع بعضها وهي :

١ . القضية الأولى صائبة والقضية الثانية صائبة

٢ . القضية الأولى صائبة والقضية الثانية خاطئة

٣ . القضية الأولى خاطئة والقضية الثانية صائبة

٤ . القضية الأولى خاطئة والقضية الثانية خاطئة

ويمكن أن نلخص ما تقدم بالجدول (١ - ٤) التالي :

أ	ب
ص	ص
ص	خ
خ	ص
خ	خ

جدول (١ - ٤)

لاحظ أنه توجد أربع حالات لقيم صواب القضيتين .
 إذن ما عدد الحالات لقيم صواب ثلاث قضايا ؟
 لاحظ هناك ٤ حالات في جدول قضيتين أي 2^2 ، وكذلك يوجد في حالة القضايا
 الثلاث : $2^3 = 8$ حالات نلخصها في الجدول (١ - ٥) التالي :

أ	ب	ج
ص	ص	ص
ص	ص	خ
ص	خ	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	ص	خ
خ	خ	ص
خ	خ	خ

جدول (١ - ٥)

وبصورة عامة يتضمن الجدول الذي يحتوى ن من القضايا على 2^n حالة

القضية المركبة :

تعتبر الأعداد هي اللبنات التي يبنى بها علم الحساب ، وتوجد بينها علاقات وتجرى عليها عمليات كالجمع والطرح والضرب . وتعتبر في الجبر الحدود هي العناصر الأولية التي نبنى منها هذا العلم . أما في المنطق فان الأشياء الأولية التي نبنى منها هذا العلم هي القضايا . وهناك من القضايا ما توصف بأنها بسيطة ، ومنها ما توصف بأنها قضايا مركبة .

فالقضية البسيطة هي عبارة أو تقرير يعبر عن قضية واحدة . أما القضية المركبة فهي التي تنشأ من ربط القضايا البسيطة بإحدى أدوات الربط وهي ((و)) ، ((أو)) ، ((إذا كان ... فان ...)) ، ((إذا فقط إذا)) ، فالقضايا :

➤ ١٢ عدد زوجي .

➤ الهيدروجين اخف وزنا من الأكسجين

➤ العدد ٣ يقسم العدد ١١

➤ ١٥ يقبل القسمة على ٤

➤ $13 < 7$

كلها قضايا بسيطة

أما إذا ربطنا قضيتين أو أكثر بأداة ربط واحدة أو أكثر نحصل على قضية مركبة
مثل:

١. يتجمد الماء عند درجة الصفر و يغلى عند درجة ١٠٠ .

٢. تطل أم درمان على النيل الأبيض أو النيل الأزرق .
٣. إذا كان الطالب مجتهداً فإن النجاح حليفه.
٤. يكون المثلث متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كانت زواياه متساوية .
- نلاحظ أن كل قضية مركبة من القضايا السابقة تتركب من قضيتين بسيطتين ربطتا بحروف معينة مثل «و»، «أو»، «إذا كان ... فإن ...»، «إذا وفقط إذا» وتسمى هذه الحروف أدوات ربط القضايا المنطقية . أي إذا ارتبطت قضيتان أو أكثر بإحدى أدوات الربط «و»، «أو»، «إذا كان ... فإن ...»، «إذا وفقط إذا» تكون الجملة الناتجة قضية أيضا أما صائبة أو خاطئة .
- «لاحظ أن الرابط الأخير يهتم به الرياضيون رغم أن استخدامه غير شائع في اللغة»
- أنّ قيمة الصواب لأي قضية مركبة تعتمد على قيم صواب القضايا المكونة لها ونوع أداة الربط التي استعملت .
- ومن هذا المبدأ يتبيّن بوضوح أنه عند تركيب القضايا لا نضع في اعتبارنا ضرورة وجود أي نوع من العلاقة سواء في المعنى أو المحتوى بين بعضها وبعضها الآخر ولكن ينصب اهتمامنا فقط على قيم صواب القضايا وأداة الربط المستخدمة .
- مثلا :

- (١) العدد ٣ يقسم العدد ١٢ و هو عدد أولي .
- (٢) $٩ = ٤ + ٥$ أو الطب علم مفيد للبشرية .
- (٣) إذا كانت الأرض اصغر من القمر فإن $١ = ١ + ١$.

تمرين (١ - ٣)

(أ) جد القضايا البسيطة المكوّنة للقضايا المركّبة التالية :

- (١) إذا نجح محمد في الامتحان فأعني سأقدم له هدية
 - (٢) أحمد تلميذ ذكي ومجتهد .
 - (٣) الجو ليس حاراً والرطوبة عالية .
 - (٤) إذا كان س = ١ فان س^٢ - ١ = ٠
 - (٥) الشمس ساطعة والمطر ينهمر .
 - (٦) يشتغل جهاز الراديو إذا وفقط إذا سرت في دائرته الكهربائية .
 - (٧) العدد ١٥ يقبل القسمة على ٤ أو قطراً المعين يتعامدان .
- (ب) اربط كل زوج من أزواج القضايا التالية بإحدى أدوات الربط التالية ((و)) ، ((أو)) ، ((إذا كان ... فان ...)) ، ((إذا وفقط إذا)) .
- (١) ٧ < ٥ ، ٣ > ٦ .
 - (٢) يحب محمد مجالسة العلماء ، يحب محمد مجالسة الأتقياء .
 - (٣) أضلاع المثلث متناسبة ، زوايا المثلث متساوية .
 - (٤) س عدد زوجي ، س يقبل القسمة على ٢ .

(١ - ٤) الروابط المنطقية

الرابط "و" :

انظر إلى المثال التالي :

- ١ - الخرطوم عاصمة السودان . ٢ - الأرض أكبر حجماً من القمر .
كل من هاتين القضيتين صائبة ، فإذا ربطنا بينهما مستخدمين الرابط " و " نحصل على :

➤ الخرطوم عاصمة السودان و الأرض أكبر حجماً من القمر

ربما تعتقد أن هذه ليست جملة على الإطلاق لأنه لا توجد علاقة واضحة بين مركبتيها ، ولكن بالرجوع إلى مبدأ القضايا المركبة نجد أننا قد وافقنا على أن كل جملة نحصل عليها بربط قضيتين معا بإحدى أدوات الربط تعتبر قضية بذاتها لها قيمة صواب فإذا كانت كل من أ ، ب قضية بسيطة، فإن ((أ و ب)) هي قضية مركبة وسنرمز للقضية ((أ و ب)) بالرمز ((أ ∧ ب)) ((ويمثل الرمز ∧ الرابط " و ")) وقد اتفق على أن تكون هذه القضية صائبة إذا كان كل من القضيتين أ ، ب صائبة وتكون خاطئة إذا كانت واحدة على الأقل من القضيتين أ ، ب خاطئة .

الجدول (١ - ٦) يبين قيم صدق القضية ((أ ٨ ب)) في الحالات الأربع السابقة.
ويُسمّى هذا الجدول جدول صواب القضية أ ٨ ب

أ	ب	أ ٨ ب
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

جدول (١ - ٦)

مثال (١):

(أ) إذا كانت القضيتان :

ب : ١٥ يقبل القسمة على ٣

ج : ٤ ≠ ٢ + ٢

فإن (ب ٨ ج) قضية خاطئة لأن إحدى القضيتين وهي الثانية خاطئة .

(ب) إن القضية المركبة : ١١ عدد أولى ٨ قطرا المستطيل متساويان قضية صائبة لأن كلا من القضيتين البسيطتين صائبة.

مثال: (٢)

افرض أن أ ، ب ، ج ، د تدل على القضايا التالية :

$$\text{أ/ } ٢ = ١ + ١$$

ب/ طول محيط الدائرة يساوى $\frac{٥}{٣}$ طول نصف قطرها

ج/ القمر يدور حول المريخ

د/ بعض الأعداد الحقيقية صحيحة

باستخدام معلوماتنا في الرياضيات والفلك نستطيع أن نقرر أن

أ. قضية صائبة ، ب. خاطئة ، ج. خاطئة ، د. صائبة

وبالنظر إلى جدول الصواب للرباط ٨ نستنتج أن:

أ ٨ ب قضية خاطئة

أ ٨ د قضية صائبة

ج ٨ د قضية خاطئة

ب ٨ ج قضية خاطئة

(أ ٨ ب) ٨ د قضية خاطئة

ج ٨ (ب ٨ د) قضية خاطئة

ملحوظة :

يجب أن نؤكد أن جدول الصواب للروابط هو مجرد اتفاق على تعيين قيم الصواب للقضايا المركبة بمعلومية قيم صواب القضيتين البسيطتين . ومع ذلك فإن هذا الاتفاق قريب للاستعمال العادي لحرف العطف ((و)) .

مثال: (٣)

أوجد جدول صواب القضية $\sim (\sim A \wedge B)$

الحل :

أن الجدول لمثل هذه القضايا يكون عدد الأسطر أو الصفوف فيه مساويا لعدد حالات عدد القضايا البسيطة الداخلة في تكوين القضية المركبة . ففي هذا المثال يكون عدد الصفوف ٤ لأن فيه قضيتين حقيقتين بسيطتين A ، B . أما عدد الأعمدة فيكون بعدد الخطوات اللازمة لتكوين الشكل النهائي للقضية مثلا في هذا المثال نحتاج لعمود لكل من القضايا A ، B ، $\sim A$ ، $\sim A \wedge B$ ثم $\sim (\sim A \wedge B)$ أي خمسة أعمدة انظر الجدول (١ - ٧) التالي :

A	B	$\sim A$	$\sim A \wedge B$	$\sim (\sim A \wedge B)$
ص	ص	خ	خ	ص
ص	خ	خ	خ	ص
خ	ص	ص	ص	خ
خ	خ	ص	خ	ص

جدول (١-٧)

تمرين (١ - ٤)

١/ لنفترض أن :

(أ) يعنى : تدور الأرض حول نفسها

(ب) يعنى : زوايا المستطيل حادة

(ج) يعنى : قطرا المعين متعامدان

(د) يعنى : نهر النيل من أنهار قارة آسيا

جد قيم الصواب للقضايا التالية :

$$١. أ \wedge ب \quad ٢. أ \wedge ج \quad ٣. د \wedge ب \quad ٤. \sim أ \wedge د$$

$$٥. \sim (أ \wedge ج) \quad ٦. (أ \wedge د) \wedge ب$$

٢/ استخدم الأداة « $\wedge$ » لربط كل قضيتين متقابلتين مما يلي ثم بين قيمة الصواب

للقضية المركبة الناتجة :

$$أ/ \quad ٦ = ٣ \times ٢ , \quad ٢٠ = ٤ \times ٥$$

$$ب/ \quad ٥ = ٤ + ١ , \quad ٥٤ = ٩ \times ٧$$

$$ج/ \quad ٥ < ٤ , \quad ٣ > ٢$$

$$د/ \quad ١٤ \text{ يقبل القسمة على } ٥ , \quad ١٥ \text{ عدد زوجي}$$

٣/ جد جدول صواب كل من القضايا التالية:

$$أ. \sim (ط \wedge هـ)$$

$$ب. (\sim س \wedge ص) \wedge \sim ع$$

(١ - ٥) الرابط « أو »

هو رابط أداته حرف العطف « أو » الذي نرسم له منطقياً بالشكل « $\vee$ » فإذا ربطنا القضيتين « ب ، ج » بأداة الربط $\vee$ فإننا نحصل على القضية المركبة ب $\vee$ ج وتقرأ (ب أو ج).

تعطى اللغة لحرف العطف « أو » معان متعددة . أهمها:

أ. التخيير أو الاستبعاد « مثل قولك سألتحق بكلية الطب أو سألتحق بكلية الهندسة » وتلاحظ في هذه الحالة أنه لا يمكن أن تتحقق هاتان القضيتان معاً. أو مثل قولك « الشكل أ ب ج مثلث قائم الزاوية أو الشكل أ ب ج مثلث منفرج الزاوية » تلاحظ أنه لا يمكن في الهندسة التي درستها أن تجد شكلاً يحقق هاتين القضيتين معاً.

ب. الإباحة أو الشمول : مثل قولك « أن المثلث أ ب ج له ضلعان متساويان في الطول أو أن المثلث أ ب ج قائم الزاوية »

تلاحظ أن المثلث أ ب ج قد يحقق القضية الأولى فقط وقد يحقق القضية الثانية فقط ، وقد يحقق هاتين القضيتين معاً .

بما أن المنطق الرياضي يعطى لكل رمز نستعمله معنى واحداً محدداً تمام التحديد ، فقد اتفق على أن يكون المعنى المنطقي للرمز $\vee$ هو معنى الإباحة الذي يأخذه حرف العطف « أو » فإذا ربطنا القضيتين ب ، ج بأداة الربط $\vee$ ، فإننا نحصل على

القضية ب ٧ ج التي هي قضية خاطئة في الحالة الوحيدة التي تكون فيها القضيتان ب ، ج خاطئتين معاً ، وصائبة في الحالات الثلاث الباقية .

وفيما يلي جدول (١ - ٨) يبين قيم صواب القضية ب ٧ ج

ب	ج	ب ٧ ج
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	خ
خ	خ	خ

جدول (١ - ٨)

مثال: (١)

أن القضية : ((نجح خالد في امتحان اللغة العربية أو في امتحان اللغة الإنجليزية))

هذه القضية تكون صائبة في الحالات الآتية :

١. نجح خالد في امتحان اللغة العربية وفي امتحان اللغة الإنجليزية .
 ٢. نجح خالد في امتحان اللغة العربية فقط .
 ٣. نجح خالد في امتحان اللغة الإنجليزية فقط .
 ٤. وتكون خاطئة في الحالة التالية :
- لم ينجح في امتحان اللغة العربية ولم ينجح في امتحان اللغة الإنجليزية .

مثال: (٢)

- أ. أن القضية المركبة ((العدد ١٥ يقبل القسمة على ٧ أو قطرا المعين متعامدان)) قضية صائبة لأن القضية الثانية صائبة .
- ب. القضية المركبة ((محيط الدائرة = $\frac{2}{3}$ نصف قطرها أو العدد ٢١ عدد أولي)) قضية خاطئة لأن كل واحدة من القضيتين الداخلتين في تركيبها خاطئة .

مثال: (٣)

جد جدول صواب القضية (~ س ٨ ع) ~ ٧ ع

الحل :

س	ع	~ س	~ ع	~ س ٨ ع	(~ س ٨ ع) ~ ٧ ع
ص	ص	خ	خ	خ	خ
ص	خ	خ	ص	خ	ص
خ	ص	ص	خ	ص	ص
خ	خ	ص	ص	خ	ص

جدول (١ - ٩)

مثال (٤):

- إذا كانت س هي القضية : المثلث أ ب ج قائم الزاوية
ص هي القضية : المثلث أ ب ج متساوي الساقين
ع هي القضية : المثلث أ ب ج متساوي الأضلاع .

اعد كتابة القضايا التالية مستخدما الرموز س ، ص ، ع .

١. المثلث أ ب ج قائم الزاوية و متساوي الساقين .
٢. المثلث أ ب ج قائم الزاوية و ليس متساوي الأضلاع .
٣. المثلث أ ب ج ليس بقائم الزاوية أو متساوي الساقين .
٤. ليس صحيحا أن المثلث أ ب ج متساوي الساقين أو متساوي الأضلاع .

الحل :

١. س ٨ ص
٢. س ٨ ~ ع
٣. ~ س ٧ ص
٤. ~ (ص ٧ ع)

تمرين (١ - ٥)

(١) إذا كانت س هي القضية : احمد طالب ذكى

ط هي القضية : احمد لاعب كرة ماهر

ل هي القضية : احمد طالب مقعد

اعد كتابة القضايا التالية مستعملا الرموز المناسبة :-

أ. احمد طالب ذكى و مقعد .

ب. احمد لاعب كرة ماهر و لكنه ليس ذكياً .

ج. ليس صحيحا أن احمد لاعب كرة ماهر أو مقعد .

د. ليس صحيحا أن احمد لاعب كرة ماهر أو أنه ذكى .

(٢) إذا كان : ف : يرمز للقضية ((الفصل شتاء))

ن : يرمز للقضية ((البرد شديد))

اكتب القضايا التالية بالكلمات بدلاً عن الرموز ؟

(أ) ف $\vee$ ن (ب) ف $\wedge$ ن

(ج) ف $\wedge$ $\sim$ ن (د) $\sim$ ف $\vee$ ن

(هـ) $\sim$ ف $\wedge$ $\sim$ ن (و) $\sim$ (ف $\vee$ ن)

(ز) $\sim$ (ف $\wedge$ ن) (ح) $\sim$ ف $\vee$ $\sim$ ن

(٣) أوجد جدول صواب كل من القضايا التالية

أ. $\sim$ س $\vee$ $\sim$ ط ب. $\sim$ (س $\vee$ ط) $\wedge$ $\sim$ ط

(١ - ٦) الرابط ((إذا كان ... فإن ...))

القضية الشرطية :

خذ القضية : إذا كان الشكل أ ب ج مثلث فإن مجموع قياسات زواياه 180° إن القضية التي تلي ((إذا كان)) وهي الشكل أ ب ج مثلث تسمى المقدمة أما القضية التي تلي ((فإن)) وهي مجموع قياسات زواياه 180° تسمى التالية . أن لأداة الربط ((إذا كان ... فإن ...)) طرقاً في الكلام نوضح بعضها بالأمثلة التالية .

١. إذا كانت مساحة متوازي الأضلاع تساوى حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع ، فإن مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع .

٢. إذا كان $2 + 4 = 6$ فإن $5 + 6 = 11$.

لندرس صدق القضية المركبة بأداة الربط ((إذا كان ... فإن ...)) خذ القضية ((ع : إذا نجح محمد في الامتحان فأنى سأقدم له هدية)) دعنا ندرس قيم صدق هذه القضية :

١. نجح محمد في الامتحان و قدمت له الهدية في هذه الحالة تكون ع صائبة.
٢. نجح محمد في الامتحان ولم أقدم له هدية . في هذه الحالة تكون ع خاطئة لأننى وعدت بالهدية و عندما نجح محمد لم أف بوعدي.
٣. لم ينجح محمد في الامتحان ورغم ذلك قدمت له الهدية وفى هذه الحالة تكون ع صائبة لأننى لم اقل : لن أقدم الهدية لمحمد إذا رسب في الامتحان . أن فشل محمد يترك لي حرية التصرف في إعطائه أو حرمانه الهدية . أما نجاحه فيلزمني بإعطائه الهدية.

٤. لم ينجح محمد ولم أقدم له الهدية ، في هذه الحالة تكون ع صائبة كما

أوضحنا في الحالة (٣)

إذا كانت س ، ط قضيتين فإننا نكتب القضية الشرطية : ((إذا كان س فإن ط))
هكذا (س ← ط) وتلاحظ أن القضية المركبة الناتجة تكون خاطئة فقط في الحالة
التي تكون فيها المقدمة صائبة والتالية خاطئة .

الجدول التالي يوضح قيم صدق القضية س ← ط

س	ط	س ← ط
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	خ	ص

جدول (١ - ١٠)

ويمكن أن نستنتج من الجدول (١ - ١٠) ما يلي :

أ. أن الجملة الشرطية : $١٣ < ٧ \leftarrow ١٨ < ١٢$ قضية صائبة لأن المقدمة والتالية قضيتان صائبتان.

ب. أن الجملة الشرطية : مجموع قياس زوايا المثلث $١٨٠^\circ \leftarrow$ المربع يحوى زاوية حادة . قضية خاطئة لأن المقدمة صائبة والتالية خاطئة.

ج. أن الجملة الشرطية : (($٣ \times ٥ = ١٦ \leftarrow$ المربع يحوى زاوية حادة)) قضية صائبة لأن المقدمة خاطئة والتالية خاطئة.

ملاحظات :

١. يجب أن تتذكر أن الجملة الشرطية ليست استنتاجاً ومن الممكن أن لا يكون بين المقدمة والتالية أي صلة كما هو الحال في الحالة (ج) السابقة.
٢. ليس من الضروري أن تكون المقدمة صائبة لتكون الجملة الشرطية صائبة فالجملة الشرطية تكون صائبة عندما تكون المقدمة خاطئة وذلك سواء أكانت التالية صائبة أم خاطئة كما في الجدول .
٣. إذا كان لدينا من المعلومات ما يسمح لنا بأن نقول أن القضية : ب ← ج صائبة وكانت المقدمة ب صائبة فإنه يمكننا أن نؤكد أن القضية التالية ج صائبة أي ، إذا كانت ب ← ج صائبة و ب صائبة فإن ج صائبة وهذه قاعدة عامة من قواعد المنطق. وحينما تكون المقدمة صائبة والجملة الشرطية صائبة فإن القضية المركبة ب ← ج تكتب على الصورة ب ⇐ ج وتقرأ : ب تقتضي ج .

مثال :

جد جدول الصواب للقضية (~ ب ٨ ج) ← ب

الحل:

ب	ج	~ ب	~ ب ٨ ج	(~ ب ٨ ج) ← ب
ص	ص	خ	خ	ص
ص	خ	خ	خ	ص
خ	ص	ص	ص	خ
خ	خ	ص	خ	ص

جدول (١ - ١١)

تمرين (١ - ٦)

(١) إذا كانت أ ترمز للقضية : الظلام حالك

ب ترمز للقضية : الجو عاصف

عبر عن القضايا التالية مستخدماً رموز الروابط المنطقية .

أ. إذا كان الظلام حالكاً فإن الجو يكون عاصفاً

ب. إذا كان الجو عاصفاً فإن الظلام يكون حالكاً

ج. إذا لم يكن الجو عاصفاً فإن الظلام يكون حالكاً

د. إذا كان الجو عاصفاً فإن الظلام لا يكون حالكاً

هـ. ليس صحيحاً أنه إذا كان الظلام حالكاً فإن الجو يكون عاصفاً

و. إذا كان الجو ليس عاصفاً فإن الظلام لا يكون حالكاً

(٢) اكتب قيمة الصواب لكل من القضايا التالية :

(أ) إذا كان $٣ + ٤ = ٧$ فإن $٨ < ٥$

(ب) $٢ \neq ٣ \leftarrow ٥ + ٦ = ٩$

(ج) $٥ \ni \pi \leftarrow$ مساحة الدائرة = π نق^٢

(د) إذا كان $٧ + ٥ = ١١$ فإن $٢ + ٤ = ٣$

(٣) أكتب جدول الصواب لكل من القضايا التالية

(أ) $\leftarrow (أ \vee ب)$

(ب) $\sim (أ \leftarrow \sim ب)$

(ج) $(أ \wedge ب) \leftarrow ب$

(١ - ٧) الرابط ((إذا وفقط إذا)) القضية الشرطية الثنائية

في كثير من الأحيان تقابلنا قضايا مركبة على الصورة :

$$(أ \leftarrow ب) \wedge (ب \leftarrow أ) \text{ مثلا :}$$

إذا كان المثلث ل م ن متساوي الأضلاع فإنه يكون متساوي الزوايا . وإذا كان المثلث ل م ن متساوي الزوايا فإنه يكون متساوي الأضلاع . وهذه القضية المركبة يمكن كتابتها باختصار كما يلي :

المثلث ل م ن يكون متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان متساوي الزوايا .
وبصفة عامة :

((أ إذا وفقط إذا ب)) تعنى إذا كان أ فإن ب وإذا كان ب فإن أ ويرمز للقضية المركبة ((أ إذا وفقط إذا ب)) بالرمز $أ \leftrightarrow ب$
أي $أ \leftrightarrow ب$ تعنى $(أ \leftarrow ب) \wedge (ب \leftarrow أ)$

ويمكن التوصل إلى قيم صواب القضية $أ \leftrightarrow ب$ من الجدول (١ - ١٢) التالي :

أ	ب	$أ \leftarrow ب$	$ب \leftarrow أ$	$(أ \leftarrow ب) \wedge (ب \leftarrow أ)$
ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ
خ	ص	ص	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص

جدول (١ - ١٢)

ويمكن أن نختصر جدول (١ - ١٢) في الجدول (١ - ١٣) التالي :

أ	ب	أ ↔ ب
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	ص

جدول (١ - ١٣)

نلاحظ أن أ ↔ ب تكون صائبة عندما تكون القضيتان أ ، ب صائبتين معا أو خاطئتين معا .

مثال: (١)

إذا كانت ل هي القضية : الشمس مشرقة

م هي القضية : السحب كثيفة

ن هي القضية : السماء ممطرة

(أ) مستعملاً الرموز اعد كتابة القضايا التالية:

١. السماء ممطرة إذا وفقط إذا كانت السحب كثيفة

٢. ليس صحيحاً أن الشمس مشرقة إذا وفقط إذا كانت السماء ممطرة

٣. إذا كانت الشمس مشرقة فإن (السحب تكون كثيفة إذا وفقط إذا كانت السماء ممطرة)

(ب) عبر عن القضايا التالية لفظياً:

١. $\sim L \leftrightarrow N$

٢. $\sim (M \leftrightarrow L)$

٣. $(\sim N \leftrightarrow \sim L)$

الحل : (أ)

١. $N \leftrightarrow M$

٢. $\sim (L \leftrightarrow N)$

٣. $L \leftarrow (M \leftrightarrow N)$

(ب) ١. الشمس ليست مشرقة إذا وفقط إذا كانت السماء ممطرة

٢. ليس صحيحاً أن السحب كثيفة إذا وفقط إذا كانت الشمس مشرقة

٣. السماء ليست ممطرة إذا وفقط إذا كانت الشمس ليست مشرقة

مثال : (٢)

أوجد جدول صواب القضية $A \leftrightarrow \sim (A \wedge B)$

الحل :

أ	ب	$A \wedge B$	$\sim (A \wedge B)$	$A \leftrightarrow \sim (A \wedge B)$
ص	ص	ص	خ	خ
ص	خ	خ	ص	ص
خ	ص	خ	ص	خ
خ	خ	خ	ص	خ

جدول (١ - ١٤)

تمرين (١ - ٧)

(١) إذا كانت القضية س هي : سعاد بنت نشيطة .

القضية ص هي : سعاد بنت مجتهدة .

القضية ع هي : سعاد بنت ذكية .

(أ) عبّر عن كلٍ من القضايا التالية مستعملاً الرموز :

١- سعاد بنت نشطة إذا وفقط إذا كانت سعاد بنت مجتهدة .

٢- ليس صحيحاً أن سعاد بنت ذكية و نشطة .

(ب) عبّر عن كلٍ من القضايا الرمزية التالية لفظياً :

١- (س $\wedge$ ص) $\leftarrow$ ع

٢- $\sim$ س $\leftrightarrow$ (ص $\vee$ ع)

(٢) جد جدول صواب القضايا التالية :

أ. (أ $\wedge$ ب) $\leftrightarrow$ $\sim$ أ

ب. $\sim$ (أ $\leftarrow$ ب) $\leftrightarrow$ (أ $\vee$ ب)

ج. (أ $\wedge$ ب) $\leftrightarrow$ ($\sim$ ب $\vee$ ج)

د. $\sim$ أ $\leftrightarrow$ $\sim$ (ب $\leftarrow$ ج)

(١ - ٨) الاقتضاء و التكافؤ

سنوضح ما نعنيه بالاقتضاء من خلال مناقشة الحالتين الآتيتين :

الحالة الأولى : الاقتضاء في اتجاه واحد

ليكن أ هي القضية $s = 2$

ليكن ب هي القضية $s = 4$

من معلوماتنا في الرياضيات نستطيع أن نكتب :

إذا كانت القضية $s = 2$ صائبة فإن هذا يقتضى أن يكون (أ يؤدي إلى أن)

القضية $s = 4$ صائبة أيضا .

ونعبر عن ذلك رمزيا بالصورة :

$s = 2 \Rightarrow s = 4$ أي $A \Rightarrow B$

ولكن من الواضح أنه إذا كانت القضية $s = 4$ صائبة فإنه لا يقتضى بالضرورة

أن تكون (أي لا يؤدي إلى أن) القضية $s = 2$ تكون صائبة تماماً لأن s قد

تكون مساوية للعدد $2 -$ أي أن $s = 2^-$ تحقق المعادلة $s = 4$.

ونعبر عن ذلك بالصورة : $s = 4 \nRightarrow s = 2$

أي $B \nRightarrow A$

الحالة الثانية :

إذا كانت م هي القضية $s = 3$ ، وكانت ن هي القضية $s = 2$. فمن معلوماتنا في الرياضيات نستطيع أن نكتب : $s = 3$ يقتضى أن يكون $s = 2$ (بضرب طرفي المعادلة في ٢) . أي $m \leq n$ وكذلك نستطيع أن نكتب : $s = 2$ يقتضى أن يكون $s = 3$ (بقسمة طرفي المعادلة على ٢) . أي $n \leq m$ لما تقدم فإن $(m \leq n) \wedge (n \leq m)$ ونعبر عن ذلك رمزياً بالصورة المختصرة $m \Leftrightarrow n$

ملاحظة :

١. يعبر الرياضيون أحياناً عن الحالة الأولى بقولهم أن القضية أ شرط كاف لتحقيق القضية ب في حين أن تحقق القضية ب غير كاف لتحقيق أ .
٢. ويعبر الرياضيون عن الحالة الثانية بقولهم أن القضية م تكافئ القضية ن . أو بقولهم أن م شرط لازم وكاف لتحقيق ن . ويستخدم أحياناً الرمز $m \equiv n$ (ويقرأ م تكافئ ن) .
٣. إذا كانت أ ، ب قضيتين فإن الرمز $A \not\equiv B$ يعني نفي الاقتضاء $A \Rightarrow B$ والرمز $A \not\Leftarrow B$ يعني نفي التكافؤ $A \Leftrightarrow B$

القضايا المتكافئة منطقياً :

نلاحظ أحياناً أنه يمكن أن نعبر عن القضية الواحدة بأكثر من صيغة ، وفى نفس الوقت تكون القضايا الناتجة لها قيم الصواب نفسها فنقول في هذه الحالة أنها متكافئة
خذ مثلاً القضيتين :

ع_١ : إذا كان الجو حاراً فإن الليل هادئ

ع_٢ : إذا كان الليل ليس هادئاً فإن الجو ليس حاراً

وإذا فرضنا أن س هي القضية : الجو حار

ط هي القضية : الليل هادئ

فإن ع_١ هي القضية س $\leftarrow$ ط

و ع_٢ هي القضية : $\sim$ ط $\leftarrow$ $\sim$ س

لندرس احتمالات قيم الصواب للقضيتين ع_١ ، ع_٢ من الجدول (١ - ١٥) الآتي:

س	ط	$\sim$ س	$\sim$ ط	س $\leftarrow$ ط	$\sim$ ط $\leftarrow$ $\sim$ س
ص	ص	خ	خ	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ	خ
خ	ص	ص	خ	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص	ص

جدول (١ - ١٥)

نلاحظ من الجدول (١ - ١٥) أن قيم صواب ع_١ (العمود الخامس) هي نفس قيم صواب ع_٢ (العمود السادس) في كل الحالات ففي هذه الحالة نقول أن ع_١ تكافئ ع_٢ منطقياً

تعريف:

إذا كان كل من س ، ط قضيتين و كانت قيم الصواب للقضية س هي نفس قيم الصواب للقضية ط في كل حالة . فإننا نقول أن س تكافئ ط منطقياً ونكتب $S \equiv T$ أو $S \Leftrightarrow T$

نلاحظ أننا لا نستطيع معرفة ما إذا كانت القضيتان متكافئتين أم لا إلا إذا حصلنا على جدول صدق كل منهما . ومن الواضح أن :

١. كل قضية تكافئ نفسها ، أي أن علاقة التكافؤ المنطقي تربط كل قضية بنفسها ، $S \equiv S$ وهي ما تعرف بخاصية الانعكاس .
٢. إذا كانت $S \equiv T$ فإن $T \equiv S$ لأي قضيتين س ، ط وهذه الخاصية تعرف بخاصية التناظر أو التماثل.
٣. وإذا كانت $S \equiv T$ و $T \equiv L$ فإن $S \equiv L$ لأي ثلاث قضايا س ، ط ، ل . وهي ما تعرف بخاصية التعدي.

مثال :

جد القضايا المتكافئة من كل زوج من أزواج القضايا التالية :

١. $\sim (س \wedge ط) ، \sim س \vee \sim ط$
٢. $\sim (س \leftarrow ط) ، \sim س \leftarrow \sim ط$
٣. $(س \leftrightarrow ط) \wedge م ، (س \leftarrow م) \wedge (ط \leftarrow م)$
٤. $س \wedge (ط \vee م) ، (س \wedge ط) \vee (س \wedge م)$

الحل :

يجب أن نرسم جدول صواب كل من هذه القضايا أولاً :

(١)

س	ط	$\sim س$	$\sim ط$	$س \wedge ط$	$\sim (س \wedge ط)$	$\sim س \vee \sim ط$
ص	ص	خ	خ	ص	خ	خ
ص	خ	خ	ص	خ	ص	ص
خ	ص	ص	خ	خ	ص	ص
خ	خ	ص	ص	خ	ص	ص

جدول (١ - ١٦)

لاحظ قيم صدق القضيتين في العمودين الآخرين من الجدول (١ - ١٦) تجد أن :

$$\sim (س \wedge ط) \equiv \sim س \vee \sim ط$$

(٢)

س	ط	س ~	ط ~	س ← ط	~ (س ← ط)	س ~ ← ط ~
ص	ص	خ	خ	ص	خ	ص
ص	خ	خ	ص	خ	ص	ص
خ	ص	ص	خ	ص	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص	خ	ص

جدول (١ - ١٧)

من العمودين الآخرين في الجدول (١ - ١٧) نجد أن:

$$\sim (س \leftarrow ط) \neq س \sim \leftarrow ط \sim$$

تمرين (١ - ٨)

(١) اختبر صحة العلاقات التالية مستعيناً بجداول الصواب:

$$(١) \quad \neg B \leftarrow J \Leftrightarrow \neg J \leftarrow \neg B .$$

$$(٢) \quad \neg (S \vee T) \Leftrightarrow \neg S \wedge \neg T .$$

$$(٣) \quad \neg (S \leftarrow T) \equiv S \vee \neg T .$$

$$(٤) \quad A \leftarrow B \equiv \neg A \vee B .$$

$$(٥) \quad \neg (A \leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) .$$

$$(٦) \quad \neg (A \vee \neg B) \equiv \neg A \wedge B .$$

(٢) اكتب قضايا مكافئة للقضايا التالية:

(أ) ليس صحيحاً أن احمد لديه كتاب أو مجلة .

(ب) ليس صحيحاً أن احمد لديه كتاب ومجلة .

(ج) ليس صحيحاً أن الشمس مشرقة أو المطر ينهمر .

(١ - ٩) خواص الروابط المنطقية

إن للروابط المنطقية خواص تشبه خواص العمليات وسنذكر فيما يلي بعض هذه الخواص:

١- أن كلاً من الرابط « و » والرابط « أو » إبدالي ، أي

$$(ب \wedge ج) \Leftrightarrow (ج \wedge ب)$$

$$(ب \vee ج) \Leftrightarrow (ج \vee ب)$$

٢- أن كلاً من الرابط « و » والرابط « أو » تجميعي ، أي

$$(ب \wedge ج) \wedge ن \Leftrightarrow ب \wedge (ج \wedge ن)$$

$$(ب \vee ج) \vee ن \Leftrightarrow ب \vee (ج \vee ن)$$

٣- أداة الربط « اذا كان ... فإن ... » علاقة متعدية ، أي

$$(ب \leftarrow ج) \wedge (ج \leftarrow ن) \leftarrow (ب \leftarrow ن)$$

٤- الرابط « و » يتوزع على الرابط « أو » والرابط « أو » يتوزع على الرابط « و » ، أي

$$أ \wedge (ب \vee ج) \Leftrightarrow (أ \wedge ب) \vee (أ \wedge ج)$$

$$أ \vee (ب \wedge ج) \Leftrightarrow (أ \vee ب) \wedge (أ \vee ج)$$

٥- قانونا دي مورغان :

$$\sim (أ \vee ب) \Leftrightarrow \sim أ \wedge \sim ب$$

$$\sim (أ \wedge ب) \Leftrightarrow \sim أ \vee \sim ب$$

يمكن إثبات هذه الخواص باستخدام جداول الصواب كما مر بنا في إثبات التكافؤ في الأمثلة السابقة.

(١ - ١٠) القضايا الصائبة والخاطئة منطقياً

بعض القضايا المركبة يكون قيم صوابها صائبة في كل الحالات : مثل هذه القضايا تُسمى قضايا صائبة منطقياً . أو أحياناً تُسمى القضايا التكرارية . كذلك نجد أن بعض القضايا المركبة يكون قيم صوابها خاطئة في كل الحالات ، وهذا النوع من القضايا يُسمى قضايا خاطئة منطقياً أو قضايا التناقض مثلاً خذ القضية $s \sim v$ هذه القضية صائبة منطقياً كما يوضح جدول الصواب التالي:

س	$s \sim$	$s \sim v$
ص	خ	ص
خ	ص	ص

جدول (١-١٨)

أما القضية $s \sim ٨$ فهي قضية تناقض كما يوضح الجدول (١-١٩):

س	$s \sim$	$s \sim ٨$
ص	خ	خ
خ	ص	خ

جدول (١-١٩)

تمرين (١-٩)

كوّن جدول صدق كل من القضايا التالية ثم بين أيّاً منها تكرارية وأيّاً منها تناقض

$$١ / س \leftarrow (س \vee ط)$$

$$٢ / (س \leftrightarrow ط) \wedge (\sim س \leftrightarrow ط)$$

الربط مع الحياة

- نلاحظ من أمثلة وتمارين دروس المنطق الرياضي، التي وردت في هذه الوحدة، أنّ أغلبها مرتبط ارتباطاً مباشراً بحياتنا اليومية، ونجده أيضاً في مجالات أخرى:
١. القوانين والتشريعات: مثل: إذا خالف السائق إشارة المرور، فإنه يُغرم.
 ٢. الحوسبة والذكاء الاصطناعي: حيث إن جميع أجهزة الحاسوب والهواتف، تستخدم المنطق الرياضي.
 ٣. العلوم الطبيعية: في الفيزياء والكيمياء والاحياء، إذ يعتمد بناء التجارب على الفرضيات والاستنتاجات.
 ٤. الطب: مثلاً: إذا كانت الأعراض (أ، ب) موجودة، فإن التشخيص المرجح هو المرض (ج).

و هكذا ،،، .

الوحدة الثانية

المجموعات (الفئات)

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن:

- ١- يتعرّف على مجموعة المجموعات.
- ٢- يجد تقاطع مجموعتين.
- ٣- يتعرّف خواص التقاطع.
- ٤- يتعرّف اتحاد مجموعتين.
- ٥- يتعرّف خواص الاتحاد.
- ٦- يتعرّف الفرق بين مجموعتين.
- ٧- يتعرّف خواص عملية الفرق.
- ٨- يتعرّف المجموعة المتممة.
- ٩- يتعرّف خواص المتممة.
- ١٠- يتعرّف بعض خواص الهامة لعمليتي التقاطع والاتحاد.
- ١١- يكون جداول الانتماء لعمليات الاتحاد والتقاطع والفرق والمتممة.
- ١٢- يتعرّف الفترات.
- ١٣- يتعرّف الفترات غير المحددة.

(٢ - ١) مراجعة

عرفنا أن المجموعة مفهوم هام وأساسي من مفاهيم فروع الرياضيات ويعتبر لغة الرياضيات حيث أن مفاهيم كثيرة مثل العلاقات والدوال تظهر في كل فروع الرياضيات الأخرى مرتبطة بالمجموعة ، وقد سبق أن درسنا في المرحلة الابتدائية معلومات هامة عن المجموعات نلخصها فيما يأتي :

١. المجموعة تَجَمع من الأشياء محددة تحديداً واضحاً لا لبس فيه تُسمّى عناصر.
٢. نرسم للمجموعة بحروف مكبرة مثل س ، ص ، ع ، هـ
٣. أما العناصر فيرمز لها بحروف عادية س ، ص ، ع ،
أو بأسماء أو بأعداد حسب نوعها.
٤. نكتب المجموعة بطريقة رصد العناصر داخل قوسين من النوع { }
وفصل بين كل عنصر وآخر بفاصلة من النوع ، أو تكتب بطريقة
الصفة المميزة إذا عرفنا المجموعة بالخواص التي يجب توافرها في كل
عنصر من عناصرها.
٥. يستخدم الرمز $\in$ للتعبير عن انتماء عنصر ما إلى مجموعة ويستخدم
الرمز $\notin$ لنفي الانتماء.
٦. لا تتغير المجموعة بإعادة ترتيب عناصرها ولا يكرر العنصر الواحد عند
كتابة عناصر المجموعة.

٧. المجموعة الخالية هي التي لا تحتوي على أي عنصر ويرمز لها إما بالرمز $\emptyset$ أو $\{ \}$ حيث أن المجموعة الخالية مجموعة جزئية من أي مجموعة .

٨. من المجموعات ما تعرف بأنها أحادية وهي التي تحتوي على عنصر واحد . أو منتهية إذا أمكن حصر عدد عناصرها . أو مجموعة غير منتهية وهي التي لا يمكن حصر عدد عناصرها .

٩. بالإضافة الى ما سبق تعلمنا أيضاً في المرحلة الابتدائية إذا كان لا يوجد عنصر أو عناصر مشتركة بين مجموعتين أو أكثر نسمي هذه المجموعات مجموعات منفصلة.

١٠. المجموعات المتكافئة هي التي تتساوى في عدد عناصرها .

١١. تتساوى مجموعتان S ، S' إذا كان كل عنصر في S ينتمي إلى S' وكل عنصر في S' ينتمي إلى S ونكتب $S = S'$.

١٢. إذا كانت كل المجموعات الواردة في دراسة مسألة ما هي أجزاء من مجموعة معينة ، تُسمى هذه المجموعة بالمجموعة الشاملة ويرمز لها بالرمز S .

١٣. تكون S مجموعة فرعية (جزئية) من S' (أو S محتواه في S') ، (أو S تحوي S') إذا كان $S \subseteq S'$.

١٤. تمثل المجموعات غير الخالية بأشكال تُسمى أشكال فن وهي أشكال دائرية أو بيضاوية أو مضلعات مغلقة توضع بداخلها أحياناً نقاط تدل على عناصر المجموعة إن كانت محدودة العدد وقليلة أما S فغالباً ما تمثل بمستطيل أو مربع.

مجموعة المجموعات :

علمنا أن كل مجموعة غير خالية تتكون من عدة عناصر وعلمنا أن رمز الانتماء $\in$ أو عدم الانتماء $\notin$ يستعمل لبيان أن عنصراً ما ينتمي إلى مجموعة أم لا .

هناك مجموعات أخرى عناصرها مجموعات ، هذه تُسمى مجموعة المجموعات، ونكتب مجموعة المجموعات داخل قوس من النوع $\{ \}$ ولكن أكبر حجماً من قوس مجموعات العناصر، كما نستعمل الأحرف كرمز لمجموعة المجموعات ولكن بصورة مكبرة مثل : S, V, E

أمثلة لمجموعة مجموعات:

$$S = \{ \{L\}, \{7, 5\}, \{2\} \}$$

$$V = \{ \{7, 5\}, \{2\}, \{4\} \}$$

$$E = \{ \emptyset, \{2\}, \{7, 4\} \}$$

$$\{ \emptyset \} = H$$

$$\{ \{6, 5\} \} = N$$

نستعمل الرمز $\in, \notin$ للدلالة على الانتماء أو عدمه

مثلاً : $\{5, 2\} \in \{ \{5, 2\}, \emptyset \}$

$$\{ \{7, 3\}, \{2\}, \{5, 4\} \} \notin \{7, 6, 4\}$$

كما نستخدم الرمز $\supset$ للدلالة على الاحتواء

$$\{ \{7, 5\}, \{2\}, \emptyset \} \supset \{ \{2\} \}$$

قوة المجموعة : ((أو مجموعة القوة)):

إذا كانت $S = \{7, 4\}$. فإن جميع المجموعات الجزئية من S هي :

$$\{ \emptyset, \{4\}, \{7\}, \{7, 4\} \}$$

تُسمّى المجموعة التي عناصرها هذه المجموعات قوة المجموعة.

$$S = \{\emptyset, \{7, 4\}, \{7\}, \{4\}\}.$$

إذن قوة المجموعة S هي المجموعة التي عناصرها جميع المجموعات الجزئية منها . ويرمز لهذه المجموعة بالرمز 2^S

$$\therefore 2^S = \{\emptyset, \{7, 4\}, \{7\}, \{4\}\}.$$

مثال :

جد مجموعة القوة للمجموعات الآتية :

$$(1) \quad S = \{2\}$$

$$(2) \quad V = \{9, 2\}$$

$$(3) \quad K = \{5, 7, 4\}$$

$$(4) \quad \{ \}$$

الحل :

$$(1) \quad 2^S = \{\emptyset, \{2\}\}$$

$$(2) \quad 2^V = \{\emptyset, \{9, 2\}, \{9\}, \{2\}\}$$

$$(3) \quad 2^K = \{\emptyset, \{5, 7, 4\}, \{5\}, \{7\}, \{4\}, \{5, 7\}, \{5, 4\}, \{7, 4\}\}$$

$$(4) \quad 2^{\{ \}} = \{\emptyset, \{ \}\}$$

نلاحظ أن عدد عناصر 2^S يساوي $2^1 = 2$

و أن عدد عناصر $2^V = 2^2 = 4$

و أن عدد عناصر $2^K = 2^3 = 8$

وبصورة عامة عدد عناصر مجموعة القوة يساوي 2^n مرفوعا إلى أس يساوي عدد عناصر المجموعة.

تمرين (٢ - ١)

- (١) إذا كانت $s = \{ ٥ , ٤ \}$ جد s^2
- (٢) إذا كانت $s = \{ ٣ , ٢ , ١ \}$ جد s^2
- (٣) إذا كانت $s = \{ ٧ , ٦ , ٥ , ٢ \}$ أي العبارات التالية صحيحة وأيها خطأ:

- (أ) $s^2 \supset \{ \}$
- (ب) $s \ni s^2$
- (ج) $s^2 \ni \emptyset$
- (د) $s^2 \ni \{ \emptyset \}$
- (هـ) $s^2 \subset \{ \emptyset \}$
- (و) $s \supset s^2$
- (ز) $s^2 \ni \{ ٥ , ٢ \}$
- (ح) $s^2 \supset \{ ٥ , ٢ \}$
- (ط) $s^2 \supset \{ \{ ٥ , ٢ \} \}$

(٢ - ٢) العمليات على المجموعات

مر بنا في مرحلة سابقة بعض العمليات على المجموعات كالاتحاد ($\cup$) ،
والتقاطع ($\cap$) . والتممة ، والفرق وتعريف مبسط لكل من هذه العمليات ،
فالمثال التالي قد يذكرك ببعض المعلومات السابقة التي درستها .

مثال :

$$\text{ش} = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، \dots ، ٩ \}$$

$$\text{س} = \{ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ \}$$

$$\text{ص} = \{ ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ \}$$

جد :

$$(أ) \text{ س} \cup \text{ص} \quad (ب) \text{ س} \cap \text{ص}$$

$$(ج) \text{ س} - \text{ص} \quad (د) \text{ ص} - \text{س}$$

$$(هـ) \text{ س}'$$

$$(و) \text{ أرسم المجموعات في شكل فن ثم ظلل } (\text{س} \cup \text{ص})'$$

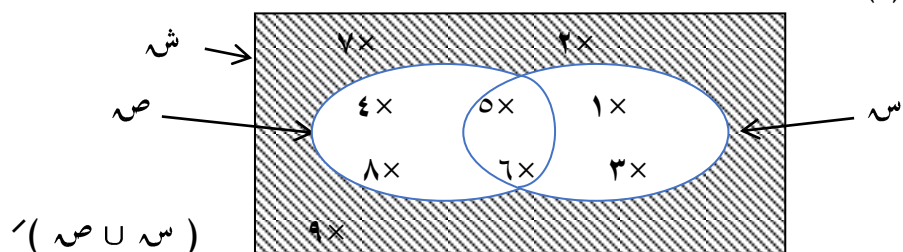
الحل :

$$(أ) \text{ س} \cup \text{ص} = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ \}$$

$$(ب) \text{ س} \cap \text{ص} = \{ ٥ ، ٦ \} \quad (ج) \text{ س} - \text{ص} = \{ ١ ، ٣ \}$$

$$(د) \text{ ص} - \text{س} = \{ ٤ ، ٨ \} \quad (هـ) \text{ س}' = \{ ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ٩ \}$$

(و)



تمرين (٢ - ٢)

(١) إذا كانت $S = \{2, 3, 4, 6\}$ ، $V = \{1, 3, 6, 8\}$

جد : أ) $S \cap V$ ب) $S \cup V$

(٢) إذا كانت $S = \{4, 5, 6, 7, \dots, 10\}$

$S = \{6, 7, 8\}$

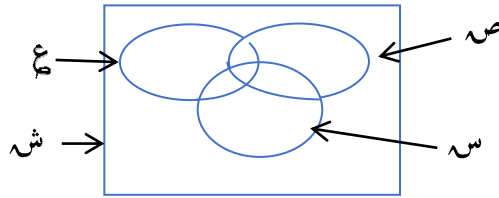
$V = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

جد ثم ظلل :

أ) S' ب) V' ج) $(S \cup V)'$

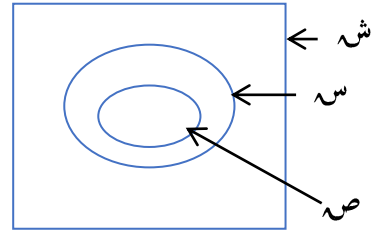
د) $S \cap V$ هـ) $(S \cap V)'$

(٣) أنقل الأشكال التالية ثم ظلل المطلوب:



$(S \cap V \cap E)'$

(ب)



V'

(أ)

(٢ - ٣) تقاطع مجموعتين

علمنا أن تقاطع مجموعتين S ، V هي المجموعة المؤلفة من جميع العناصر التي تنتمي إلى S ، وتنتمي إلى V في نفس الوقت ، ويرمز إلى تقاطعهما بالرمز :

$S \cap V$ نكتب هذا التعريف رمزياً :

$$S \cap V = \{ s : s \in S \text{ و } s \in V \}$$

لاحظ أننا نستخدم حرف العطف (و) ، في تعريف التقاطع وقارن مع أداة الربط (و) في المنطق .

ويمكن تعميم تعريف التقاطع إلى ثلاث مجموعات ، أو أكثر فنقول : أن تقاطع عدد من المجموعات هو مجموعة تتألف من العناصر المشتركة بينها جميعاً .
إذا كان تقاطع مجموعتين يساوي مجموعة خالية فإن المجموعتين منفصلتان .
مثال :

إذا كانت $S = \{ s : s \text{ عدد زوجي أكبر من } 1 \text{ وأقل من } 9 \}$

$$V = \{ 4 , 6 \}$$

$$E = \{ 1 , 3 , 5 \}$$

$$\text{جد (١) } S \cap V \quad \text{(٢) } V \cap E$$

الحل :

$$(١) \quad S \cap V = \{ 4 , 6 \}$$

$$(٢) \quad V \cap E = \emptyset$$

يمكننا تكوين جداول في المجموعات شبيهه بجدول الصواب في قضايا المنطق تُسمّى جداول الانتماء ، لأن العنصر في المجموعة s إما أن ينتمي إلى s ($s \in s$) أو انه لا ينتمي إليها ($s \notin s$) وليس هناك حالة ثالثة، فلو اتخذنا عبارة s تنتمي إلى s ، ورمزنا لها بالرمز $\in$ في مقابلة قيمة الصواب s في المنطق ، وعبارة s لا تنتمي إلى s ورمزنا لها بالرمز $\notin$ في مقابل قيمة الصواب x . والمجموعات في مقابل القضايا لأمكننا تكوين جداول الانتماء وباستخدام مصطلحات المنطق نستطيع ان نكتب

$$s \in s \wedge s \in s \Rightarrow s \in s \vee s \in s$$

$$s \in s \wedge s \notin s \Rightarrow s \notin s$$

$$s \notin s \wedge s \in s \Rightarrow s \in s$$

$$s \notin s \wedge s \notin s \Rightarrow s \notin s$$

يمكن تلخيص ما تقدم في الجدول (٢ - ١) التالي الذي يُسمّى جدول الانتماء لعملية التقاطع :

$s \in s$	s	s
$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

جدول (٢ - ١)

خواص التقاطع :

من تعريف عملية التقاطع تتضح الخواص التالية :

لأي ثلاثه مجموعات S ، V ، E مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة S ، $\emptyset$ المجموعة الخالية نجد أن :

$$(1) S \cap S = S$$

$$(2) \emptyset \cap S = \emptyset$$

$$(3) S \cap S = S$$

$$(4) \text{إذا كان } S \supset V \text{ فإن } S \cap V = V$$

$$(5) (S \cap V) \subseteq S , (S \cap V) \subseteq V$$

$$(6) (S \cap V) = (V \cap S) \text{ (الخاصية الابدالية)}$$

$$(7) (S \cap V) \cap E = S \cap (V \cap E) \text{ (الخاصية التجميعية)}$$

يمكن التحقق من هذه الخواص باستخدام أشكال فن .

الربط مع الحياة

تتجلى أهمية مفهوم التقاطع في ارتباطه بمجالات متعددة، مما يبرز تطبيقاته الواقعية ودوره في الحياة منها :

١. الطب مثلاً : المرضى المصابون بارتفاع ضغط الدم والسكري معاً.
٢. الإحصاء والرياضة مثلاً: اللاعبون الذين سجلوا أكثر من ١٠ أهداف وقدموا أكثر من ٥ تمريرات حاسمة.
٣. الذكاء الاصطناعي مثلاً: التعرف على الوجوه بمطابقة السمات المشتركة بين الصورة والبيانات المسجلة.

تمرين (٢ - ٣)

- (١) جد $S \cap M$ في كل من الحالات الآتية :
- أ) $\{1, 2, 3, 5\} = S$ ، $\{1, 3, 5, 7, 8\} = M$
- ب) $\{3, 7, 8\} = S$ ، $\{8, 3, 7\} = M$
- ج) $\{- , +\} = S$ ، $\{\div , \times\} = M$
- د) S هي مجموعة ارقام العدد ٤٢٠ ، M هي مجموعة أرقام العدد ٦٠٧ .

(٢) لتكن S مجموعة الاشكال الرباعية في مستوى هـ

$$S = \{S : \text{متوازي أضلاع}\}$$

$$M = \{S : \text{مستطيل}\}$$

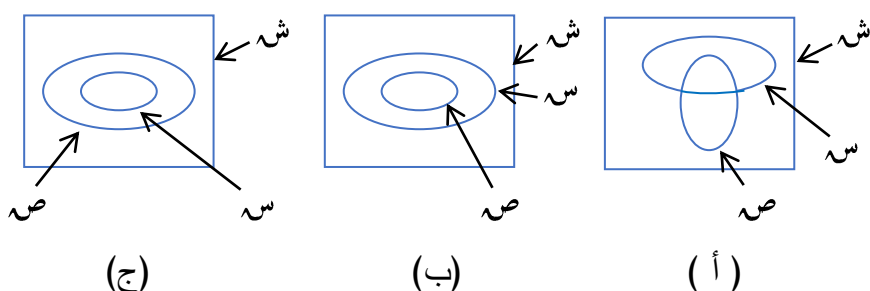
$$V = \{S : \text{س معين}\}$$

$$H = \{S : \text{س مربع}\}$$

مم تتكون المجموعات ؟

$$S \cap M , S \cap V , H \cap M , H \cap V , M \cap V$$

(٣) ظلل $S \cap V$ في كل من الأشكال التالية :



(٢ - ٤) اتحاد مجموعتين

عرفنا سابقاً أنَّ:

اتحاد مجموعتين S ، V هو مجموعة تتألف من جميع العناصر التي تنتمي إلى S أو تنتمي إلى V أو كليهما ونرمز له بالرمز $S \cup V$ ويمكن التعبير عن الاتحاد رمزياً كما يلي :

$$S \cup V = \{ s : s \in S \vee s \in V \}$$

لاحظ استخدام حرف العطف (أو) في تعريف عملية الاتحاد وقارن مع أداة الربط (أو) في المنطق . لاحظ أيضاً أن العناصر التي لا تنتمي إلى الاتحاد هي تلك التي لا تنتمي إلى أي من المجموعتين.

إتحاد عدة مجموعات هو مجموعة تتألف من كافة العناصر التي تنتمي إلى واحدة منها على الأقل.

ويمكن تكوين جدول الانتماء لعملية الاتحاد كما يلي :

$S \cup V$	V	S
$\exists$	$\exists$	$\exists$
$\exists$	$\nexists$	$\exists$
$\exists$	$\exists$	$\nexists$
$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$

جدول (٢ - ٢)

خواص الاتحاد :

من تعريف عملية الاتحاد نستنتج مباشرة الخواص التالية :

حيث S المجموعة الشاملة ، $\emptyset$ المجموعة الخالية S ، V ، E ، أي
ثلاث مجموعات جزئية من S :

$$1. S \cup S = S$$

$$2. S \cup S = S$$

$$3. S \cup \emptyset = S$$

$$4. S \supseteq S \cup V, S \supseteq S \cup E$$

$$5. \text{ إذا كانت } S \supset V \text{ فإن } S \cup V = S$$

$$6. S \cup V = S \cup E \text{ (الخاصية الإبدالية) }.$$

$$7. (S \cup V) \cup E = S \cup (V \cup E) \text{ (الخاصية التجميعية).}$$

مثال :

$$\text{إذا كانت } S = \{A, B, C, D\}$$

$$V = \{B, C, D, H\}$$

$$E = \{A, H\}$$

$$(2) V \cup E$$

$$(1) S \cup E$$

جد :

$$(4) S \cup (V \cup E)$$

$$(3) E \cup V$$

$$(5) (S \cup V) \cup E$$

الحل :

$$1. S \cup E = \{A, B, C, D, H\}$$

$$2. V \cup E = \{A, B, C, D, H\}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \mathcal{E} \cup \mathcal{H} &= \{أ، ب، ج، هـ\} \\
4. \quad \mathcal{S} \cup (\mathcal{H} \cup \mathcal{E}) &= \{أ، ب، ج، د\} \cup \{أ، ب، ج، هـ\} \\
&= \{أ، ب، ج، د، هـ\} \\
5. \quad (\mathcal{S} \cup \mathcal{H}) \cup \mathcal{E} &= \{أ، ب، ج، د، هـ\} \cup \{أ، هـ\} \\
&= \{أ، ب، ج، د، هـ\}
\end{aligned}$$

تمرين (٢ - ٤)

$$\begin{aligned}
(1) \quad \text{إذا كانت } \mathcal{S} &= \{٧، \dots، ٢، ١، ٠\} \\
\mathcal{H} &= \{٨، ٧، ٥\} \\
\mathcal{E} &= \{٧، ٦، ٥، ١\} \\
\text{جد : } (1) \quad \mathcal{H} \cup \mathcal{E} \quad (2) \quad \mathcal{S} \cup \emptyset \quad (3) \quad \mathcal{S} \cup (\mathcal{H} \cup \mathcal{E}) \\
(2) \quad \text{إذا كانت : } \mathcal{S} &= \{٨، ٧، ٦، ٤\} \\
\mathcal{H} &= \{٧، ٦\} \\
\mathcal{E} &= \{١١، ٩، ٥\} \\
&\text{أرسم ثم ظلل ما يأتي :} \\
(1) \quad \mathcal{S} \cap \mathcal{H} \quad (2) \quad \mathcal{S} \cup \mathcal{E} \quad (3) \quad \mathcal{H} \cap \mathcal{E} \\
(4) \quad \mathcal{S} \cup \mathcal{H} \quad (5) \quad \mathcal{H} \cup \mathcal{E} \\
(3) \quad \text{إذا كانت } \mathcal{S} &= \{س : س \text{ رقم من أرقام العدد } ٣١٠\} \\
\mathcal{H} &= \{س : س \text{ رقم من أرقام العدد } ٧٠٨\} \\
\text{جد : } (1) \quad \mathcal{S} \cup \mathcal{H} \quad (2) \quad \mathcal{S} \cap \mathcal{H}
\end{aligned}$$

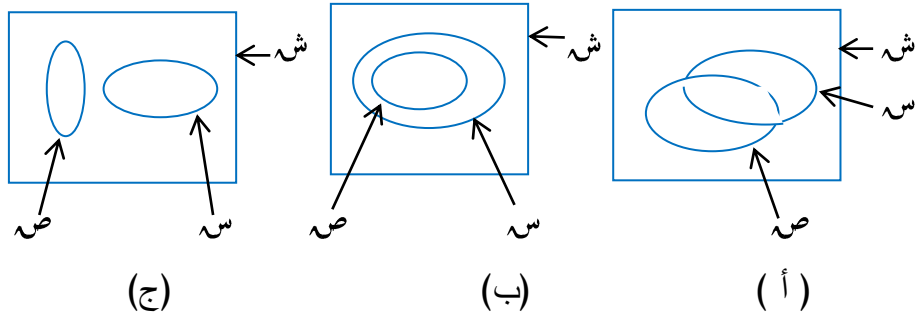
(٤) إذا كانت هـ مجموعة طلاب الصف الأول بمدرستك وكانت

$$س هـ = \{ س : س \in هـ ، س ناجح في الرياضيات \}$$

$$ص هـ = \{ ص : ص \in هـ ، ص ناجح في الكيمياء \}$$

جد : $س \cup ص$.

(٥) ظلل $س \cup ص$ في الأشكال التالية:



نجد عملية الاتحاد في العديد من المجالات منها :

الربط مع الحياة

١. الحوسبة وقواعد البيانات مثلاً: جميع الطلاب الناجحين في الرياضيات

أو الفيزياء أو كلاهما.

٢. الاقتصاد والتسويق مثلاً: جميع العملاء الذين يشترون هواتف أو

حواسيب أو كلاهما.

٣. القانون مثلاً: كل السائقين المخالفين سواء بدون رخصة أو بسرعة

زائدة.

(٢ - ٥) الفرق بين مجموعتين

عرفنا سابقاً أن:

الفرق بين مجموعتين S ، V هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى S ولا تنتمي إلى V . ونرمز لهذا الفرق بـ $(S - V)$ أو S / V أي : $S - V = \{x : x \in S \text{ و } x \notin V\}$.

مثال :

لتكن $S = \{0, 3, 5, 7, 9\}$

$V = \{2, 3, 5, 9\}$

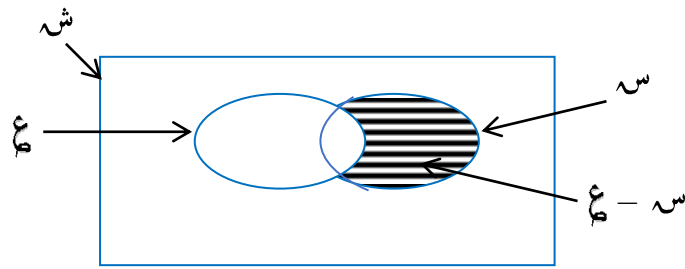
ش = مجموعة الأعداد الصحيحة .

جد : $S - V$ و $V - S$ ، ثم ظلل $S - V$ في شكل فن

الحل :

$S - V = \{0, 3, 7\}$

$V - S = \{2, 3\}$



إذا تأملت شكل فن السابق ستجد أن :

$$(S - E) \cup (S \cap E) \cup (E - S) = S \cup E$$

يمكن بطريقة مشابهة تكوين جدول الانتماء للفرق بين مجموعتين

الجدول (٢ - ٣)

S	E	S - E
∃	∃	∅
∃	∅	∅
∅	∃	∅
∅	∅	∅

جدول (٢ - ٣)

خواص عملية الفرق:

يتضح من تعريف عملية الفرق ما يلي، حيث S المجموعة الشاملة، S ، E

مجموعتان جزئيتان منها

$$(1) S - S = \emptyset$$

$$(2) S - S = \emptyset$$

$$(3) S - E \subseteq S$$

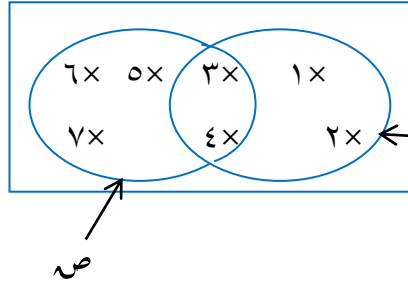
$$(4) S - \emptyset = S$$

$$(5) \emptyset - \emptyset = \emptyset$$

$$(6) S - E \neq E - S$$

يمكن التحقق من صحة هذه النتائج بالاستعانة بأشكال فن

تمرين (٢ - ٥)



(١) من الشكل المقابل اوجد :

(أ) $س$ (ب) $ص$

(ج) $س \cap ص$

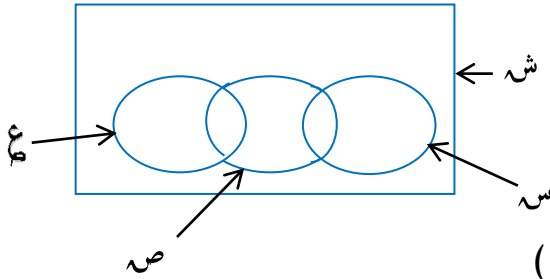
(د) $س - ص$

(هـ) $ص - س$

(و) $س - (س \cap ص)$ (ز) $ص - (س \cap ص)$

(٢) في الشكل أدناه ظلل المنطقة التي تمثل المجموعات التالية :

(كل مجموعة في شكل)



(أ) $س - ص$

(ب) $س - ع$

(ج) $(س \cup ص)$

(د) $ع - (س \cup ص)$

(٣) اذا كانت $س$ ، $ص$ مجموعتين منفصلتين فاثبت أن :

$$س - ص = ص - س , \quad ص - س = ص$$

يمكننا ان نجد عملية الفرق في العديد من المجالات منها:

الربط مع الحياة

١. التكنولوجيا مثلاً: مستخدمو تطبيق فيسبوك الذين لا يستخدمون إنستجرام.

٢. التعليم مثلاً: الطلاب الناجحون في الرياضيات فقط دون الفيزياء.

٣. إدارة الأعمال مثلاً: العملاء الذين يشترون هواتف فقط دون شراء حواسيب.

(٢ - ٦) المجموعة المتممة

عرفنا سابقاً أن:

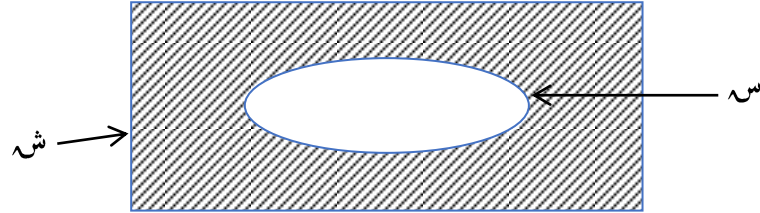
متممة المجموعة S ونرمز لها بالرمز S' هي مجموعة عناصر المجموعة الشاملة S التي لا تنتمي إلى S . ونكتب رمزياً
 $S' = S - S$ أو $S' = \{ S : S \in S \text{ و } S \notin S' \}$

جدول الإنتماء للمجموعة المتممة

S'	S
$\notin$	$\in$
$\in$	$\notin$

جدول (٢ - ٤)

في الشكل أدناه المنطقة المظللة تمثل S'



مثال (١) :

لتكن S مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة .
 S مجموعة الأعداد الزوجية . ماذا تمثل متممة S

الحل :

S' تمثل مجموعة الأعداد الفردية .

مثال (٢) :

$$\{ ٧ , ٥ , ٣ , ١ \} = س$$

$$\{ ٨ , ٥ , ٤ , ٢ \} = ص$$

$$\{ ٩ , \dots , ٢ , ١ \} = ش$$

جد : (أ) $س'$ (ب) $ص'$ (ج) $(س \cup ص)'$ (د) $ص - س'$

الحل :

$$(أ) \quad \{ ٩ , ٨ , ٦ , ٤ , ٢ \} = س'$$

$$(ب) \quad \{ ٩ , ٧ , ٦ , ٣ , ١ \} = ص'$$

$$(ج) \quad \{ ٩ , ٦ \} = \{ ٨ , ٧ , ٥ , ٤ , ٣ , ٢ , ١ \}' = (س \cup ص)'$$

$$(د) \quad \{ ٥ \} = \{ ٩ , ٨ , ٦ , ٤ , ٢ \} - \{ ٨ , ٥ , ٤ , ٢ \} = ص - س'$$

خواص المتممة :

من تعريف المتممة يتضح ما يلي :

إذا كانت $س$ ، $ص$ مجموعتين جزئيتين من المجموعة الشاملة $ش$ نجد أن :

$$(١) \quad ش = ش' \cap \emptyset , \quad \emptyset = ش' \cap ش$$

$$(٢) \quad ش = ش' \cap (ش' \cap ش)$$

$$(٣) \quad \emptyset = ش' \cap ش \cap ش'$$

$$(٤) \quad ش = ش' \cap (ش \cup ش')$$

$$(٥) \quad ش \supseteq ش' \cap ص \leftarrow ص \supseteq ش \cap ش'$$

مثال (٣):

مستخدمًا جداول الانتماء اثبت أن : $s - v = s \cap v'$

الحل :

نكوّن جدول الانتماء بطريقة مشابهة لتلك التي اتبعناها في جداول المنطق علما بأن انتماء العنصر لمجموعة ما ينفي انتماءه لمتتمتها والعكس صحيح :

s	v	v'	$s - v$	$s \cap v'$
$\exists$	$\exists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
$\exists$	$\nexists$	$\exists$	$\exists$	$\exists$
$\nexists$	$\exists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
$\nexists$	$\nexists$	$\exists$	$\nexists$	$\exists$

جدول (٢ - ٥)

لاحظ من تطابق العمودين الأخيرين في الجدول (٢ - ٥) أن :

$$s - v = s \cap v'$$

الربط مع الحياة

١. الجغرافيا مثلاً: إذا كانت (أ) = سكان مدينة الخرطوم ، فالمتمة = من لا يسكنون الخرطوم.

٢. الصحة العامة مثلاً: إذا كانت (ب) = الأطفال المطعمون ضد الشلل ، فالمتمة = غير المطعمين.

٣. الجيولوجيا مثلاً: إذا كانت (ل) = المناطق ذات التربة الطينية، فالمتمة = المناطق غير الطينية.

تمرين (٢ - ٦)

١. جد ما يأتي :
 (أ) $S \cap \emptyset$ (ب) $S - S'$
 (ج) $S' \cup S$ (د) $S \cap S'$
٢. استخدم شكل فن لإثبات أن $S - S' = S \cap S'$
٣. لتكن S مجموعة الاعداد الزوجية من ٢ إلى ٢٠
 ولتكن S' المجموعة الجزئية من S المكونة من مضاعفات العدد ٤ ،
 S'' المجموعة الجزئية من S المكونة من مضاعفات العدد ٣ ، اكتب :
 (أ) S (ب) S' (ج) S'' (د) $S \cap S'$
 (هـ) $(S \cup S')$ (و) $(S \cap S'')$
٤. مستخدماً جداول الانتماء اثبت مايلي :
 (أ) $(S' \cap S'')' = S \cup S''$ (ب) $S - S' = S \cap S'$
٥. فصل به مجموعة من الطلاب وعددهم ٥٠ يحتوي على ثلاث مجموعات
 S ، S' ، S'' . حيث .
 S = مجموعة الطلاب الذين يمارسون كرة القدم وعددهم ٣٥ طالب.
 S' = مجموعة الطلاب الذين يمارسون كرة الطائرة وعددهم ٢٠ طالب.
 S'' = مجموعة الطلاب الذين يمارسون اللعبتين معاً وعددهم ١٢ طالب.
 أحسب كلاً مما يأتي :
- ١- عدد الطلاب الذين يمارسون كرة القدم فقط .
- ٢- عدد الطلاب الذين يمارسون كرة الطائرة فقط .
- ٣- عدد الطلاب الذين لا يمارسون كرة القدم .
- ٤- عدد الطلاب الذين لا يمارسون كرة الطائرة .
- ٥- عدد الطلاب الذين لا يمارسون أيّاً من اللعبتين .

(٢ - ٧) بعض الخواص الهامة لعمليتي التقاطع والاتحاد

إلى جانب الخاصيتين الابدالية والتجميعية اللتين ذكرتا سابقاً لكل من عمليتي

التقاطع والاتحاد ، هناك خواص هامة نذكرها فيما يلي :

لتكن S ، V ، E أي ثلاث مجموعات فإن :

(١) عملية التقاطع تتوزع على عملية الاتحاد ، أي

$$S \cap (V \cup E) = (S \cap V) \cup (S \cap E)$$

(٢) عملية الاتحاد تتوزع على عملية التقاطع :

$$S \cup (V \cap E) = (S \cup V) \cap (S \cup E)$$

(٣) قانون دومورغان الأول :

$$(S \cup V)' = S' \cap V'$$

(٤) قانون دومورغان الثاني :

$$(S \cap V)' = S' \cup V'$$

ويمكن استخدام جداول الانتماء لاثبات هذه الخواص أو أي من الخواص التي سبق ذكرها .

مثال لاثبات قانون دومورغان الاول

$$(S \cup V)' = S' \cap V'$$

نكوّن الجدول وفي هذه الحالة نحتاج لجدول لأربعة احتمالات لأن عدد

المجموعات الداخلة في تكوين هذه العلاقة مجموعتان فقط S ، V .

اما في الحالة السابقة لأن عدد المجموعات ثلاث S ، V ، E فقد لزمنا

تكوين جدول لثمانية احتمالات.

s	v	s'	v'	$s \cup v$	$(s \cup v)'$	$s' \cap v'$
$\exists$	$\exists$	$\nexists$	$\nexists$	$\exists$	$\nexists$	$\nexists$
$\exists$	$\nexists$	$\nexists$	$\exists$	$\exists$	$\nexists$	$\nexists$
$\nexists$	$\exists$	$\exists$	$\nexists$	$\exists$	$\nexists$	$\nexists$
$\nexists$	$\nexists$	$\exists$	$\exists$	$\nexists$	$\exists$	$\exists$

جدول (٢ - ٦)

نلاحظ من تطابق العمودين الأخيرين في الجدول (٢ - ٦) أن :

$$(s \cup v)' = s' \cap v'$$

وبالمثل يمكن اثبات كثير من الخواص وباستخدام جداول الانتماء :

مثال :

مستعملا جداول الانتماء أثبت أن :

$$\emptyset = v \cap (s - v)$$

الحل :

$$\emptyset = v \cap (s - v)$$

s	v	$s - v$	$v \cap (s - v)$	$\emptyset$
$\exists$	$\exists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
$\exists$	$\nexists$	$\exists$	$\nexists$	$\nexists$
$\nexists$	$\exists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
$\nexists$	$\nexists$	$\exists$	$\nexists$	$\nexists$

جدول (٢ - ٧)

من العمودين الأخيرين في الجدول (٢ - ٧) يتضح أن :

$$\emptyset = v \cap (s - v)$$

تمرين (٢ - ٧)

مستعملًا جداول الانتماء اختبر صحة كلاً مما يأتي :

$$(١) \quad S - \emptyset = S$$

$$(٢) \quad S - S' = S \cap S'$$

$$(٣) \quad S \cup S' = (S \cap S')$$

$$(٤) \quad \emptyset = (A \cap B) \cap (A - B)$$

(٢-٨) الفترات

علمنا سابقاً عندما درسنا المتباينات في رحلة سابقة انه إذا كان العدد الحقيقي s أصغر من العدد الحقيقي v فإننا نكتب $s < v$. وعلى خط الأعداد تظهر النقطة التي تمثل العدد s على يسار النقطة التي تمثل العدد v . ونعلم كذلك أنه إذا كان s ، v ، e أعداداً حقيقية فإنه :

إما $s < v$ أو $s = v$ أو $s > v$.

١- إذا كان $s > v$ فإن $s + e > v + e$.

٢- إذا كان $s > v$ ، e عدد موجب فإن $s + e > v + e$.

٣- إذا كان $s > v$ ، e عدد سالب فإن $s + e < v + e$.

٤- إذا كان $s > v$ ، $v > e$ فإن $s > e$.

٥- إذا كان $s < v$ ، $s = v$ نكتب $s \leq v$ وإذا كان

$s > v$ أو $s = v$ نكتب $s \geq v$.

ويمكن كتابة ذلك في صورة متباينة واحدة مركبة كالتالي :

$s \leq v$ أو $s \geq v$.

الفترات :

إذا اعتبرنا كل مجموعة من مجموعات الأعداد الآتية مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

(مجموعة الأعداد الحقيقية) :

$$(1) \{s : s > 3\} = I_3^+$$

$$(2) \{s : s \geq 3\} = I_3^+$$

$$(3) \{s : s > 3\} = I_3^+$$

$$(4) \{s : s \geq 3\} = I_3^+$$

مثل هذه المجموعات تطلق عليها اسم فترات فاذا رمزنا لها بالرمز $f_1, f_2, f_3, \dots$ ، بالترتيب يمكن اعادة كتابتها بالطريقة التالية :

$f_1 = (3, 7)$ وتُسمى فترة مفتوحة .

$f_2 = [3, 7]$ وتُسمى فترة مغلقة .

$f_3 = (3, 7]$ وتُسمى فترة مفتوحة مغلقة .

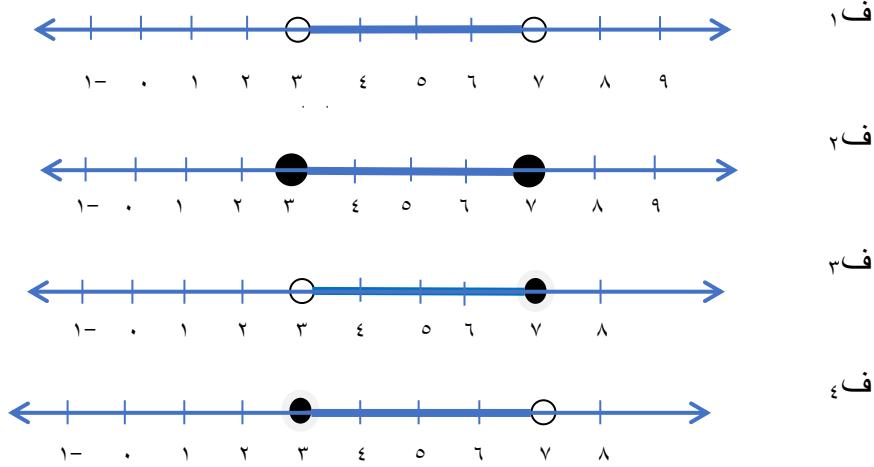
$f_4 = [3, 7)$ وتُسمى فترة مغلقة مفتوحة .

هذه الفترات تحتوي على النقاط التي تقع بين 3 ، 7 مع إمكانية وجود أحدهما أو كليهما ضمن المجموعة (الفترة) كما يتضح من الفترات السابقة ففي الفترة f_1 الممثلة للمجموعة $(3, 7)$ نجد أن 3 ، 7 لا تنتمي لهما ، لذلك سميت فترة مفتوحة ومثلت أقواسها بالشكل () واما الفترة f_2 فتعتبر فترة مغلقة ، لأنها تحتوي على النهايتين 3 ، 7 ونكتب اقواسها بالشكل [] . أما الفترة f_3 فتعتبر مفتوحة مغلقة ، لأن النهاية 3 لا تنتمي للفترة بينما تنتمي لها النهاية 7 ولذلك نكتب أقواسها على الصورة (] أما الفترة f_4 فهي فترة مغلقة مفتوحة لانتماء النهاية 3 لها وعدم انتماء النهاية 7 لها فأقواسها تكتب بالشكل [) أحياناً نستخدم طريقة كتابة الأقواس التالية :

للفترة المغلقة نكتب : [، ب] ، وللمفتوحة يكتب : (، ب)

وللمغلقة المفتوحة : [، ب) ، وللمفتوحة المغلقة : (، ب]

ويمكن أن نمثل الفترات على خط الأعداد بالصورة التي تمثل بها المتباينات :
أنظر الشكل الآتي لتمثيل الفترات السابقة على خط الأعداد ولاحظ انتماء النهايتين للفترة أو عدم انتمائها كيف يمثل.



الفترات غير المحددة :

إن بعض المجموعات تمثل فترات غير محددة كما تبدو من المجموعات التالية:

$$\{s : s < 1\} = {}^s_1$$

$$\{s : s \leq 3\} = {}^s_3$$

$$\{s : s > 2\} = {}^s_2$$

$$\{s : s \geq 5\} = {}^s_5$$

$$\{s : s \in \mathbb{R}\} = {}^s_0$$

إذا عبرنا عن المجموعات السابقة كفترات تكتب على الصورة التالية :

$$({}^\infty, 1) = {}^s_1$$

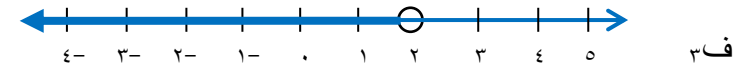
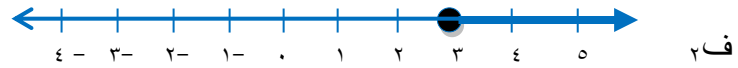
$$({}^\infty, 3] = {}^s_3$$

$$(2, {}^\infty) = {}^s_2$$

$$[5, {}^\infty) = {}^s_5$$

$$({}^\infty+, {}^\infty-) = {}^s_0$$

نرسم الفترات غير المحددة على خط الأعداد هكذا :



الربط مع الحياة

يمكننا رؤية ارتباط الفترات و استخدامها في كثير من المجالات من حولنا منها :

١. الفيزياء والكيمياء مثلاً: عمر نصف مادة مشعة يقع في الفترة (٢ ، ٥) سنوات.

٢. الزراعة مثلاً : موسم زراعة القمح في السودان بين [نوفمبر ، ديسمبر]

٣. العمل مثلاً : الدوام في العمل [٨ ص ، ٤ م) (يشمل ٨ صباحاً و لا يشمل ٤ مساءً)

تمرين (٢ - ٨)

(١) عبّر عن المجموعات التالية في صورة فترات:

(أ) $S = \{s : \text{عدد حقيقي بين } 5, 11\}$

(ب) $S = \{s : 2 < s \leq 7, s \in \mathbb{R}\}$

(ج) $S = \{s : s \leq 6\}$

(د) $S = \{s : \text{عدد حقيقي موجب}\}$

(هـ) $S = \{s : s < 2 \text{ و } s > 5\}$

(٢) مثل الفترات التالية على خط الأعداد :

(أ) $[-2, 4)$ (ب) $(-\infty, 0)$

(ج) $[3, 5]$ (د) $(-\infty, 7)$

(هـ) $[3, \infty)$ (و) $(-\infty, -2]$

(٣) أكتب الفترات الممثلة على خطوط الأعداد التالية :



ف١



ف٢



ف٣



ف٤

الوحدة الثالثة



أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :-

- ١- يتعرّف الزوج المرتّب .
- ٢- يتعرّف حاصل ضرب الديكارتى .
- ٣- يتعرّف مفهوم العلاقة .
- ٤- يتعرّف العلاقة العكسية .
- ٥- يتعرّف علاقة يقسم .
- ٦- يتعرّف العلاقة الانعكاسية .
- ٧- يتعرّف العلاقة المتماثلة .
- ٨- يتعرّف العلاقة المتعدية (الناقلة).
- ٩- يتعرّف علاقة التكافؤ.

مراجعة

(٣ - ١) الزوج المرتب

تعلمنا في المرحلة المتوسطة أن الزوج المرتب يتكون من عنصرين s ، v يُسمى العنصر الأول المكوّن (المسقط) الأول ، والعنصر الثاني المكوّن (المسقط) الثاني ويكتب هكذا (s ، v) . كما علمنا أهمية الترتيب عند كتابة الزوج المرتب. فالزوج المرتب (٧ ، ٥) $\neq$ (٥ ، ٧) وعموما فإن (s ، v) $\neq$ (v ، s) إلا إذا كان $s = v$ كما أن (s ، v) $\neq$ { s ، v } لأنهما شيئان مختلفان ، كما يجب ألا نستعمل عبارات مثل $s \in (s, v)$.
أما s ، v فليس بزواج مرتب بينما (٣ ، ٣) ، (s ، s) أزواج مرتبة.

مثال : (١)

إذا كان (٥ ، $١ - v$) = ($s + ٢$ ، ٣) . جد قيم s ، v

الحل :

$$(٥, ١ - v) = (s + ٢, ٣)$$

$$٥ = s + ٢$$

$$٣ = ١ - v = s$$

$$٣ = ١ - v \Rightarrow v = ١ - ٣ = -٢$$

مثال : (٢)

إذا كان (٢ ، س - ص) = (س + ص ، ٦) جد قيمة كل من س ، ص

الحل :

من خاصية تساوى الأزواج المرتبة

$$(١) \quad ٢ = ص + س$$

$$(٢) \quad ٦ = ص - س$$

$$\text{بالجمع } ٢ = ص - ٨ \Leftarrow س = ٤$$

وبالتعويض فى (١)

$$٤ + ص = ٢ \Leftarrow ص = ٢ - ٤ \therefore ص = -٢$$

تمرين (٣ - ١)

جد قيمة كل من س ، ص فيما يأتى :

$$١. \quad (س - ١ ، ٥) = (٢ ، ص + ١) .$$

$$٢. \quad (٢ س + ٣ ، ١) = (٥ ، ٣ ص - ٤) .$$

$$٣. \quad (٣ ، س - ص) = (س + ص ، ١) .$$

$$٤. \quad (٢ س + ص ، ٣) = (٧ ، ٣ س - ص) .$$

$$٥. \quad (ص - ٢ ، ٢ س + ١) = (س - ١ ، ص + ٢) .$$

$$٦. \quad (س + ٣ ص ، ١١) = (١ ، س - ٢ ص) .$$

$$٧. \quad (س + ٥ ص ، ٨) = (٤ ، ٢ س - ٥ ص) .$$

(٣ - ٢) حاصل الضرب الديكارتي

إذا كانت S ، V مجموعتين ، نعلم أن $S \times V$ تعرف بحاصل الضرب الديكارتي لـ S ضرب V وهي مجموعة كافة الأزواج المرتبة التي ينتمي المكوّن الأول من كل زوج منها للمجموعة S ، وينتمي المكوّن الثاني للمجموعة V أي $S \times V = \{ (s, v) : s \in S, v \in V \}$

أمثلة :

١. إذا كان $S = \{ ٥, ٧ \}$ ، $V = \{ ٢, ٣ \}$ فإن $S \times V = \{ (٢, ٥), (٣, ٥), (٢, ٧), (٣, ٧) \}$ بينما $V \times S = \{ (٢, ٥), (٣, ٥), (٢, ٧), (٣, ٧) \}$
٢. وإذا كان $S = \{ ٢, هـ \}$ فإن $S \times S = \{ (٢, ٢), (٢, هـ), (هـ, ٢), (هـ, هـ) \}$
٣. وإذا كان $S = \{ أ \}$ فإن $S \times S = \{ (أ, أ) \}$

تمرين (٣ - ٢)

(١) إذا كان $S = \{ ٨ ، ٦ \}$ ، $V = \{ ٤ ، ٣ ، ٢ \}$ ، جد :

(أ) $S \times V$

(ب) $V \times S$

(ج) $S \times S$

(د) $V \times V$

(٢) إذا كان $E = \{ ٢ ، ٩ \}$ اوجد

(أ) $\{ ٥ \} \times E$ (ب) $E \times \{ ٥ \}$

(ج) $\{ ٠ \} \times E$ (د) $E \times E$

(٣) إذا كان $S = \{ ٥ ، ٤ ، ٣ \}$ ، $V = \{ ٦ ، ٥ ، ٤ \}$ ، جد :

أ. $(S \cup V) \times S$

ب. $(S \cap V) \times V$

ج. $(S - V) \times (V - S)$

(٣ - ٣) العلاقة

عرفنا سابقاً أنه إذا كانت لدينا مجموعتان S ، V فإنه يمكن تعريف تكوين علاقة من S إلى V إما بقاعدة اقتران محددة او بمخطط سهمي . فإذا كان $E : S \leftarrow V$ فإن المجموعة الأولى S تُسمى مجال العلاقة بينما تُسمى المجموعة الثانية V المجال المقابل للعلاقة . أما مجموعة صور المجال الموجودة في المجال المقابل فتُسمى مدى العلاقة . بما أن العلاقة هي مجموعة عناصرها أزواج مرتبة ، فإن هذه الأزواج المرتبة تُسمى بيان العلاقة . وقد مر بنا تعريف العلاقة وهو : ارتباط من مجموعة غير خالية S إلى مجموعة غير خالية V وهي مجموعة جزئية من $S \times V$. وهذا يعني أنه إذا كان (s, v) ، فإن ذلك يكتب عادة $s E v$ ويقرأ s ترتبط مع v بالعلاقة E . نفي العبارة $s E v$ هو $s \not E v$ أو $(s, v) \notin E$.

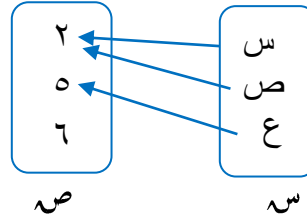
إذا كانت المجموعة $V = S$ يبقى التعريف نفسه، وتكون العلاقة من مجموعة S إلى S نفسها . وفي هذه الحالة نقول أن العلاقة معرفة على المجموعة S .

تعريف :

العلاقة على مجموعة S هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي $S \times S$. والرمز (s, s) أو $s E s$ يعني أن العنصر s من S يرتبط مع العنصر s من S بالعلاقة E وتكون المجموعة S مجال العلاقة ومجالها المقابل .

مثال : (١)

إذا كانت $س = \{س، ص، ع\}$ ، $ص = \{٢، ٥، ٦\}$
وكانت $ع$ علاقة من $س$ إلى $ص$ معرفة بالمخطط السهمي :
في الشكل (١ - ٣)



الشكل (١ - ٣)

نجد أن :

١. $ع = \{(س، ٢)، (ص، ٢)، (ع، ٥)\}$.
٢. $س$ مجال العلاقة ، $ص$ مجالها المقابل .
٣. $\{٥، ٢\}$ هي مدى العلاقة .
٤. $(س، ٢) \in ع$ أو $س$ $ع$ ٢ بينما $(٦، ص) \notin ع$ أو $ص$ $ع$ ٦ .
٥. $ع \supset س \times ص$
٦. $ع^{-1} = \{(٢، س)، (٢، ص)، (٥، ع)\}$ وتُسمى العلاقة العكسية .

مثال : (٢)

إذا كانت $\{ ١٥ ، ٩ ، ٧ \} = س$

$\{ ١٦ ، ١١ ، ٩ \} = ص$

$\{ (س ، ص) : س > ص \} = ع١$

$\{ (س ، ص) : س = ٢ + ص \} = ع٢$

أكتب $ع١$ ، $ع٢$ في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة ثم ارسم المخطط السهمي لكل علاقة .

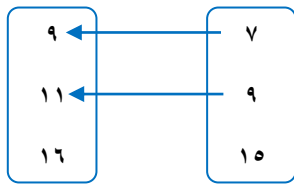
الحل :

$ع١ = \{ (٩ ، ٧) ، (١١ ، ٧) ، (١٦ ، ٧) ، (١١ ، ٩) ، (١٦ ، ٩) ،$

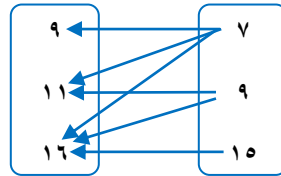
$\{ (١٦ ، ١٥) \}$

$ع٢ = \{ (١١ ، ٩) ، (٩ ، ٧) \}$

المخططان السهميان $(٢ - ٣)$ ، $(٣ - ٣)$ يمثلان العلاقتين $ع١$ ، $ع٢$



س ص
الشكل (٣ - ٣)



س ص
الشكل (٢ - ٣)

مثال : (٣)

إذا كانت $S = \{ ٥ , ٤ , ٢ \}$

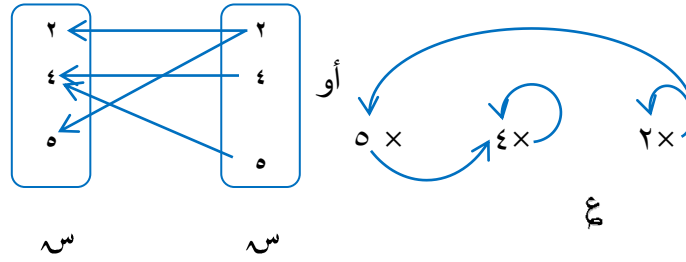
وكانت R علاقة على المجموعة S حيث :

$$R = \{ (٤ , ٥) , (٤ , ٤) , (٥ , ٢) , (٢ , ٢) \}$$

ارسم R بمخطط سهمي

الحل :

المخطط السهمي بالشكل (٣ - ٤) يمثل العلاقة R



الشكل (٣ - ٤)

الشكل $\hookrightarrow$ يُسمّى عروة وهو سهم من العنصر إلى نفسه

تمرين (٣ - ٣)

(١) إذا كانت $s = \{ ٩ , ٨ , ٣ \}$ ، $v = \{ ١٠ , ٦ , ٤ \}$ كَوْن مخططاً سهمياً يمثل العلاقة (أكبر من) من المجموعة s إلى المجموعة v .

(٢) إذا كانت $s = \{ ١١ , ٧ , ٥ , ٢ \}$. كَوْن مخططاً سهمياً يمثل علاقة (أصغر من) على المجموعة s .

(٣) إذا كانت $v = \{ ١٠ , ٨ , ٥ , ٤ , ٣ \}$. ارسم مخطط العلاقة (s ضعف v) على المجموعة v .

(٤) إذا كان $s = \{ ١٠ , ٨ , ٦ , ٤ , ٢ \}$ ، $e : s \leftarrow s$ اكتب $e = \{ (s, s) : s + v > ٩ , s , v \exists s \}$ في شكل أزواج مرتبة .

(٥) إذا كانت $s = \{ ٩ , ٤ , ٣ , ٢ \}$ ، e علاقة على s بحيث

$e = \{ (s, v) : s = ٢ = v \}$ اكتب e في شكل أزواج مرتبة .

(٦) إذا كانت $v = \{ -٢ , -١ , ٠ , ١ , ٢ , ٣ \}$

$e = \{ ١ , ٢ , ٥ , ١٠ \}$

$e : v \leftarrow e$ حيث $e (s) = s + ١$ لكل $s \in v$

أ. أكتب e في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة .

ب. ارسم المخطط السهمي الذي يبين العلاقة e .

(٧) إذا كانت $s = \{ -٢ , ٠ , ٣ \}$ ، $v = \{ -٧ , -١ , ٨ \}$

e علاقة من s إلى v بحيث

$e = \{ (s, v) : v = ٣ - s , s \exists s , v \exists v \}$

أكتب e بذكر عناصرها .

(٣ - ٤) بعض العلاقات الهامة

(١) علاقة يقسم (القسمة) : نقول ان العدد الصحيح س يقسم العدد الصحيح ص

إذا كان العدد ص يقبل القسمة على العدد س

فمثلاً ٤ تقسم ١٢ لأن $١٢ \div ٤ = ٣$

٥ تقسم ٥ لأن $٥ \div ٥ = ١$

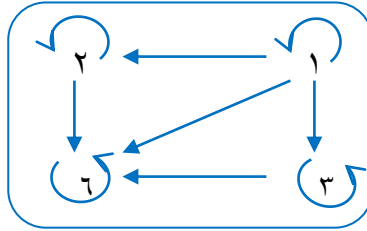
مثال : (١)

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ }

ارسم مخططاً سهمياً يمثل علاقة يقسم على المجموعة س

الحل :

الشكل (٣ - ٥) يمثل المخطط السهمي .



الشكل (٣ - ٥)

تلاحظ أنه توجد عروة عند كل نقطة ، لأن كل عدد يقسم نفسه ، ويوجد سهم

من كل عدد قاسم إلى العدد المقسوم احياناً يرمز لعلاقة يقسم بالرمز مثلاً س تقسم

ص تكتب : س | ص

مثال : (٢)

إذا كانت $\mathcal{V} = \{ ٢, ٣, ٤, ٥, ٨, ٩ \}$

وكانت $\mathcal{E} = \{ (\mathcal{V}, \mathcal{V}) : \mathcal{S} | \mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{V} \exists \mathcal{V} \}$

اكتب $\mathcal{E}$ في صورة أزواج مرتبة

الحل :

$\mathcal{E} = \{ (٢, ٢), (٣, ٣), (٤, ٤), (٥, ٥), (٨, ٨) \}$

$\{ (٩, ٩), (٤, ٢), (٩, ٣), (٨, ٢), (٨, ٤) \}$

مثال : (٣)

إذا كانت $\mathcal{S} = \{ ٣, ٥, ٦ \}$ ، $\mathcal{V} = \{ ٤, ٦, ١٢ \}$

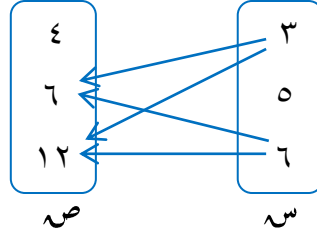
وكانت $\mathcal{E} = \{ (\mathcal{V}, \mathcal{S}) : \mathcal{S} | \mathcal{V}, \mathcal{S} \exists \mathcal{S}, \mathcal{V} \exists \mathcal{V} \}$

(١) ارسم مخططاً سهمياً يمثل العلاقة $\mathcal{E}$.

(٢) أكتب $\mathcal{E}$ بذكر عناصرها

الحل :

الشكل (٣ - ٦) يمثل المخطط السهمي للعلاقة $\mathcal{E}$



(١)

الشكل (٣ - ٦)

(٢) $\mathcal{E} = \{ (١٢, ٦), (٦, ٦), (١٢, ٣), (٦, ٣) \}$

(٢) علاقة الاحتواء :

نعلم أن $S \supset T$ إذا كانت جميع عناصر T هي عناصر في S ،
فمثلاً : $\{ ٤ ، ٣ \} \supset \{ ٥ ، ٤ ، ٣ ، ١ \}$

خواص الاحتواء :

(١) $\forall S, T$ ، تكون $S \supset T$

(٢) إذا كانت $S \supset T$ ، $T \supset U$ فإن $S \supset U$

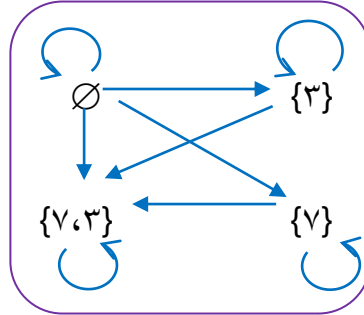
(٣) إذا كانت $S \supset T$ ، $T \supset U$ فإن $S \supset U$

مثال : (٤) إذا كانت $S = \{ ٧ ، ٣ \}$ كَوْن جميع المجموعات الجزئية من S ثم
ارسم مخططاً يمثّل الاحتواء

الحل :

$$\{ \{ ٧ ، ٣ \} ، \{ ٧ \} ، \{ ٣ \} ، \emptyset \} = \mathcal{P}_S$$

الشكل (٧ - ٣) يمثّل المخطط لعلاقة الاحتواء المطلوبة .



الشكل (٧-٣)

(٣) علاقة التساوى :

إذا كان كل من s ، v يرمزان إلى الشيء نفسه نقول ان $s = v$
وإذا كانت s مجموعة فعلاقة التساوي على هذه المجموعة تربط كل عنصر بنفسه.
فمثلاً إذا كانت

$$s = \{ 3, 5, 7 \} \text{ فان } E = \{ (3, 3), (5, 5), (7, 7) \}$$

تمرين (٣ - ٤)

$$(١) \text{ إذا كانت } s = \{ 2, 3, 6, 7, 9 \}$$

$$E = \{ (s, s) : s | v, s, v \text{ } \exists s \}$$

ارسم مخطط العلاقة E ثم ضعها فى صورة ازواج مرتبة

$$(٢) \text{ إذا كانت } s = \{ 2, 4, 5 \}, s_2 \text{ مجموعة جميع المجموعات الجزئية}$$

منها، عيّن s_2 ثم ارسم مخططاً سهمياً يمثّل علاقة الاحتواء .

$$(٣) \text{ إذا كانت } s = \{ a, b, c, d \} \text{ كوّن علاقة التساوي على المجموعة}$$

s ، ثم ارسم مخططاً سهمياً لها .

(٣ - ٥) خواص العلاقة على المجموعة

العلاقة الانعكاسية :

إذا كانت $S = \{ ٢ , ٣ , ٤ \}$ فإن :

$$S \times S = \{ (٢ , ٢) , (٣ , ٢) , (٤ , ٢) , (٢ , ٣) , (٣ , ٣) , (٤ , ٣) ,$$

$$(٢ , ٤) , (٣ , ٤) , (٤ , ٤) \}$$

وإذا أخذنا $R_1 \supset S \times S$ بحيث كانت :

$$R_1 = \{ (٢ , ٢) , (٣ , ٣) , (٤ , ٤) , (٢ , ٤) , (٣ , ٤) , (٤ , ٣) \}$$

نلاحظ أن $٢ , ٣ , ٤ \in S$

$$\text{وأن } (٢ , ٢) \in R_1 , (٣ , ٣) \in R_1 , (٤ , ٤) \in R_1$$

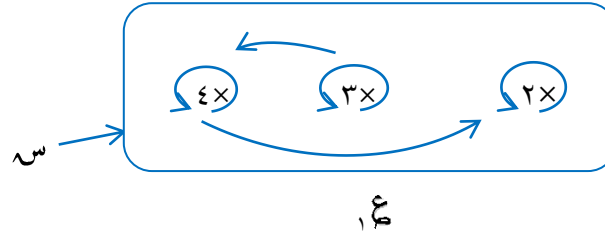
أي لكل عنصر $a \in S$ نجد أن $(a , a) \in R_1$

تُسمى مثل هذه العلاقة علاقة انعكاسية .

$$\text{أما إذا أخذنا } R_2 = \{ (٢ , ٢) , (٤ , ٤) , (٤ , ٢) \}$$

فإن R_2 ليست انعكاسية لأن $٣ \in S$ بينما $(٣ , ٣) \notin R_2$

تمثل R_1 بمخطط سهمي كما في الشكل (٣ - ٨) التالي :



لاحظ وجود عروة عند كل نقطة تمثل عنصراً في S مما سبق يمكننا تعريف العلاقة الانعكاسية :

تعريف :

تكون العلاقة R المعرفة على المجموعة S انعكاسية إذا تحقق $s R s$ لكل عنصر $s \in S$

لكل عنصر $s \in S$ وبصورة رمزية : $s R s \forall s \in S$
 فإذا ارتبط كل عنصر في S مع نفسه بالعلاقة R تكون العلاقة انعكاسية، وإذا كانت العلاقة انعكاسية فإن كل عنصر في S يرتبط مع نفسه ، وتكون العلاقة غير انعكاسية إذا وجد عنصر واحد على الأقل في S ولم يرتبط بنفسه .

أمثلة لعلاقة انعكاسية :

- (١) علاقة التساوي على أي مجموعة
- (٢) علاقة الاحتواء على أي مجموعة مجموعات
- (٣) علاقة يقسم على أي مجموعة أعداد
- (٤) علاقة التوازي على أي مجموعة مستقيميات في مستو واحد

مثال : بيّن أي العلاقات التالية المعرفة على المجموعة S تكون انعكاسية، حيث :

$$S = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$R_1 = \{ (1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4) \}$$

$$R_2 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3) \}$$

$$R_3 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (3, 4), (4, 3) \}$$

$$R_4 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \}$$

الحل :

$$R_1 \text{ ليست انعكاسية لأنها لا تتضمن الزوج } (2, 2)$$

$$R_2 \text{ ليست انعكاسية لأن } (4, 4) \notin R_2$$

$$R_3 \text{ انعكاسية لأن كل عنصر في } S \text{ يربط مع نفسه بالعلاقة } R_3$$

$$R_4 \text{ انعكاسية . لماذا ؟}$$

تمرين (٣ - ٥)

(١) إذا كانت $S = \{ 4, 5, 6 \}$ وكانت العلاقات التالية على المجموعة

S ، وضح ما إذا كانت العلاقة انعكاسية أم لا مع ذكر السبب .

$$R_1 = \{ (4, 4), (5, 5), (6, 6), (5, 6), (6, 5) \}$$

$$R_2 = \{ (4, 4), (5, 5), (6, 6) \}$$

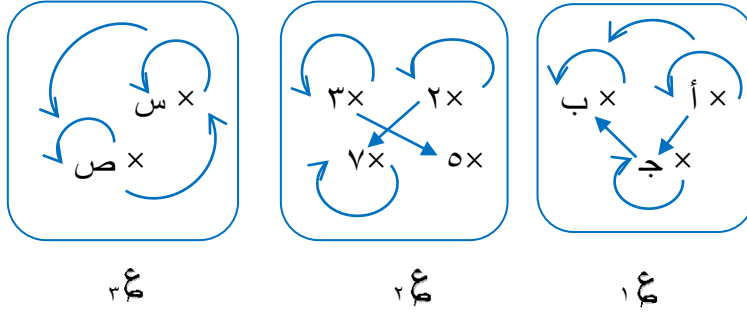
$$R_3 = \{ (4, 4), (5, 5), (6, 6), (5, 6), (6, 5), (4, 5), (5, 4) \}$$

$$R_4 = \{ (4, 4) \}$$

$$R_5 = \{ (4, 4), (5, 5), (6, 6), (4, 5), (5, 4) \}$$

$$R_6 = S \times S$$

(٢) فى المخططات السهمية التالية بالشكل (٣ - ٩) بيّن ما إذا كان كل مخطط يمثل علاقة انعكاسية أم لا مع ذكر السبب .



الشكل (٣ - ٩)

(٣) إذا كانت $S = \{أ، ب، ج\}$ ، $١ع$ ، $٢ع$ علاقتين على S حيث :

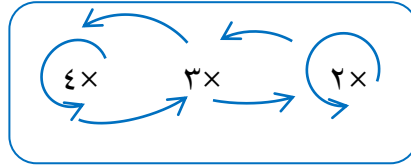
$$١ع = \{ (أ، أ) ، (أ، ب) ، (ب، ب) ، (ب، ج) ، (ج، ج) \}$$

$$٢ع = \{ (أ، ب) ، (ب، ب) ، (ج، ج) ، (ب، ج) \}$$

بيّن ما إذا كانت كل من $١ع$ ، $٢ع$ انعكاسية أم لا مع ذكر السبب .

(٣ - ٦) العلاقة المتماثلة (المتناظرة)

إذا أخذنا المجموعة $S = \{ ٢ , ٣ , ٤ \}$ وعرفنا عليها علاقة $\sim$ كما يلي:
 $\sim = \{ (٢ , ٢) , (٢ , ٣) , (٣ , ٢) , (٢ , ٤) , (٣ , ٤) , (٤ , ٣) , (٤ , ٢) , (٤ , ٤) \}$
 فإن مخططها السهمي يبدو كما فى الشكل (٣ - ١٠) التالي :



الشكل (٣ - ١٠)

لننظر إلى المخطط السهمي للعلاقة $\sim$ فنجد أنه كلما انطلق سهم من عنصر s مثلاً إلى عنصر v قابله سهم ينطلق من v ليعود إلى s فمن ٢ ينطلق سهم إلى ٣ وكذلك سهماً ينطلق من ٣ إلى ٢ . وكذلك من ٣ إلى ٤ نجد هناك سهماً من ٤ إلى ٣ . وبعبارة أخرى

$(٢ , ٣) \in \sim$ و $(٣ , ٢) \in \sim$ وكذلك $(٤ , ٣) \in \sim$ ، $(٣ , ٤) \in \sim$. تصف مثل هذه العلاقة بأنها علاقة تناظر (تماثل)

تعريف :

تكون العلاقة $\sim$ المعرفة على المجموعة S متناظرة إذا تحقق ما يلي :

إذا كان $a \sim b$ فإن $b \sim a$ لكل $a, b \in S$ أو بشكل رمزى

$a \sim b \Leftrightarrow b \sim a \quad \forall a, b \in S$

لاحظ وجود العلاقة الشرطية فى التعريف .

إذا أنه إذا ارتبط عنصر أ مع عنصر ب كان ب بدوره مرتبطاً مع أ بالعلاقة $\hookrightarrow$ نفسها .

∴ لدينا قضية شرطية : أ $\hookrightarrow$ ب ← ب $\hookrightarrow$ أ

صوابها يعنى أن العلاقة $\hookrightarrow$ متماثلة وخطؤها يعنى عدم تماثل العلاقة $\hookrightarrow$.
ونعلم فى حالة القضية الشرطية ان صواب المقدمة وخطأ التالية يعنى خطأ القضية الشرطية وفيما عدا ذلك تكون صائبة . ومن ذلك نستنتج ان العلاقة $\hookrightarrow$ تكون غير متماثلة إذا توفر أ $\hookrightarrow$ ب ولم يتوفر ب $\hookrightarrow$ أ . وفيما عدا ذلك تكون متماثلة .

أمثلة لعلاقات متماثلة :

- (١) علاقة (أ خ) أو (شقيق) فى مجموعة الذكور .
- (٢) علاقة (عمودي على) فى مجموعة مستقيمات فى مستوى .
- (٣) علاقة التساوى فى مجموعة الاعداد .
- (٤) علاقة (التطابق والتشابه) فى مجموعة المثلثات .

أمثلة لعلاقات غير متماثلة :

- (١) علاقة (أكبر من) فى مجموعة الأعداد .
- (٢) علاقة (أصغر من) فى مجموعة الأعداد .
- (٣) علاقة (يقسم) فى مجموعة الأعداد .

مثال (١) : إذا كان $\mathcal{E} = \{ (س، ص) : س + ص = ٩، س، ص \in \mathbb{P} \}$

هل $\mathcal{E}$ متماثلة

الحل :

$\mathcal{E}$ متماثلة لأن $س + ص = ص + س$

$\therefore \forall (س، ص) \in \mathcal{E}، (ص، س) \in \mathcal{E}$

مثال (٢) : إذا كان $\mathcal{S} = \{ ٣، ٤، ٥، ٧ \}$

$\mathcal{E} = \{ (٧، ٤)، (٤، ٣)، (٥، ٣)، (٣، ٥)، (٤، ٧) \}$

هل $\mathcal{E}$ متماثلة

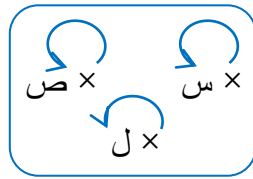
الحل :

$\mathcal{E}$ ليست متماثلة لأن $(٤، ٣) \in \mathcal{E}، (٣، ٤) \notin \mathcal{E}$

تمرين (٣ - ٦)

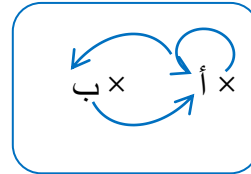
(١) فى الاشكال التالية (٣ - ١١)، (٣ - ١٢) بيّن نوع العلاقة من حيث

العلاقة انعكاسية أم متماثلة أم غير ذلك .



$\mathcal{E}_2$

الشكل (٣ - ١٢)



$\mathcal{E}_1$

الشكل (٣ - ١١)

(٢) إذا كانت $S = \{أ، ب، ج\}$ ، $\mathcal{C}$ علاقة على S بحيث :

$$\mathcal{C} = \{(أ، ب)، (ب، ج)، (ج، أ)\}$$

هل $\mathcal{C}$ انعكاسية ؟ مماثلة ؟ ولماذا ؟

(٣) إذا كانت $S = \{٥، ٧، ٨\}$

$\mathcal{C}$ علاقة على S بحيث :

$$\mathcal{C} = \{(س، ص) : س \geq ص، س، ص \in S\}$$

اكتب $\mathcal{C}$ بذكر عناصرها ، هل $\mathcal{C}$ انعكاسية ؟ متماثلة ؟

(٤) بين أي العلاقة التالية على المجموعة S متماثلة

$$\text{حيث } S = \{أ، ب، ج، د\}$$

$$\mathcal{C}_1 = \{(أ، ج)، (ج، د)، (د، ج)\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(أ، ب)، (ب، أ)، (ب، ج)\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{(أ، أ)، (د، د)، (ب، ب)\}$$

$$\mathcal{C}_4 = \{(أ، ج)، (ج، أ)\}$$

$$\mathcal{C}_5 = \{(ج، ج)\}$$

(٣ - ٧) العلاقة المتعدية (الناقله)

تكون العلاقة $\sim$ المعرفة على المجموعة S متعدية إذا تحقق الشرط التالي:
لأي ثلاثة عناصر a, b, c من S إذا كان $a \sim b$ بالعلاقة $\sim$ وكان $b \sim c$ بدوره يرتبط مع a بالعلاقة $\sim$ نفسها ، فإن $a \sim c$ يرتبط مع a بالعلاقة $\sim$
فارتباط a مع b ثم ارتباط b مع c وفق العلاقة $\sim$ نقل خاصية الارتباط وفق
 $\sim$ إلى الزوج (a, c) لذلك تُسمى العلاقة المتعدية وأحيانا العلاقة (الناقله) .

تعريف :

تكون العلاقة $\sim$ المعرفة على المجموعة S علاقة متعدية إذا حققت الشرط التالي
لكل $a, b, c \in S$ ، إذا كان $a \sim b$ و $b \sim c$ فإن $a \sim c$
وبشكل رمزي العلاقة $\sim$ متعدية $\Leftrightarrow$
 $[a \sim b \wedge b \sim c \rightarrow a \sim c]$

وعلى ذلك فالحالة الوحيدة التي تكون فيها العلاقة $\sim$ غير متعدية هي إذا
توفر $a \sim b$ وتوفر $b \sim c$ ولم يتوفر $a \sim c$. وفيما عدا ذلك تكون متعدية.
وتكون العلاقة متعدية إذا لم يكن هناك ما يمنع التعدي .

أمثلة لعلاقات متعدية :

- (١) علاقة (أصغر من) فى مجموعة اعداد .
- (٢) علاقة (أكبر من) فى مجموعة اعداد .
- (٣) علاقة (الاحتواء) فى أي مجموعة مجموعات .
- (٤) علاقة (التساوى) فى أي مجموعة .
- (٥) علاقة (يقسم) فى أي اعداد .

أمثلة لعلاقات غير متعدية :

- (١) علاقة (أ ب) فى مجموعة من الاشخاص
- (٢) علاقة عمودى فى مجموعة مستقيمت على مستوى واحد

مثال :

إذا كانت $S = \{ ١, ٢, ٣, ٤ \}$

$M = \{ (١, ٢), (٢, ٣), (٣, ٤), (١, ٣), (٢, ٤), (١, ٤) \}$

هل M متعدية ؟

الحل :

نعم متعدية لأن : $(١, ٢), (٢, ٣), (٣, ٤) \in M$

$(١, ٣), (٢, ٤), (١, ٤) \in M$

$(١, ٢), (٢, ٣), (٣, ٤) \in M$

$(١, ٢), (٢, ٣), (٣, ٤) \in M$

تمرين (٣ - ٧)

(١) إذا كانت $S = \{5, 6, 7, 8\}$ ، R علاقة على S بحيث :

$$R = \{(6, 6), (6, 7), (7, 6), (8, 5)\}$$

هل R متعدية ؟

(٢) أي العلاقات الاتية متعدية على $S = \{2, 3, 4\}$

$$R_1 = \{(2, 3), (3, 3), (3, 4), (3, 2)\}$$

$$R_2 = \{(4, 2), (4, 3), (3, 2)\}$$

$$R_3 = \{(4, 4), (3, 4), (3, 3), (2, 2)\}$$

$$R_4 = \{(3, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 2)\}$$

$$R_5 = S \times S$$

(٣) إذا كانت $S = \{11, 12, 13\}$

R علاقة على S حيث :

$$R = \{(s, s) : s - ص < ٠, ص, ص \in S\}$$
 هل R متعدية ؟

(٤) أكتب اربع علاقات متعدية على المجموعة

$$S = \{1, 2, 3\}$$

(٥) لتكن $S = \{أ, ب, ج\}$

(أ) أكتب علاقة على S انعكاسية ومتماثلة وليست متعدية

(ب) أكتب علاقة على S انعكاسية ومتعدية وليست متماثلة

(ج) أكتب علاقة على S متماثلة ومتعدية وليست انعكاسية

(٣ - ٨) علاقة التكافؤ

إذا كان $s = \{s : s \text{ طالب في مدرسة الفداء الثانوية}\}$

وإذا كانت $\mathcal{C}$ معرفة على s كالآتي :

$$\mathcal{C} = \{ (s, v) : s, v \text{ يدرسان في نفس الفصل} \}$$

نجد أن :

١. $\mathcal{C}$ انعكاسية لأنه $\forall s \text{ فان } s \mathcal{C} s$ أي ان كل طالب في المدرسة

موجود مع نفسه في فصل واحد .

٢. $\mathcal{C}$ متماثلة لأنه إذا كان الطالبان s, v في فصل واحد فمن الواضح أن

v, s في فصل واحد أي أنه $v \mathcal{C} s, v \mathcal{C} s$ ،

$s \mathcal{C} v \leftarrow v \mathcal{C} s$.

٣. متعدية لأنه إذا كان الطالب u موجوداً مع الطالب b في الفصل نفسه ، وكان

b موجوداً في فصل واحد مع الطالب j فمن الواضح والمؤكد ان الطالب u والطالب

j ينتميان إلى فصل واحد .

تُسمى مثل هذه العلاقة التي تتصف بانها انعكاسية ومتماثلة ومتعدية على

مجموعة s بأنها علاقة تكافؤ . ونقول عن طالبين ينتميان إلى فصل واحد انهما

متكافئان . ويقال عن كل فصل أنه صنف تكافؤ .

تعريف :

إذا كانت العلاقة $\mathcal{R}$ انعكاسية ومتماثلة ومتعدية تُسمى علاقة تكافؤ . وتعني أنه إذا ارتبط عنصران s و v بعلاقة تتمتع بالخواص الثلاث : خاصة الانعكاس ، وخاصة التماثل وخاصة التعدى فاننا نقول ان s ، v متكافئان .
فعلاقة التساوى علاقة تكافؤ لأنها انعكاسية ومتماثلة ومتعدية .

مثال : (١)

بين فيما إذا كانت العلاقات الآتية على $S = \{ ١ ، ٢ ، ٣ \}$ علاقات تكافؤ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{ (١، ١) ، (٣، ٢) ، (٣، ١) ، (٢، ١) ، (٢، ٢) \} \\ &\quad \{ (١، ٣) ، (١، ٢) ، (٣، ٣) \} \\ \mathcal{R}_2 &= \{ (١، ١) ، (٣، ٢) ، (٢، ٣) ، (١، ٢) ، (٣، ١) \} \\ \mathcal{R}_3 &= \{ (١، ١) ، (٢، ٣) ، (٣، ٢) ، (١، ٢) ، (٣، ١) \} \\ \mathcal{R}_4 &= S \times S \end{aligned}$$

الحل :

$\mathcal{R}_1$ ليست علاقة تكافؤ لأن $\mathcal{R}_1$ غير متماثلة لأن $(٣، ٢) \in \mathcal{R}_1$ بينما $(٢، ٣) \notin \mathcal{R}_1$

$\mathcal{R}_2$ ليست علاقة تكافؤ لأن $\mathcal{R}_2$ ليست علاقة انعكاسية لعدم وجود $(٢، ٢)$

$\mathcal{R}_3$ ليست علاقة تكافؤ لأن $\mathcal{R}_3$ ليست انعكاسية .

$\mathcal{R}_4$ علاقة تكافؤ لأنها انعكاسية ومتماثلة ومتعدية .

مثال : (٢)

لتكن $S = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ولتكن $\sim = \{(a, b) : a, b \text{ لهما}$
الباقي نفسه عند القسمة على ٣ ، $a, b \in S\}$ أثبت أن $\sim$ علاقة تكافؤ :

الحل :

١. من الواضح ان a, b لهما الباقي نفسه عند القسمة على ٣ وذلك

$\forall a \in S$. أي ان العلاقة انعكاسية

٢. إذا كان a, b لهما الباقي نفسه عند القسمة على ٣ فان b, a لهما ايضا

الباقي نفسه عند القسمة على ٣ وذلك $\forall a, b \in S$ فالعلاقة $\sim$ متماثلة

٣. من اجل أي $a, b, c \in S$ ، إذا كان باقي قسمة a على ٣ يساوي

باقي قسمة b على ٣ ، وكان باقي قسمة b على ٣ يساوي باقي قسمة c

على ٣ فان باقي قسمة a على ٣ يساوي باقي قسمة c على ٣ . أي أنه

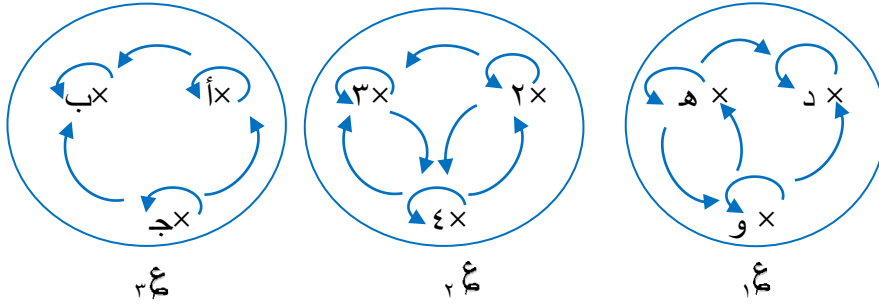
إذا كان $a \sim b$ و $b \sim c$ فان $a \sim c$ ج فالعلاقة $\sim$ متعدية .

وبما ان العلاقة $\sim$ انعكاسية ومتماثلة ومتعدية فهي علاقة تكافؤ.

تمرين (٣ - ٩)

١. إذا كان $\{ ٣ ، ٤ ، ٥ \} = ٢$ وكان :
 $\{ (٣،٤) ، (٥ ، ٥) ، (٤، ٤) ، (٥ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٣ ، ٣) \} = {}_١\mathcal{K}$
 $\{ (٤، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٣، ٢) ، (٤، ٣) ، (٣،٣) \} = {}_٢\mathcal{K}$
 بيّن إذا كانت $\mathcal{K}_١$ ، $\mathcal{K}_٢$ علاقات تكافؤ .
٢. بيّن فيما إذا كانت العلاقات التالية على مجموعة الاعداد الطبيعية ($\mathbb{N}$) علاقة
 إنعكاس ، متماثلة ، متعدية ، علاقة تكافؤ .
 أ. $\{ (س ، ص) : س + ص = ٩ \} = {}_١\mathcal{K}$
 ب. $\{ (س ، ص) : س < ص \} = {}_٢\mathcal{K}$
 ج. $\{ (س،ص) : س \text{ يقسم } ص \} = {}_٣\mathcal{K}$
٣. أي العلاقات التالية : انعكاسية ، متماثلة ، متعدية ، علاقة تكافؤ
 أ. س أخ ص على مجموعة من الناس .
 ب. س له نفس وزن ص على مجموعة قطع المعادن .
 ج. س من نفس جنس ص على مجموعة الأشجار .
 د. علامة (أكبر من) على مجموعة من الأعداد الأولية .

٤. فى الاشكال التالية بيّن ما إذا كان المخطط يمثل علاقة تكافؤ أم لا .



الشكل (١٣ - ٣) الشكل (١٤ - ٣) الشكل (١٥ - ٣)

٥. إذا كانت $S = \{ \text{احمد ، على ، موسى} \}$

أي العلاقات التالية علاقة تكافؤ ؟

$$١. R = \{ (\text{احمد ، احمد}) , (\text{على ، على}) , (\text{موسى ، موسى}) \}$$

$$٢. R = \{ (\text{احمد ، احمد}) , (\text{احمد ، موسى}) , (\text{موسى ، على}) ,$$

$$(\text{على ، على}) , (\text{موسى ، موسى}) \}$$

$$٣. R = S \times S$$

٦. إذا كانت $S = \{ ٢ , ٤ , ٦ , ٨ , ٩ \}$ ع علاقة على S بحيث

$$R = \{ (٢ , ٢) , (٤ , ٤) , (٦ , ٦) , (٨ , ٨) , (٩ , ٩) , (٦ , ٤) \}$$

بيّن ما إذا كانت R علاقة تكافؤ ؟

الربط مع الحياة

تمثل العلاقات بأنواعها أدوات لفهم الواقع، فهي تساعدنا على إدراك الروابط بين الأشياء وتنظيمها وتحليلها، مما يجعلها جزءاً أساسياً من حياتنا اليومية مثلاً :

(أ) العلاقة نجدها في المجالات :

١. الفلك :علاقة الكوكب بعدد أقماره (المشتري $\leftrightarrow$ ٧٩ قمراً).
٢. الحاسوب :علاقة المستخدم بكلمة السر الخاصة به .

(ب) العلاقة الانعكاسية نجدها في المجالات :

١. الهندسة المعمارية : كل غرفة لها مساحتها خاصة بها .
٢. الفيزياء : كل جسم له كتلته الخاصة.

(ج) العلاقة المتماثلة نجدها في المجالات :

١. الكهرباء :إذا كان الموصل (أ) متصلاً بـ (ج) ، فإن (ج) متصل بـ (أ) .
٢. الفلك :إذا جذبت الشمس الأرض، فالأرض تجذب الشمس بقوة مساوية في المقدار.

(د) العلاقة المتعدية نجدها في المجالات :

- ١ . الطبيعة (سلاسل غذائية) :إذا أكل الأسد الغزال، والغزال أكل العشب، فالأسد مرتبط بالعشب.
- ٢ . المسافات :إذا كانت المدينة أ أقرب من المدينة ب ، و ب أقرب من ج ، فإن أ أقرب من ج

(هـ) علاقة التكافؤ نجدها في المجالات :

- ١ . الموسيقى :النغمات التي تعزف على نفس السلم تعتبر متكافئة.
- ٢ . الزراعة :نباتات نفس النوع (كل أشجار المانجو متكافئة في الفئة).

الوحدة الرابعة

كثيرات الحدود (الحدوديات)

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١. يتعرّف على الجملة المفتوحة ومجموعة الحل .
٢. يتعرّف على كثيرات الحدود ويميّزها .
٣. يجمع كثيرات الحدود .
٤. يطرح كثيرات الحدود .
٥. يضرب كثيرات الحدود .
٦. يقسم كثيرات الحدود .
٧. يتعرّف على طريقة القسمة التركيبية لكثيرات الحدود .
٨. يتعرّف على الصورة العامة لكثيرة الحدود من الدرجة الثانية .
٩. يحلّ كثيرة الحدود من الدرجة الثانية .
١٠. يوجد مجموعة الحل للمعادلة من الدرجة الثانية .
١١. يوجد مجموعة حل المعادلة بطريقة اكمال المربع .
١٢. يحل معادلة الدرجة الثانية باستعمال القانون العام لحل المعادلة التربيعية .
١٣. يتعرّف على المميّز و خواص الجذور .
١٤. يحل معادلة الدرجة الثانية بيانياً .
١٥. يتعرّف على المقادير الكسرية ويجرى عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة عليها .
١٦. يتعرّف نظرية الباقي.
١٧. يقسم المقادير الجبرية باستخدام نظرية الباقي.
١٨. يجد عوامل المقادير الجبرية باستخدام نظرية الباقي.
١٩. يحلّ المقادير الجبرية باستخدام نظرية الباقي.
٢٠. يتعرّف نظرية العامل.
٢١. يحل المقادير الجبرية باستخدام نظرية العامل.

(٤ - ١) الجملة المفتوحة ومجموعة الحل

سبق أن درسنا العبارة أو القضية المنطقية وعرفنا أنها جملة خبرية إما صائبة أو خاطئة وليس الاثنان معاً . وعرفنا أنه إذا اشتملت هذه الجملة على متغير أو أكثر تسمى عندئذٍ جملة مفتوحة ، إذ لا نستطيع أن نقرر إن كانت صائبة أو خاطئة ، إلا إذا أعطينا كل متغير قيمة معينة من مجموعة تسمى مجموعة التعويض . إذن فالجملة المفتوحة هي جملة تحتوى على متغير أو أكثر وتتحول إلى قضية (عبارة منطقية) عند إعطاء كل متغير قيمة معينة من مجموعة التعويض . فالجمل التالية :

(١) س عدد صحيح أكبر من الصفر .

(٢) ص + ٣ = ٧ حيث ص عدد حقيقي .

(٣) أ + ب = ٦ حيث أ ، ب أعداد طبيعية .

كل منها جملة مفتوحة ، يمكن أن نرمز لكل منها برمز ، فإذا رمزنا بالرمز

ق (س) للجملة الأولى ، تصبح

ق (س) : س عدد صحيح أكبر من الصفر

وكذلك ل (ص) : ص + ٣ = ٧ ، ص $\in$ م

وأيضاً م (أ ، ب) : أ + ب = ٦ ، أ ، ب $\in$ ط وهكذا ...

ونلاحظ أنه لكل جملة مفتوحة توجد مجموعة تعويض . فمجموعة

التعويض للجملة المفتوحة هي مجموعة تلك العناصر التي نختار من بينها

العناصر التي تحل محل المتغير في الجملة المفتوحة والتي تحوّلها إلى قضية إما

صائبة أو خاطئة .

فإذا عوضنا في الجملة الأولى العدد ٥ بدلاً عن الرمز س لتصبح ٥ عدداً

صحيحاً أكبر من الصفر وهذه عبارة صائبة .

اما إذا عوضنا بالعدد ٣- في هذه الجملة لأصبحت عبارة خاطئة .
ومجموعة الحل للجملة المفتوحة هي المجموعة الجزئية من مجموعة التعويض
التي تجعل الجملة المفتوحة صائبة عندما يحل أى منها محل المتغير .
فمثلاً مجموعة الحل للجملة $١١ = ٧ + س$ هي $\{٤\}$ لأن $١١ = ٧ + س$
تصبح صائبة عندما يحل العدد ٤ محل المتغير س ولكنها تصبح خاطئة إذا ما
حل أى عدد آخر غير ٤ محل س .
ولقد عرفنا سابقاً كيفية حل معادلة مثل :

$س + ٧ = ١١$ والتي تعتمد أساساً على إيجاد جمل مفتوحة أبسط ، لها
نفس مجموعة الحل الخاصة بالجملة الأصلية . والجملتان المفتوحتان اللتان لهما
نفس مجموعة الحل يطلق عليهما جملتان متكافئتان . فمثلاً الجمل الثلاث التالية
جمل متكافئة :

$$(١) \quad س + ٧ = ١١$$

$$(٢) \quad س + ٧ + (٧-) = (٧-) + ١١$$

$$(٣) \quad س = ٤$$

ومن الواضح أن مجموعة الحل للجملة الثالثة هي $\{٤\}$ وبالتالي فإن $\{٤\}$
هي أيضاً مجموعة الحل للجملة الأولى . لأننا نعلم أنه إذا أضفنا العدد نفسه
لطرفي معادلة فإننا نحصل على معادلة متكافئة .

والجمل المفتوحة التي تتضمن رموز متباينات مثل $>$ ، $<$ يمكن حلها
باستخدام خواص مشابهة تعرف بخواص الحذف في المتباينات . يمكن تلخيصها
فيما يلي :

لأى ثلاثة أعداد حقيقية أ ، ب ، ج

$$(١) \quad أ > ب \Leftrightarrow أ + ج > ب + ج$$

$$(٢) \quad أ > ب \Leftrightarrow أ - ج > ب - ج ، \text{ إذا كان } ج > ٠$$

$$(٣) \quad أ > ب \Leftrightarrow أ - ج < ب - ج ، \text{ إذا كان } ج < ٠$$

مثال (١) :

جد مجموعة حل المتباينة

$$٢س + ٧ > ١١ \text{ في مجموعة التعويض } \mathcal{M}$$

الحل:

$$٢س + ٧ > ١١$$

$$٢س + ٧ + (٧-) > ١١ + (٧-) \text{ (خاصية (١))}$$

$$٢س > ٤$$

$$٢س \times \frac{١}{٢} > ٤ \times \frac{١}{٢} \text{ (خاصية (٢))}$$

$$س > ٢$$

∴ مجموعة الحل { س : س > ٢ ، س ∈ $\mathcal{M}$ }

مثال (٢) :

جد مجموعة الحل لكل من الجمل التالية :

(١) ق (س) : س أكبر من الصفر ، مجموعة التعويض $\mathcal{V}$.

(٢) م (أ ، ب) : أ + ب = ٦ ، مجموعة التعويض $\mathcal{P}$.

الحل :

(١) ق (س) : س < ٠ ، س ∈ $\mathcal{V}$

∴ مجموعة الحل = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠ } .

(٢) م (أ ، ب) : أ + ب = ٦ ، أ ، ب ∈ $\mathcal{P}$

∴ مجموعة الحل = { (١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ١) }

تمرين (٤ - ١)

(١) جد مجموعة الحل لكل جملة مفتوحة من الجمل التالية :

الجملة المفتوحة مجموعة التعويض

(أ) $س > ٥$ $س \geq ٥$

(ب) $س^٢ - ٩ = ١٤ + س$ $\{ ٧, ٥, ٣, ٢ \}$

(ج) $س$ لا تقبل القسمة على ٣ $\{ ١١, ٩, ٥, ٣, ٢ \}$

(د) $س + ٥ \leq ٠$ $س < ٥$

(٢) في كل مما يأتي زوج من الجمل المفتوحة ، أى من هذه الأزواج يمثل

جملتين مفتوحتين متكافئتين، إذا كانت مجموعة التعويض لكل الجمل هي $س \in \mathbb{R}$.

(أ) $س - ٥ = ٧ + س$ ، $س - ٣ = ٣$ ،

(ب) $س^٢ = ٤$ ، $س = ٢$ ،

(ج) $س^٢ = ٩$ ، $س = ٣$ أو $س = -٣$ ،

(د) $(س + ١)(س + ٢) = ١ + س$ ، $٠ = ١ + س$ ،

(هـ) $(س - ١)(س - ٥) = ٠$ ، $س^٢ - ٦ = ٥ + س$ ،

(و) $س = ٠$ ، $س < -١$ و $س > ١$ ،

(٣) إذا علمت أن أ ، ب عنصران في المجموعة $\{ ٠, ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩ \}$

اكتب مجموعة الحل لكل من الجمل المفتوحة التالية على شكل أزواج مرتبة:

(أ) $أ - ب = ٣$ (ب) $أ - ٢ = ب$ (ج) $٣ + أ + ٥ = ب$ (د) $٤ \leq ب$

(٤ - ٢) كثيرات الحدود (الحدوديات)

إن كثيرات الحدود هي نوع من أنواع الدوال الحقيقية ، وقبل أن نتعرض إلى كثيرات الحدود لابد أن نتعرض إلى ما يُعرف بالدالة الحدية :

تعريف : لقد درسنا سابقاً الحد الجبري وعرفنا أنه:

إذا كانت د دالة عددية قاعدتها من الشكل $D(s) = a_n s^n$ حيث a عدد حقيقي ثابت ، n عدد صحيح غير سالب ، s رمز لمتغير حقيقي ، $a \neq 0$ فإننا نسمي هذه الدالة دالة حدية . ونسمى التركيب $a_n s^n$ حداً جبرياً أو بشكل مختصر " حداً " ، a معامل هذا الحد ، s متغيره ، n درجته حيث $a \neq 0$ ونقول أيضاً أن n درجة الدالة الحدية .

أمثلة لدوال حدية :

$$(أ) D(s) = 5s^3$$

$$(ب) H(s) = 2s$$

$$(ج) Q(s) = 7$$

لاحظ أن درجة الدالة الحدية $H(s)$ في (ب) هي الأولى ، أما $Q(s)$ في (ج) فمن الدرجة صفر حيث $n = 0$ لأن $s^0 = 1$ أي أن الدالة الثابتة دالة حدية من الدرجة صفر .

نقول أن الدوال الحدية متشابهة أو (الحدود متشابهة) إذا تساوت درجتها .
إن جمع الدوال الحدية مختلفة الدرجات يعطى دالة كثيرة حدود أو (حدودية) .
وعليه يمكن أن نعرّف الدالة كثيرة الحدود في صورتها العامة كما يلي:

تعريف :

الدالة Q المعرفة على $\mathbb{R}$ بالقاعدة

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0.$$

حيث n عدد صحيح غير سالب ، $a_n \neq 0$

تسمى كثيرة حدود من الدرجة n ، و الأعداد الحقيقية

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0.$$

تسمى معاملات كثيرة الحدود $Q(s)$.

فالدالة $h(s) = 3s^3 - 5s^2 + 7s - 2$ كثيرة حدود في

المتغير s من الدرجة الرابعة ، ومعاملاتها هي الأعداد $3, -5, 7, -2$.

وتكتب على الصورة $h(s) = 3s^3 - 5s^2 + 7s - 2$ ، $3 = a_3$ ، $-5 = a_2$ ، $7 = a_1$ ، $-2 = a_0$.

والدالة $d(s) = 2s^2 + 4$ كثيرة حدود من الدرجة الخامسة . لاحظ أن

أكبر أس للمتغير في الدالة كثيرة الحدود يُسمى درجة كثيرة الحدود .

وأن معاملات الدالة $d(s)$ هي الأعداد $2, 0, 0, 0, 4$.

أه $= a_2$ ، أه $= a_1$ ، أه $= a_0$ ، أه $= a_{-1}$ ، أه $= a_{-2}$ ، أه $= a_{-3}$ ، أه $= a_{-4}$ ، أه $= a_{-5}$. حيث اعتبرنا كلاً من معاملات

الحدود التي تشتمل على s^3 ، s^2 ، s يساوي الصفر .

مثال :

$$\text{إذا كان ق (س)} = ٣ \text{ س}^٤ - ٢ \text{ س} + ١$$

$$\text{هـ (س)} = | ٣ - \text{س} |$$

$$\text{ل (س)} = ٣ \text{ س} - \frac{١}{٢} - ٥$$

$$\text{ر (س)} = \frac{١}{٢ \text{ س}} = -٢$$

فأي من الدوال ق ، هـ ، ل ، ر كثيرة حدود

الحل :

إن الدالة ق كثيرة حدود من الدرجة الرابعة .

أما الدالة هـ فليست كثيرة حدود لأنها دالة قيمة مطلقة.

و الدالة ل ليست كثيرة حدود لأن أس المتغير س فيها كسر و هو $\frac{١}{٢}$

و الدالة ر ليست كثيرة حدود لأن أس المتغير س فيها سالب و هو -٢ .

تمرين (٤ - ٢)

(١) فيما يلي عدد من الحدود ، عيّن معامل ودرجة كل منها :

$$\frac{3}{2} \text{ س } ^{\circ} , (\sqrt{5} - \sqrt{2}) \text{ س } ^{\circ} , ٧,٣ \text{ هـ } ^{\circ} , -١٣ \text{ ص } ^{\circ} , \frac{٥-}{٧} \text{ س } ^{\circ}$$

(٢) من الدوال الآتية عيّن كثيرات الحدود ودرجتها إن كانت كثيرة حدود :

$$(أ) \quad ق \text{ (س)} = ٥ \text{ س } ^{\circ} + ٣ \text{ س } ^{\circ} - ١$$

$$(ب) \quad هـ \text{ (س)} = ٨ \text{ س } ^{\circ} + \frac{٤}{س} + ٣ -$$

$$(ج) \quad ر \text{ (س)} = ٤ \text{ س } ^{\circ} + ٩ \text{ س } ^{\circ} - \frac{٣}{٣}$$

$$(د) \quad د \text{ (س)} = ٠ \times \text{ س } ^{\circ} - ٧ \text{ س } ^{\circ} - ١$$

$$(هـ) \quad و \text{ (س)} = (١ - \text{س } ^{\circ})^٣ (٢ \text{ س } ^{\circ} + ٣)$$

(٣) عيّن درجة كثيرات الحدود التالية وقيم كل من أ^١ ، أ^٢ ، أ^٣ ، أ^٤ .

$$(أ) \quad ق \text{ (س)} = ٨ \text{ س } ^{\circ} - ٤ \text{ س } ^{\circ} + ٣ \text{ س } ^{\circ} + ٥$$

$$(ب) \quad هـ \text{ (س)} = \text{س } ^{\circ} + ٣ \text{ س } ^{\circ} - \text{س}$$

$$(ج) \quad ر \text{ (س)} = -٧ \text{ س } ^{\circ} + ٤ \text{ س } ^{\circ} - ٢$$

$$(د) \quad د \text{ (س)} = ٤$$

(٤ - ٣) العمليات على الدوال كثيرات الحدود

(١) جمع دوال كثيرات الحدود :

عند جمع كثيرات الحدود يتم جمع معاملات الحدود التي لها نفس الدرجة (القوة) فيكون $(ق_١ + ق_٢) (س) = ق_١(س) + ق_٢(س)$ حيث $ق_١$ ، $ق_٢$ كثيرات حدود .

مثال : إذا كان $ق (س) = ١٢س^٤ - ٥س^٢ + ٦س + ٧$ ،
 $م (س) = ٧س^٣ + ٨س^٢ - ٤س + ١$
أوجد $ق (س) + م (س)$.

الحل :

$$\begin{aligned} (ق + م) (س) &= ق (س) + م (س) \\ &= ١٢س^٤ - ٥س^٢ + ٦س + ٧ + ٧س^٣ + ٨س^٢ - ٤س + ١ \\ &= ١٢س^٤ + ٧س^٣ + ٣س^٢ + ٢س + ٨ \end{aligned}$$

عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الرابعة .

(٢) طرح الدوال كثيرات الحدود :

عند طرح كثيرات الحدود يتم طرح معاملات الحدود التي لها نفس الدرجة (القوة) فيكون $(ق_١ - ق_٢) (س) = ق_١(س) - ق_٢(س)$ حيث $ق_١$ ، $ق_٢$ كثيرات الحدود .

مثال : (١)

إذا كان $ق (س) = ٣س^٣ + ٢س + ٤$ ، $هـ (س) = -٢س^٣ + ٤س - ١$
أوجد $ق (س) - هـ (س)$.

الحل :

$$\begin{aligned} (ق - هـ) (س) &= ق (س) - هـ (س) \\ (١ - ٢س٤ + ٣س٢) - (٤ + ٢س + ٣س٣) &= \\ ١ + ٢س٤ - ٣س٢ + ٤ + ٢س + ٣س٣ &= \\ ٥س٣ - ٤س٢ + ٢س + ٥ &= \end{aligned}$$

عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الثالثة .

مثال : (٢)

$$\begin{aligned} \text{إذا كان } ق (س) &= ٤س٣ + ٢س٢ + ٧س - ٣ ، \\ هـ (س) &= ٤س٣ + ٢س - ٣س٣ + ٤س٤ = (س) م ، \\ \text{جد : } أ/ (ق - هـ) (س) & \quad \text{ب/ } (ق - م) (س) . \end{aligned}$$

الحل :

$$\begin{aligned} أ/ (ق - هـ) (س) &= (٤س٣ + ٢س٢ + ٧س - ٣) - (٤س٣ + ٢س - ٣س٣ + ٤س٤) \\ ق (س) - هـ (س) &= ١٠س + ٧س٢ - ٣س٣ - ٤س٤ \\ \text{كثيرة حدود من الدرجة الثانية أقل من درجة ق ، هـ} \\ \text{ب/ } (ق - م) (س) &= ق (س) - م (س) \\ (٤س٣ + ٢س٢ + ٧س - ٣) - (٤س٣ + ٢س - ٣س٣ + ١) &= \\ ٤س٣ + ٢س٢ + ٧س - ٣ - ٤س٣ - ٢س + ٣س٣ - ١ &= \\ -٨س + ٤س٣ - ٤ &= \end{aligned}$$

كثيرة حدود من الدرجة الثانية أقل من درجة ق ، م .

∴ نلاحظ من الأمثلة السابقة بأن عملية جمع أو طرح كثيرتي حدود نحصل على كثيرة حدود درجتها أقل من أو تساوى أكبر درجة لكثيرتي الحدود الأصلية

٣) ضرب كثيرات الحدود :

$$(ق \cdot هـ) (س) = ق (س) \cdot هـ (س)$$

عبارة عن ضرب كل حد من حدود ق (س) بكل حد من حدود هـ (س) ثم جمع معاملات الحدود المتشابهة (ذات القوى المتشابهة) . فالمثال التالي يوضح الفكرة.

مثال :

$$\begin{aligned} \text{إذا كان } ق (س) &= ٣س٣ + ٢س٢ + ٦ \\ \text{هـ (س)} &= ٣ + ٢س٢ \end{aligned}$$

$$\text{أوجد } (ق \cdot هـ) (س)$$

الحل :

$$\begin{aligned} (ق \cdot هـ) (س) &= ق (س) \cdot هـ (س) \\ &= (٣س٣ + ٢س٢ + ٦) \cdot (٣ + ٢س٢) \\ &= ٣س٣ \cdot (٣ + ٢س٢) + (٢س٢) \cdot (٣ + ٢س٢) + ٦ \cdot (٣ + ٢س٢) \\ &= ٩س٣ + ٦س٤ + ٦س٢ + ٦س٣ + ٦س٢ + ١٨س + ١٨ \\ &= ٩س٣ + ٦س٤ + ١٢س٢ + ١٨س + ١٨ \end{aligned}$$

كثيرة حدود درجتها = مجموع درجة ق ، هـ .

٤) تساوى كثيرات الحدود :

يقال أن كثيرات الحدود ق ، هـ متساويتين إذ كان لهما نفس الدرجة ومعاملات القوى المتساوية متساوية .

مثال : إذا كان ق (س) = أس^٣ + (ب + ٢) س^٢ + ٧ .

$$\text{هـ (س)} = -٣س^٣ + ٥س^٢ + ٧ .$$

أوجد قيم كلٍّ من أ ، ب إذا كانت ق (س) = هـ (س) .

الحل :

$$\therefore \text{ق (س) = هـ (س) فإن}$$

$$٣- = أ$$

$$٥ = ٢ + ب$$

$$\therefore ٣ = ب$$

$$\therefore ٣- = أ ، ٣ = ب$$

٥) قسمة كثيرات الحدود :

عند قسمة كثيرة حدود على أخرى يجب أن تكون درجة البسط (المقسوم) أكبر من أو تساوي درجة المقام (المقسوم عليه) لتفادي ظهور قوى سالبة في الناتج (خارج القسمة) كما يجب أن يكون درجة المقام لكثيرة الحدود غير صفرية والمثال التالي يوضح فكرة القسمة .

مثال :

$$\text{إذا كان ق (س) = أس}^{\text{ن}} \text{ ، هـ (س) = ب س}^{\text{م}} \text{ حيث ن > م ، فأوجد } \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$$

الحل :

$$\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \frac{\text{أس}^{\text{ن}}}{\text{ب س}^{\text{م}}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \text{س}^{\text{ن-م}}$$

$\therefore$ معامل خارج القسمة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ يساوي معامل البسط مقسوماً على معامل المقام ودرجة خارج القسمة ن - م تساوي درجة البسط مطروحاً منها درجة المقام .

مثال : (١)

أقسم د (س) = (٢س^٢ + ٥س + ٧س + ٦) على ق (س) = س + ١ جد
ناتج القسمة والباقي .

الحل :

أولاً : طريقة القسمة المطولة : لاجراء القسمة المطولة لا بد من مراعاة الآتي:

- ١ / ترتيب حدود كلا من د (س) ، ق (س) ترتيباً تنازلياً حسب قوى (أس) س .
- ٢ / اجراء عملية القسمة وذلك بقسمة الحد ذي أكبر أس من د (س) على الحد ذي أكبر أس من ق(س) فمثلاً ٢س^٢ ÷ س = ٢س ، ثم نضرب هذا الناتج في المقسوم عليه ونطرح الناتج من حاصل الضرب ونكرر العملية حتى نحصل على الباقي . أما إذا كان الباقي = صفر نقول أن د (س) تقبل القسمة على ق(س) .

$$\begin{array}{r}
 ٢س^٢ + ٥س + ٧س + ٦ \\
 \underline{٢س^٢ + ٢س} \\
 ٣س + ٦ \\
 \underline{٣س + ٤} \\
 ٢
 \end{array}$$

∴ (٢س^٢ + ٥س + ٧س + ٦) ÷ (س + ١) = ٢س + ٣س + ٤ + الباقي ٢

مثال (٢) : أوجد خارج قسمة :

$$\text{د(س)} = ٥س^٣ + ٩س^٢ - ٧س - ١٠ \div \text{ق (س)} = ٢ + س$$

الحل :

$$\begin{array}{r} ٥س^٣ - س - ٥ \\ \hline ٥س^٣ + ٩س^٢ - ٧س - ١٠ \quad \text{س} + ٢ \\ \hline ١٠س^٢ + ٣س^٣ \\ \hline ١٠س^٢ - ٧س - ١٠ \\ \hline -٢س^٢ - ٢س \\ \hline -٥س - ١٠ \\ \hline -٥س - ١٠ \\ \hline ٠ \quad ٠ \end{array}$$

$$\therefore (٥س^٣ + ٩س^٢ - ٧س - ١٠) \div (س + ٢) = ٥س^٢ - س - ٥ \text{ والباقي صفر}$$

ثانياً : القسمة التركيبية:

مثال (١) :

$$\text{اقسم د(س)} = ٤س^٣ + ٢س^٢ - ٣س + ٧ \text{ على ق (س)} = ٣ - س$$

بطريقة القسمة التركيبية .

٣-	٧	٣-	٢	٤
١١٧	١١٧	٤٢	١٢	١٢
١٢٤	١٢٤	٣٩	١٤	٤

$$\therefore \text{خارج القسمة هو م(س)} = ٤س^٢ + ١٤س + ٣٩ \text{ والباقي } ١٢٤.$$

تفسير العملية :

أولاً : نكتب معاملات د(س) مرتبة ترتيباً تنازلياً .

ثانياً : نكتب أصفار المقسوم عليه (س - ٣) وبالتالي (٣+) على اليسار بعد وضع هذه العلامة لـ .

ثالثاً : نضع معامل أكبر أس في د(س) أسفل الخط و هو ٤ ثم نضربه في (٣+) ونضعه أسفل المقدار الثاني ثم نجمع ونضع الناتج أسفل الخط (٣×٤) = ١٢ ثم نضيف ٢ = ١٤ .

رابعاً : نضرب ٣×١٤ = ٤٢ نكتب أسفل المعامل التالي .
ثم نجمع - ٣ + ٤٢ = ٣٩ .

خامساً : نضرب ٣×٣٩ = ١١٧ نكتب أسفل المعامل التالي .
ثم نجمع ٧ + ١١٧ = ١٢٤ وهذا هو الباقي .

مثال (٢):

اقسم د(س) = س^٤ + ٥س^٣ + ٣س^٢ - ١٥س + ٧ على س + ٢
بطريقة القسمة التركيبية .

الحل:

١	٥	٣	- ١٥	٧	- ٢
- ٢	- ٦	٦+		١٨	
١	٣	- ٣	- ٩	٢٥	

∴ خارج القسمة = س^٣ + ٣س^٢ - ٣س - ٩ والباقي ٢٥ .

وهذه الطريقة تسمى القسمة التركيبية و لاحظ أن درجة المقسوم عليه الدرجة الأولى ومعامل س = ١ .

مثال (٣):

أوجد ناتج قسمة $s^2 - s^3 + 7s - 11$ على $s - 1$.

الحل :

$$\begin{array}{r|rrrr}
 s^2 - s^3 + 7s - 11 & 1 & 0 & 0 & 7 & -11 \\
 -(s^2 - s) & & 1 & -1 & & \\
 \hline
 8s - 11 & & & & & \\
 -(8s - 8) & & & & & \\
 \hline
 3 & & & & &
 \end{array}$$

∴ خارج القسمة = $s^2 - s^3 + 8s - 11$ والباقي ٣

مثال (٤):

باستخدام الطريقة التركيبية أوجد خارج القسمة والباقي

د (س) = $s^5 - 15s^2 + 8s - 4$ على ق (س) = $s + 4$

الحل :

$$\begin{array}{r|rrrr}
 s^5 - 15s^2 + 8s - 4 & 1 & 0 & 0 & -15 & 8 & -4 \\
 -(s^5 + 4s^4) & & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 -4s^4 - 15s^2 + 8s - 4 & & & & & & \\
 -(4s^4 + 16s^3) & & & -16 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 16s^3 - 15s^2 + 8s - 4 & & & & & & \\
 -(16s^3 + 64s^2) & & & -80 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 76s^2 + 8s - 4 & & & & & & \\
 -(76s^2 + 304s) & & & -296 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 304s - 4 & & & & & & \\
 -(304s + 1216) & & & & -1220 & 0 & 0 \\
 \hline
 1220s - 4 & & & & & & \\
 -(1220s + 4880) & & & & -4884 & 0 & 0 \\
 \hline
 4884 & & & & & &
 \end{array}$$

∴ خارج القسمة = $s^5 - 15s^2 + 8s - 4$ والباقي ٤٨٨٤

∴ $s^2 - s^3 + 7s - 11$ تقبل القسمة على $s - 1$.

ومن الأمثلة السابقة من القسمة المطولة أو القسمة التركيبية نلاحظ أن درجة خارج

القسمة أقل من درجة كثيرة الحدود (المقسوم) بمقدار واحد .

لأن درجة المقسوم عليه في جميع الأمثلة الواحد صحيح .

تمرين (٤ - ٣)

١/ اكتب كثيرات الحدود د(س) التي معاملاتها .

أ. $٢ = ٣$ ، $٢ = ٢$ ، $١ - = ٢$ ، $١ = ١$ ، $٥ = ١$ ، $٦ = ١$.

ب. $٥ = ٢$ ، $٢ = ٣$ ، $٤ - = ٣$ ، $١ = ١$.

ج. $٤ = ٢$ ، $٧ - = ٢$ ، $٢ = ٣$ ، $٦ = ٢$ ، $١ = ٢$.

د. جميع المعاملات أصفار ماعدا $٧ = ٧$.

٢/ إذا كان ق(س) = $-٥س^٢ + ٢س + ٣$ ، د(س) = $٣س^٣ + ٤س^٢ + ٢$ فأوجد :

(ق + د) (س) .

(ق + د) (د) ، ق(٢) + د(٢) .

(ق - د) (س) .

(ق . د) (س) .

درجة خارج قسمة $\frac{د(س)}{ق(س)}$ دون إجراء عملية القسمة .

٣/ استخدم القسمة المطولة لإيجاد خارج القسمة والباقي في الحالات الآتية بقسمة د(س) على ق(س) .

أ/ د(س) = $٣س^٣ - ٢س$ ، ق(س) = $٣ + س$

ب/ د(س) = $٢س^٢ - ٣س^٣ + ٢$ ، ق(س) = $٢ - س$

ج/ د(س) = $٢ - س^٥$ ، ق(س) = $١ + س$

٤/ باستخدام القسمة التركيبية أوجد خارج وباقي قسمة د(س) على ق(س) في الآتي:

أ/ $\text{د(س)} = 2\text{س}^3 - 5\text{س}^2 + 2\text{س} - 2$ ، $\text{ق(س)} = \text{س} + 2$

ب/ $\text{د(س)} = 3\text{س}^4 - 2\text{س}^3 + 7\text{س} + 1$ ، $\text{ق(س)} = \text{س} - 1$

ج/ $\text{د(س)} = \text{س}^6 + 1$ ، $\text{ق(س)} = \text{س} - 1$

د/ $\text{د(س)} = 12\text{س}^3 + 5\text{س}^2 + 11\text{س} - 1$ ، $\text{ق(س)} = \text{س} - 2$

(٤-٤) حل معادلات الدرجة الثانية بيانياً

لحل معادلة الدرجة الثانية في المتغير s حيث الصورة العامة للمعادلة

$$\text{هي أس}^2 + \text{ب س} + \text{ج} = \text{صفر}$$

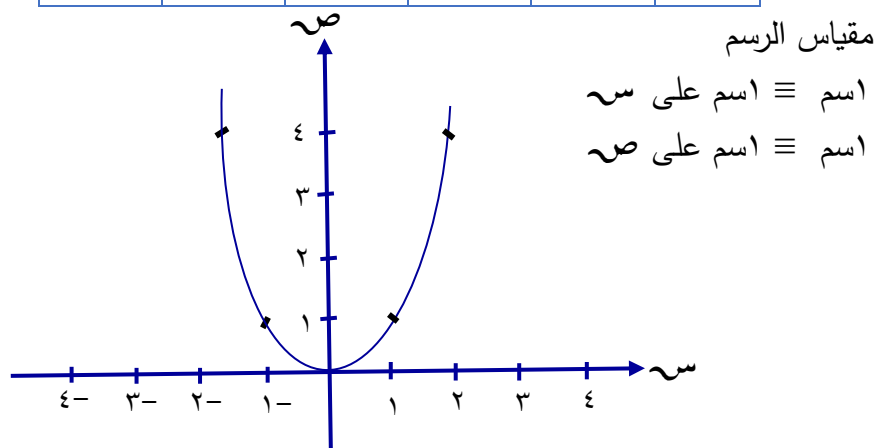
$\text{أ} \neq \text{صفر}$ ، أ ، ب ، ج اعداد حقيقية .

بيانياً عبارة عن إيجاد القيم التي يقطع فيها منحنى معادلة الدرجة الثانية محور السينات، أن وجدت تمثل حلول المعادلة وأن لم يقطع منحنى المعادلة المحور السيني أصلاً فلا يوجد لها حل حقيقي .

مثال: (١)

أرسم منحنى الدالة $s = s^2$ ومن ثم حل المعادلة $s^2 = 0$ حيث $-2 \leq s \leq 2$
الحل :

س	٢+	١	٠	١-	٢-
ص	٤	١	٠	١	٤



لا حظ أن المنحنى يقطع المحور السني عند $s = \text{صفر}$

$\therefore$ حل المعادلة $s^2 = 0$ هو $s = 0$

مثال: (٢)

أرسم منحنى الدالة $ص = س^٢ - ٢س - ٣$ ومن ثم جد جذور المعادلة

$$س^٢ - ٢س - ٣ = ٠ \quad -٣ \leq س \leq ٥$$

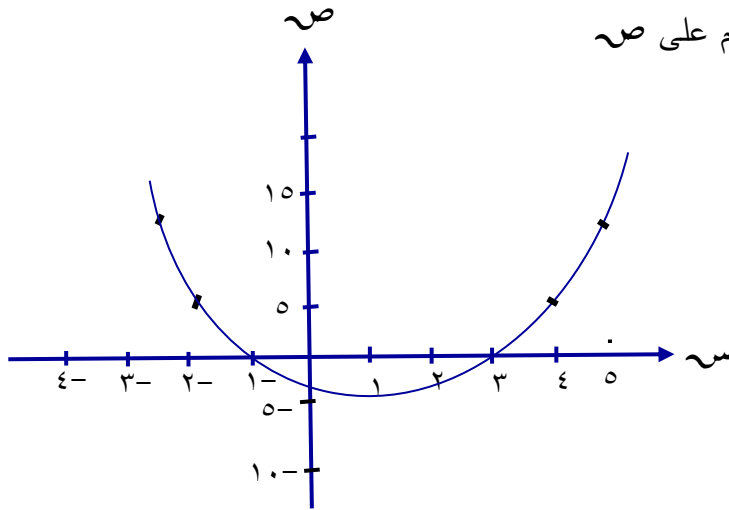
الحل :

س	٥	٤	٣	٢	١	صفر	١-	٢-	٣-
ص	١٢	٥	صفر	٣-	٤-	٣-	صفر	٥	١٢

مقياس الرسم

اسم $\equiv$ اسم على $س$

اسم $\equiv$ اسم على $ص$



المنحنى يقطع المحور السيني في ٣ ، ١ -

$\therefore$ جذور المعادلة ٣ ، ١ -

تمرين (٤ - ٤)

أ / أرسم منحنى الدالة $ص = س^2 - ٥س + ٧$ في الفترة (١ ، ٥) ومن ثم

حدّد هل للمعادلة $س^2 - ٥س + ٧ = ٠$ حل حقيقي في هذه الفترة .

ب / حل كلاً من المعادلات الآتية بيانياً .

$$(١) \quad س^2 - ٧س + ١٠ = \text{صفر} , \quad ٠ \leq س \leq ٦$$

$$(٢) \quad س^2 - ٨س + ١٦ = \text{صفر} , \quad -٢ \leq س \leq ٦$$

$$(٣) \quad س^2 - ٩ = \text{صفر} , \quad -٤ \leq س \leq ٣$$

$$(٤) \quad س^2 + ٢ = \text{صفر} , \quad -٣ \leq س \leq ٤$$

$$(٥) \quad س^2 - ٥س + ٦ = \text{صفر} , \quad -١ \leq س \leq ٦$$

$$(٦) \quad س^2 + ٣س + ١ = \text{صفر} , \quad -٣ > س \geq -٤$$

(٤ - ٥) تحليل الحدودية من الدرجة الثانية

إن الصورة العامة للحدودية من الدرجة الثانية (وتسمى أيضاً الحدودية التربيعية) هي : $أس^٢ + ب س + ج$ (حيث $أ \neq ٠$ صفر) . وقد مر بنا سابقاً كيفية تحليل هذا المقدار بالصف الثالث متوسط في حالته الخاصة عندما $أ = ١$. أى تحليل المقدار الثلاثى $أس^٢ + ب س + ج$. وقد وجدنا أنه إذا كان قابلاً للتحليل فيمكن وضعه في الصورة $(س + م) (س + ن)$ مثلاً :

$$س^٢ + ٤س + ٣ = (س + ٣) (س + ١) .$$

وبالمثل عندما يكون معامل $س^٢$ في المقدار الثلاثى لا يساوى الواحد ، فإن تحليلها لا يختلف عن سابقه إذ يتم البحث عن وضعها في الصورة

$$(هس + م) (وس + ن) .$$

ونعلم أن حاصل ضرب هذين القوسين هو :

$$هوس^٢ + ن هس + م وس + م ن$$

$$هوس^٢ + (ن ه + م و) س + م ن$$

لاحظ أن الحد الأول في الحدودية وهو $أس^٢$ عوامله هس ، وس وهما

$$\text{الحدان الأولان في القوسين (هس + م) (وس + ن) .}$$

والحد الثالث في المقدار الثلاثى وهو ج عوامله م ، ن وهما الحدان

الآخران في القوسين السابقين . وأن الحد الأوسط في المقدار الثلاثى وهو ب س

يساوى $(ن ه + م و) س$. أى ينتج من المجموع الجبرى لحاصل ضرب

الحددين الوسطين م ، وس والطرفين هس ، ن الموجودين في القوسين .

من هذه الملاحظات نستنتج أنه يمكن تحليل المقدار $أ س^2 + ب س + ج$ ، إذا أمكن تحليل الحد الأول إلى حدين متشابهين ، وتحليل حدها الأخير إلى عاملين بحيث يكون المجموع الجبري لحاصل ضرب أحد الحدين المتشابهين في أحد عاملي الحد الأخير ، وحاصل ضرب الحد الآخر من الحدين المتشابهين في العامل الآخر للحد الأخير مساوياً للحد الأوسط في المقدار .

مثال: (١)

حلل المقدار الثلاثي: $س^3 + ١٣ س + ١٢$

الحل:

نحلل الحد الأول إلى عاملين وهما $س^3$ ، $س$ وكذلك نحلل الحد الثالث ١٢ إلى عاملين إما موجبان معاً أو سالبان معاً (لماذا؟) . ولما كان الحد الأوسط $١٣ س$ وإشارته موجبة ، لذا فنحلل الحد ١٢ إلى عاملين موجبين معاً وهما :

١ ، ١٢ أو ٢ ، ٦ أو ٣ ، ٤ فتكون محاولات تحليل الحدودية كما يلي :
(١) $(س + ١) (س^3 + ١٢ س)$ وللتحقق من أن المجموع الجبري لحاصل ضرب الوسطين وحاصل ضرب الطرفين يساوي الحد الأوسط بالحدودية. فنجد أن :
 $س + ٣٦ س = ٣٧ س \neq$ الحد الأوسط $١٣ س$

لذا فهذه المحاولة لا تؤدي إلى الناتج الصحيح ، أي أنها محاولة فاشلة .

(٢) $(س + ٣) (س + ١٢)$:

$س + ١٢ س = ١٣ س \neq$ الحد الأوسط $١٣ س$
فهذه محاولة فاشلة أيضاً .

(٣) $(٣ \text{ س} + ٦) (٢ \text{ س} + ٦) : ٦ \text{ س} + ٦ \text{ س} = ١٢ \text{ س} \neq ١٣ \text{ س}$
وهذه محاولة فاشلة أيضاً .

(٤) $(٣ \text{ س} + ٢) (٢ \text{ س} + ٦) : ٢ \text{ س} + ١٨ \text{ س} = ٢٠ \text{ س} \neq ١٣ \text{ س}$
وهذه محاولة فاشلة أيضاً .

(٥) $(٣ \text{ س} + ٣) (٤ \text{ س} + ٣) : ٣ \text{ س} + ١٢ \text{ س} = ١٥ \text{ س} \neq ١٣ \text{ س}$
∴ محاولة فاشلة .

(٦) $(٣ \text{ س} + ٤) (٣ \text{ س} + ٤) : ٤ \text{ س} + ٩ \text{ س} = ١٣ \text{ س} = \text{الحد الأوسط بالحدودية} .$ لذا يكون تحليلها كالاتى :

$$٣ \text{ س}^٢ + ١٣ \text{ س} + ١٢ = (٣ \text{ س} + ٤) (٤ \text{ س} + ٣)$$

ان الطريق إلى الخيار الصحيح يأخذ بعض الوقت في المحاولات الفاشلة ولكن بمزيد من التدريب تستطيع أن تتوصل إلى الحالة المطلوبة بسهولة ويسر .

مثال : (٢)

$$\text{حل : } ٢ \text{ س}^٢ + ٣ - ٥ \text{ س}$$

الحل :

بترتيب حدود المقدار

$$٢ \text{ س}^٢ - ٥ \text{ س} + ٣$$

نحلل الحد الأول إلى عاملين هما ٢ س ، س

الحد الأوسط اشارته سالبة ، لذا نحلل الحد الثالث ٣ إلى عاملين هما -١ ، -٣

ونتبع الطريقة نفسها للوصول للمحاولة الصحيحة لتحليل المقدار

$$٢ \text{ س}^٢ - ٥ \text{ س} + ٣ \text{ وهي } (٣ - ٢ \text{ س}) (١ - \text{س})$$

للتأكد من صحة التحليل تأكد أن :

(١) حاصل ضرب الحدين الأولين في القوسين = الحد الأول في المقدار الثلاثي.

(٢) حاصل ضرب الحدين الأخيرين في القوسين = الحد الثالث في المقدار الثلاثي.

(٣) المجموع الجبري لحاصل ضرب الوسطين والطرفين يساوي الحد الثاني في المقدار الثلاثي.

مثال : (٣)

حل الحدودية : $١٥س^٢ + ٧س - ٢$

الحل :

نتبع الطريقة السابقة مع ملاحظة أن الحد الثالث بالمقدار وهو -٢ اشارته سالبة فنحلله إلى عاملين هما -١ ، ٢ أو -٢ ، ١ وتكون المحاولة الصحيحة للتحليل هي :

$$١٥س^٢ + ٧س - ٢ = (٥س - ١) (٣س + ٢)$$

يمكنك استخدام طريقة المقص $\times$ للمساعدة في التوصل إلى المحاولة الصحيحة للتحليل . ولأنه كثيراً ما توجد عدة احتمالات لذلك لا تبدأ بوضع كل الاحتمالات لأن هذا سيكون تطويلاً في العمل ، بل نضع أى احتمال نظن أنه الصحيح ونختبره فقد نجد الاحتمال الصحيح من أول محاولة .

مثال : (٤)

حلل المقدار : $٨س^٢ + ١٨س - ٣٥ص^٢$

الحل :

$$\begin{array}{cc} ٨س & + ٧ص \\ \times & \\ ٥ص- & س \end{array}$$

من الشكل :

$$٨س \times (٥ص - س) + ٧ص \times س = -٣٣صس$$

هذه المحاولة لا تعطي النتيجة المطلوبة

في المحاولة الثانية

الحد الأوسط =

$$\begin{array}{cc} ٤س & + ٧ص \\ \times & \\ ٥ص- & س \end{array}$$

$$٤س \times ٧ص + ٢س \times (٥ص - س)$$

= $١٨صس$ وهو الحد الأوسط المعطى .

$$\therefore ٨س^٢ + ١٨صس - ٣٥ص^٢ = (٤س - ٥ص) (٢س + ٧ص)$$

مثال : (٥)

حلل : $٦س^٢ - ٥ص - ٤$

الحل :

$$٦س^٢ - ٥ص - ٤ = (٢س + ١) (٣س - ٤)$$

تمرين (٤ - ٥)

حل كلاً من المقادير التالية :

- (١) $٣س - ١٢س - ١٥$
- (٢) $٢س - ٧س - ١٥$
- (٣) $٥ص - ١٦ص + ٣$
- (٤) $٤ص + ٥ص - ٦$
- (٥) $١٠س - ١٣س + ٤$
- (٦) $١٢ص - ١١ص - ٥$
- (٧) $١٠ج - ٢١ج + ٩$
- (٨) $٣م + ٥م - ٢$
- (٩) $١٢س + ١٩س + ٥$
- (١٠) $٣س + ١٠ص - ٢ص$
- (١١) $٢٤ص + ٢س - ٢ص - ٢س$
- (١٢) $١٢س - ٢٣س + ١٠ص + ٢ص$
- (١٣) $٣ - ٥ب - ١٢ب$
- (١٤) $٦ + ١٧ب + ٥ب$
- (١٥) $١٥ + ١٦ب - ١٥ب$

(٤ - ٦) حل معادلة الدرجة الثانية

لقد سبق أن درسنا في السنوات الماضية معنى المعادلة ومجموعة حل المعادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد وفي متغيرين وكذلك مجموعة حل المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد عندما يكون معامل s^2 الواحد الصحيح .

وعرفنا أن المعادلتين المتكافئتين هما المعادلتان اللتان لهما مجموعة الحل نفسها . وأن الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد هي :

$$as^2 + bs + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

وعندما يكون معامل s^2 يساوى الواحد الصحيح تصبح المعادلة على الصورة $s^2 + bs + c = 0$

وعرفنا أن حل هذه المعادلة يعتمد على إيجاد معادلة مكافئة لها على الصورة $(s - m)(s - n) = 0$ إن أمكن ذلك . واعتماداً على معلوماتنا بخواص مجموعة الأعداد الحقيقية يمكننا أن نكتب :

$$(s - m)(s - n) = 0 \Leftrightarrow s - m = 0 \text{ أو } s - n = 0$$

$$\Leftrightarrow s = m \text{ أو } s = n$$

ونقول أن مجموعة حل المعادلة هي $\{m, n\}$

كما في المثال التالى :

مثال (١) : جد مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - ٧س + ٦ = ٠$

الحل :

$$س^٢ - ٧س + ٦ = ٠$$

$$\Leftrightarrow (س - ١) (س - ٦) = ٠$$

$$\Leftrightarrow س - ١ = ٠ \text{ أو } س - ٦ = ٠$$

$$\Leftrightarrow س = ١ \text{ أو } س = ٦$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{ ١ , ٦ \}$$

أما عندما تكون معادلة الدرجة الثانية في صورتها العامة :

$$أس^٢ + بس + ج = ٠ , \quad أ \neq ٠$$

فيمكن حلها إذا أمكن كتابة المقدار في الطرف الأيمن على الصورة

$$(هس - م) (وس - ن)$$

أى إيجاد معادلة مكافئة لها من الشكل

$$(هس - م) (وس - ن) = ٠$$

$$\Leftrightarrow هس - م = ٠ \text{ أو } وس - ن = ٠$$

$$\Leftrightarrow س = \frac{م}{ه} \text{ أو } س = \frac{ن}{و}$$

مثال (٢) :

جد مجموعة حل المعادلة التالية في $\mathbb{R}$.

$$٦س^٢ + ٥س - ٤ = ٠$$

الحل :

$$٦س^٢ + ٥س - ٤ = ٠ \Leftrightarrow (٣س + ٤)(٢س - ١) = ٠$$

$$\Leftrightarrow ٣س + ٤ = ٠ \text{ أو } ٢س - ١ = ٠$$

$$\Leftrightarrow ٣س = -٤ \text{ أو } ٢س = ١$$

$$\Leftrightarrow س = \frac{-٤}{٣} \text{ أو } س = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \left\{ \frac{-٤}{٣}, \frac{١}{٢} \right\}$$

مثال : (٣)

جد مجموعة حل المعادلة التالية في $\mathbb{R}$

$$٤س^٢ + ١١س + ٦ = ٠$$

الحل :

$$٤س^٢ + ١١س + ٦ = ٠ \Leftrightarrow (٤س + ٦)(س + ١) = ٠$$

$$\Leftrightarrow ٤س + ٦ = ٠ \text{ أو } س + ١ = ٠$$

$$\Leftrightarrow س = \frac{-٦}{٤} \text{ أو } س = -١$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \left\{ -١, \frac{-٣}{٢} \right\}$$

تمرين (٤ - ٦)

جد مجموعة حل كل من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$

$$(١) \quad ٠ = ٥ + س٦ - ٢$$

$$(٢) \quad ٠ = ٥ + س٢٤$$

$$(٣) \quad ٠ = ٤ - س٢٩$$

$$(٤) \quad ٠ = ١٢ + س٧ - ٢$$

$$(٥) \quad ٠ = ٣ + س١٠ + س٢٣$$

$$(٦) \quad ٢- = (س٣ -)$$

$$(٧) \quad ٢- = (س١ +) (س٣ - ٤)$$

$$(٨) \quad ١٠ + س = (س٢ - ١) (س٢ - ١)$$

$$(٩) \quad ٠ = (س٤ -) + (س٤ - ٢)$$

$$(١٠) \quad ٠ = ١ - س\frac{١}{٤} - س٢\frac{٣}{٤}$$

(٤ - ٧) حل المعادلة بطريقة اكمال المربع

في كثير من الأحيان يتعذر طريقة التحليل إلى العوامل في حل المعادلات التربيعية فنلجأ إلى كتابتها بالصورة $(س + أ)^٢ = ب$ باستخدام طريقة يطلق عليها طريقة أكمال المربع ، خطوات حل المثال التالي يوضح هذه الطريقة .

مثال : (١)

حل المعادلة : $س^٢ + ٤س + ١ = ٠$ بطريقة اكمال المربع

الحل :

(١) بما أن معامل $س^٢ = ١$ ، نضيف $١-$ للطرفين لنحصل على

$$س^٢ + ٤س = ١ -$$

(٢) نضيف $(\frac{معامل س}{٢})^٢ = (\frac{٤}{٢})^٢ = ٤$ إلى طرفي المعادلة لنحصل

$$على س^٢ + ٤س + ٤ = ٤ + ١ -$$

(٣) تلاحظ أن الطرف الأيمن أصبح مربعاً كاملاً وبتحليله ينتج أن :

$$٣ = (س + ٢)^٢$$

(٤) و بجل هذه المعادلة ينتج أن :

$$س + ٢ = \sqrt{٣} \text{ أو } س + ٢ = -\sqrt{٣}$$

$$س = -٢ + \sqrt{٣} \text{ أو } س = -٢ - \sqrt{٣}$$

يلاحظ أن أى معادلة تربيعية يمكن تحويلها إلى مثل هذه الصورة بطريقة إكمال المربع .

مثال: (٢)

حل المعادلة :

$$٢س - ٨ - ٨ = ٠ \quad \text{بطريقة اكمال المربع}$$

الحل :

(١) نجعل معامل س $٢ = ١$ بقسمة المعادلة على العدد ٢ لنحصل على :

$$س - ٤ - ٤ = ٠$$

(٢) نضيف العدد ٤ لطرفي المعادلة لنحصل على

$$س - ٤ = ٤$$

(٣) نضيف $\left(\frac{\text{معامل س}}{٢} \right)^٢$ للطرفين لينتج

$$س - ٤ + ٤ = ٤ + ٤$$

(٤) وبتحليل الطرف الأيمن ينتج :

$$٨ = (س - ٢)^٢$$

بحل هذه المعادلة يكون جذراها هما العددين

$$٢ + \sqrt{٨} \quad , \quad ٢ - \sqrt{٨}$$

مثال: (٣)

حل المعادلة : $س^2 + ١٠س + ١٥ = ٠$ واكتب مجموعة حلها .

الحل :

$$س^2 + ١٠س + ١٥ = ٠$$

$$س^2 + ١٠س + ١٥ = ٢٥ + ١٥ = ٤٠$$

$$(س + ٥)^2 = ٤٠$$

$$س + ٥ = \pm \sqrt{٤٠} \Rightarrow س = -٥ \pm \sqrt{٤٠}$$

$$س = -٥ + \sqrt{٤٠} \text{ أو } س = -٥ - \sqrt{٤٠}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{ -٥ + \sqrt{٤٠}, -٥ - \sqrt{٤٠} \}$$

تمرين (٤ - ٧)

حل كل من المعادلات التالية بطريقة إكمال المربع

$$(١) \quad س^2 - ٣ = ٥$$

$$(٢) \quad س^2 + ٢س = ٢$$

$$(٣) \quad س^2 - ٢س - ٧ = ٠$$

$$(٤) \quad س^2 - ١ = ٣$$

$$(٥) \quad س^2 - ٢س + ١ = ٣$$

$$(٦) \quad س^2 + ٦س - ١٠ = ٠$$

$$(٧) \quad س^2 + ٣س - ١ = ٠$$

$$٤س^2 + ٨س - ٣ = ٠$$

$$(٨) \quad ٢س^2 + ٢س + ٥ = ٠$$

(٤ - ٨) القانون العام لحل المعادلة التربيعية

بالإعتماد على طريقة إكمال المربع يمكننا أن نشق قانوناً عاماً لحساب جذرى المعادلة التربيعية $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ كما يلي :

(١) نجعل معامل $س^٢$ يساوى الواحد بقسمة طرفى المعادلة على $أ$ فنحصل على المعادلة .

$$س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{ج}{أ} = ٠ \quad (١)$$

(٢) نضيف $\frac{ج}{أ}^-$ لطرفى المعادلة (١) لتنتج المعادلة

$$س^٢ + \frac{ب}{أ} س = \frac{ج}{أ}^- \quad (٢)$$

(٣) نضيف $\left(\frac{ب}{٢أ}\right)^٢$ لطرفى المعادلة (٢) لتنتج المعادلة

$$س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{ب^٢}{٤أ^٢} = \frac{ب^٢}{٤أ^٢} + \frac{ج}{أ}^-$$

وبتحليل الطرف الأيمن ينتج أن

$$\left(س + \frac{ب}{٢أ}\right)^٢ = \frac{ب^٢}{٤أ^٢} + \frac{ج}{أ}^- \quad (٣)$$

(٤) وبحل المعادلة (٣) ينتج أن :

$$س + \frac{ب}{٢أ} = \pm \sqrt{\frac{ب^٢}{٤أ^٢} + \frac{ج}{أ}^-}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{أ٤ - ٢ب ج}}{أ٢} \pm = \frac{ب}{أ٢} + س$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{أ٤ - ٢ب ج}}{أ٢} \pm ب - = \frac{\sqrt{أ٤ - ٢ب ج}}{أ٢} \pm \frac{ب}{أ٢} = س$$

$$\frac{\sqrt{أ٤ - ٢ب ج}}{أ٢} \pm ب - = س \text{ هذا يعني أن س}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{أ٤ - ٢ب ج}}{أ٢} + ب - = س \text{ أو } \frac{\sqrt{أ٤ - ٢ب ج}}{أ٢} - ب - = س$$

مثال: (١)

استخدم القانون لحل المعادلة :

$$س٢ + ٤ س - ٣ = ٠$$

الحل :

$$أ = ١ ، ب = ٤ ، ج = ٣ -$$

∴ بالتعويض في القانون

$$\frac{\sqrt{28} \pm 4}{2} = \frac{\sqrt{3 \times 4 - 16}}{1 \times 2} \pm 4 = \text{س}$$

$$\frac{\sqrt{7} \pm 2}{2} = \frac{\sqrt{7} \pm 4}{2} = \frac{\sqrt{7 \times 4} \pm 4}{2} =$$

فيكون جذرا المعادلة هما $\sqrt{7} + 2$ ، $\sqrt{7} - 2$ ،
(ويمكن تقريب قيمة $\sqrt{7}$ باستخدام الآلة الحاسبة)
مثال (٢) :

استخدم القانون لحل المعادلة :

$$4x^2 - 3x - 2 = 0$$

الحل :

$$أ = 4 ، ب = -3 ، ج = -2$$

$$\therefore x = \frac{(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 4 \times (-2)}}{2 \times 4} = \frac{\sqrt{41} \pm 3}{8}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{41} + 3}{8} \text{ أو } x = \frac{\sqrt{41} - 3}{8}$$

مثال : (٣)

حل المعادلة :

$$٠ = ٧ - ٥س - ٣س^٢$$

الحل :

$$أ = ٣ ، ب = -٥ ، ج = -٧$$

$$\therefore \text{س} = \frac{-(-٥) \pm \sqrt{(-٥)^2 - ٤ \times (-٧) \times (-٣)}}{٢ \times (-٣)}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ + ٨٤}}{٦}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٥ + \sqrt{١٠٩}}{٦} \text{ أو } \text{س} = \frac{٥ - \sqrt{١٠٩}}{٦}$$

تمرين (٤ - ٨)

حل المعادلات التالية مستخدماً القانون العام :

$$(١) \quad ٠ = ٣ - س^٢$$

$$(٢) \quad ٠ = ١ + س^٢$$

$$(٣) \quad ٠ = ٢ + س^٢$$

$$(٤) \quad ٠ = ٥ - س^٢$$

$$(٥) \quad ٠ = ٣ - س^٢$$

$$(٦) \quad ٠ = ٧ - س^٢$$

$$(٧) \quad ٠ = ١ + س^٢$$

$$(٨) \quad ١ = (س + ٢)$$

$$(٩) \quad ٠ = ٥ + س^٢$$

$$(١٠) \quad \frac{١}{٤} = \frac{س^٢}{٣} + \frac{س^٣}{٢}$$

$$(١١) \quad ٠ = \frac{٧}{٣٠} - \frac{س}{٢} + \frac{س^٢}{٥}$$

(١٢) ما هو العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى مثليه أصبح الناتج مساوياً للعدد ١٥ .

(٤ - ٩) المميز وخواص الجذور

يمكن حساب جذرى المعادلة التربيعية بالقانون :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أ ج}}{٢أ}$$

يُسمّى المقدار (ب^٢ - ٤ أ ج) مميز المعادلة ، حيث أنه يحدد نوع جذرى المعادلة ، فإما أن يكونا حقيقيين مختلفين أو حقيقيين متساويين أو غير حقيقيين . فإذا كان مميز المعادلة موجباً فيكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان . وإذا كان مميز المعادلة يساوى الصفر ، فيكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان . أما إذا كان مميز المعادلة سالباً ، فلا توجد جذور حقيقية للمعادلة .

مثال : (١)

بيّن نوع جذرى المعادلة التالية ثم أوجدتهما إذا كانا حقيقيين

$$س^٢ - ٦ س + ٧ = ٠$$

الحل :

مميز المعادلة ب^٢ - ٤ أ ج = (-٦)^٢ - ٤ × ٦ × ٧ = -٢٠ < ٠ ،
وحيث أن $\sqrt{-٢٠}$ عدد غير حقيقى فلا يوجد جذران حقيقيان للمعادلة .

مثال : (٢)

جد مميز المعادلة : س^٢ - ٤ س + ١ = ٠ ، ثم حلها

الحل :

$$مميز المعادلة = (-٤)^٢ - ٤ × ٤ × ١ = ٠$$

∴ جذرا المعادلة هما $\frac{٤ \pm ٠}{٢}$ أى $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ حقيقيان متساويان

مثال: (٣)

حل المعادلة : $x^2 - 2x - 2 = 0$

الحل :

مميز المعادلة $(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2)} = 2 \pm \sqrt{12} = 2 \pm 2\sqrt{3}$

∴ يوجد جذران حقيقيان مختلفان للمعادلة هما :

$x_1 = 2 + 2\sqrt{3}$ ، $x_2 = 2 - 2\sqrt{3}$ (تحقق من ذلك) .

تمرين (٤ - ٩)

(١) جد مميز كل معادلة فيما يلي ثم بين نوع جذريها

(حقيقية متساوية ، حقيقية غير متساوية ، غير حقيقية)

(أ) $x^2 - 5x + 4 = 0$

(ب) $x^2 - 6x - 9 = 0$

(ج) $x^2 - 5x = 0$

(د) $x^2 - 16 = 0$

(٢) جد مميز كل معادلة فيما يلي ثم حلها وتحقق من صحة الحل .

(أ) $x^2 - 5x + 1 = 0$

(ب) $x^2 = 6x - 8$

(ج) $x^2 - 3x = -5$

(د) $x^2 + 3x + 13 = 0$

(هـ) $x^2 - 12x + 36 = 0$

(و) $20 = 12x - x^2$

(٣) ما مقدار ك الذى يجعل جذرى المعادلة: $x^2 - 6x + ك = 0$ متساويين

(٤) إذا كان جذرا المعادلة $x^2 + 2(م + ١)x + م^2 = 0$ متساويين فما قيمة

الثابت م ؟

(٥) بين أن جذرى المعادلة $x^2 - ١ = 0$ (ب - ج) حقيقيان دائماً .

(٤ - ١٠) تبسيط المقادير الكسرية

نتعامل مع المقادير الكسرية مثل التعامل مع الكسور الاعتيادية والمركبة .
فالكسر يمكن اختصاره أو وضعه في أبسط صورة :
مثلاً :

$$\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

ومن دراستنا السابقة الأسس تعرّفنا كيفية إجراء العمليات على الأسس و وضع
المقدار في أبسط صورة.

مثلاً : ضع كل مما يلي في أبسط صورة :

$$(أ) \quad \frac{4 \text{ س } 3 \text{ ص } 2}{6 \text{ س } 2 \text{ ص } 2} \quad (ب) \quad \frac{15 \text{ س } 5}{9 \text{ س } 4}$$

الحل :

$$(أ) \quad \frac{2 \text{ س } 2 \text{ ص } 2}{3} = \frac{4 \text{ س } 3 \text{ ص } 2}{6 \text{ س } 2 \text{ ص } 2}$$

$$(ب) \quad \frac{15 \text{ س } 5}{9 \text{ س } 4} = \frac{5 \text{ س } 3}{3 \text{ س } 4}$$

والآن سوف نتعرّف العمليات على المقادير الكسرية

مثال: (١)

بسّط المقدار الكسري التالي :

$$\frac{(2 - \text{س})}{(1 + \text{س})} = \frac{(2 - \text{س})(1 - \text{س})}{(1 + \text{س})(1 - \text{س})} = \frac{2 \text{ س } 3 - 2 \text{ س } 2}{1 - 2 \text{ س}}$$

مثال: (٢)

بسّط المقدار الكسري التالي :

$$\frac{2s(s+1)(s+2)}{3s(s+2)(s-3)} = \frac{2s(s^2+3s+2)}{3s(s^2-s-6)} = \frac{2s^3+6s^2+4s}{3s^3-3s^2-18s} = \frac{2(s+1)}{3(s-3)}$$

(أ) جمع وطرح المقادير الكسرية:

تجرى عمليتا الجمع والطرح على المقادير الكسرية بنفس الطريقة التي نتعامل معها في الكسور العادية .

مثال : (١)

أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة

$$(أ) \frac{3s}{2ص} + \frac{5}{2ص4} \quad (ب) \frac{s+1}{3س2} + \frac{s-1}{2س4}$$

$$\text{الحل : (أ)} \quad \frac{3s}{2ص} + \frac{5}{2ص4} = \frac{6س + 5}{2ص4}$$

$$\frac{6س + 5}{2ص4} =$$

لاحظ أن ٢ص4 هو المضاعف المشترك الأصغر للمقامين

$$\text{ب) } \frac{1-s}{s^4} + \frac{1+s}{s^2}$$

$$= \frac{(1-s)s}{s^4} + \frac{(1+s)s^2}{s^4} = \frac{s^2+s+s^2}{s^4} = \frac{2s^2+s}{s^4}$$

مثال: (٢)

اختصر الآتي :

$$\frac{s}{1-s} - \frac{s^2}{1-s^2}$$

الحل:

$$\frac{s(1+s)}{(1-s)(1+s)} - \frac{s^2}{(1-s)(1+s)} = \frac{s}{1-s} - \frac{s^2}{(1-s)(1+s)}$$

$$= \frac{s - s^2}{(1-s)(1+s)} = \frac{s(1-s)}{(1-s)(1+s)} =$$

$$\frac{s(1-s)}{(1-s)(1+s)} = \frac{s}{1+s} =$$

$$\frac{s}{1+s} =$$

مثال : (٣)

أوجد ما يلي في أبسط صورة :

$$\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{s^2}{s+1} + \frac{s^3}{s-1}$$

المضاعف المشترك الأصغر للمقامات = $(s-1)^2(s+1)$

$$= \frac{s^3(s-1)(s+1) + s^2(s-1)^2 + (s+1)^2}{(s-1)^2(s+1)}$$

$$= \frac{s^3(s^2-1) + s^2(s^2-2s+1) + (s^2+2s+1)}{(s-1)^2(s+1)}$$

$$= \frac{s^3(s^2-1) + s^2(s^2-2s+1) + (s^2+2s+1)}{(s-1)^2(s+1)}$$

$$= \frac{s^5 - s^3 + s^4 - 2s^3 + s^2 + s^2 + 2s + 1}{(s-1)^2(s+1)}$$

$$= \frac{s^5 - s^3 + s^4 - 2s^3 + s^2 + s^2 + 2s + 1}{(s-1)^2(s+1)}$$

(ب) ضرب وقسمة المقادير الكسرية :

نتبع نفس أسلوب الكسور العادية

مثال (١) : جد حاصل الضرب :

$$\frac{ص^٢ + ص^٣ + ٢}{١ - ص} \times \frac{ص^٢ + ص - ٢}{١ + ص}$$

$$\frac{(ص+٢)(ص+١)(ص-١)}{(١-ص)} \times \frac{(ص+٢)(ص-١)}{(١+ص)} = \frac{ص^٢ + ص^٣ + ٢}{١ - ص} \times \frac{ص^٢ + ص - ٢}{١ + ص}$$

$$= (ص+٢)(ص-١)$$

مثال (٢) : اختصر

$$\frac{(٤ - ص)^٢}{٢(٣ - ص)} \times \frac{ص^٢ - ٩}{ص^٢ - ١٦}$$

$$\frac{(٤ - ص)(٣ + ص)}{(٤ + ص)(٣ - ص)} = \frac{(٤ - ص)(\cancel{٤ - ص})}{(٣ - ص)(\cancel{٣ - ص})} \times \frac{(٣ + ص)(\cancel{٣ - ص})}{(٤ + ص)(\cancel{٤ - ص})}$$

في حالة القسمة : نقالب الكسر المقسوم عليه ونضرب

مثال (٣) : اختصر

$$\frac{ص^٢ - ٢}{ص^٢ + ص - ٢} \div \frac{ص^٢ - ٢ + ص}{١ - ص}$$

$$\frac{ص^٢ - ٢ + ص}{ص^٢ - ٢} \times \frac{ص^٢ - ٢ + ص}{١ - ص}$$

$$= \frac{(ص+٢)(١ - ص)}{(\cancel{ص-٢})(\cancel{ص-٢})} \times \frac{(ص+٢)(١ - ص)}{(\cancel{ص-٢})(\cancel{ص-٢})}$$

$$= (١ - ص)(ص+٢)$$

تمرين (٤ - ١٠)

١ / أوجد ناتج الجمع والطرح في كلا مما يأتي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{ص}{٥} + \frac{٥}{س٢}$

(ب) $\frac{ص}{س٢} + \frac{س}{ص٥}$

(ج) $\frac{٣}{س} + \frac{١}{س-١}$

(د) $\frac{١}{س-٢} + \frac{٢}{س}$

(هـ) $\frac{٢}{س٢-٤س+٤} - \frac{٣}{س٢-٤}$

(و) $\frac{٣}{ص-٥} - \frac{٢}{ص+٥}$

(٢) اختصر كلا مما يأتي :

(أ) $\frac{٢}{ص-٤} - \frac{٣}{ص-٥} + \frac{٥}{ص٢-٩ص+٢٠}$

(ب) $\frac{٢}{ص-٤} - \frac{٤}{س+٣} + \frac{س+٢}{س-٣}$

(ج) $\frac{٢}{س+٤} - \frac{٣}{س-٤}$

٣/ اختصر:

$$(١) \quad \frac{١٨}{س} \times \frac{س^٢ - ٣}{٣}$$

$$(٢) \quad \frac{س - ص}{٨} \div \frac{س - ص}{٤}$$

$$(٣) \quad \frac{س + ٥}{س + ص} \times \frac{س^٢ - ٢ص}{٢٥ - س^٢}$$

$$(٤) \quad \frac{٩ - س^٢}{١ + ص + س^٢} \times \frac{١ - ص}{٩ + س^٢ - ١٢س}$$

$$(٥) \quad \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س^٢ - ٣س + ٢} \div \frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س^٢ - ٤}$$

(٤-١١) نظرية الباقي

نعلم أنه عند قسمة العدد ٢٢ على ٧ يكون خارج القسمة ٣ والباقي ١.

وهذه النتيجة يمكن كتابتها بالصورة : $٢٢ = ٣ \times ٧ + ١$

هذا المفهوم يمكن تطبيقه أيضاً عندما نقسم دالة كثيرة حدود على دالة من

الدرجة الأولى موضحين ذلك بالمثل التالي :

مثال (١): جد خارج القسمة والباقي عند قسمة

$$د(س) = س^٣ - ٤س^٢ + ٧س - ١ \text{ على } (س - ٢).$$

الحل :

نستخدم طريقة القسمة المطولة :

$$\begin{array}{r} \text{س}^٢ - ٢س + ٣ \\ \hline \text{س}^٣ - ٤س^٢ + ٧س - ١ \\ \underline{\text{س}^٣ - ٢س^٢} \\ ٢س^٢ + ٧س - ١ \\ \underline{٢س^٢ - ٤س} \\ ١١س - ١ \\ \underline{١١س - ٢٢} \\ ٢١ \end{array}$$

∴ خارج القسمة = $س^٢ - ٢س + ٣$ والباقي = ٥

وعليه يمكن أن نكتب نتيجة ما توصلنا إليه من حل هذا المثال السابق في

الصورة :

$$د(س) = س^3 - ٤س^2 + ٧س - ١ = (س - ٢)(س^2 - ٢س + ٣) + ٥$$

إذا عوّضنا $س = ٢$ في هذه المتطابقة نحصل مباشرة على الباقي حيث :

$$د(٢) = ٥ + ٠ = ٥$$

لاحظ أن العدد ٢ هو العد الذي يجعل $(س - ٢)$ صفراً .

عموماً إذا قسمنا دالة كثيرة حدود $د(س)$ على $(س - أ)$ حيث $أ \in \mathbb{C}$ وكان خارج القسمة دالة $ه(س)$ والباقي $ب$ فإن العلاقة بين هذه المقادير تمثلها المتطابقة :

$$د(س) = (س - أ) \cdot ه(س) + ب$$

بتعويض $س = أ$ في هذه المتطابقة نجد أن :

$$د(أ) = ب \quad \text{و هي نظرية الباقي التي نعرفها كما يلي :}$$

إذا قسمنا دالة كثيرة حدود $د(س)$ على $س - أ$ فإن الباقي $د(أ)$ حيث $أ$ هو العدد الذي يجعل $(س - أ) = ٠$ صفر

لاحظ أن هذه النظرية توفر لنا طريقة بسيطة جداً لحساب الباقي دون حاجة لإجراء القسمة المطولة لكنها لا تمكننا من معرفة خارج القسمة بطريقة مباشرة .

مثال (٢):

جد الباقي عند قسمة $س^3 + ٤س^2 - ٢س - ٩$ على $(س + ٣)$

الحل:

$$د(س) = س^3 + ٤س^2 - ٢س - ٩$$

العدد الذي يجعل $س + ٣ = ٠$ هو $٣-$

$\therefore$ الباقي $د(٣-) =$

$$٩ - (٣-) \times ٢ - ٤ \times (٣-) + ٩ =$$

$$٦ = ٩ - ٦ + ٣٦ + ٢٧ =$$

مثال (٣): جد الباقي عند قسمة $س^3 - ٥س^2 + ٣س + ١$ على $٢س - ١$

الحل :

$$د(س) = س^3 - ٥س^2 + ٣س + ١$$

العدد الذي يجعل $٢س - ١ = ٠$ هو $\frac{١}{٢}$

$$\therefore \text{الباقي} = د\left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{١}{٨} \times ٢ - \frac{١}{٤} \times ٥ + ٣ + \frac{١}{٢} = ٢$$

مثال (٤): إذا كان باقي قسمة $س^2 + جس + ٧$ على $س - ٢$ يساوي $٩-$ ،

جد قيمة ج

الحل :

$$د(س) = س^2 + جس + ٧$$

معطى $د(٢) = ٩-$

$$\therefore ٩- = ٧ + (٢) \times ج + ٢$$

$$٩- = ٧ + ج + ٢$$

$$٢٠- = ج \therefore ١٠- =$$

تمرين (٤ - ١١)

١/ مستخدما القسمة المطولة ، جد خارج القسمة والباقي عند قسمة د (س) على

ق (س) في كل مما يلي :

أ) د (س) = $س^٣ - ٧س^٢ + ٦س + ٢$ ، ق (س) = $س + ٢$

ب) د (س) = $س^٤ + ٣س^٢ - ٣$ ، ق (س) = $س^٢ + ١$

ج) د (س) = $س^٤ - ١$ ، ق (س) = $س - ١$

٢/ مستخدما نظرية الباقي ، جد الباقي عند قسمة د (س) على ق (س) في كل

مما يلي :

أ. د (س) = $س^٤ - ٦س^٣ + ٥س^٢ - ٢$ ، ق (س) = $س - ٢$

ب. د (س) = $س^٣ - ٢س^٢ + ٣س - ٩$ ، ق (س) = $س - ٤$

ج. د (س) = $س^٣ - ٣س^٢ - ١$ ، ق (س) = $س^٢ + ٣$

٣/ إذا كان باقي قسمة $س^٣ - ٣س^٢ + س + ك$ على $س - ٢$ يساوي -٧ جد قيمة

ك .

(١٢-٤) نظرية العامل

علمنا من نظرية الباقي أنه عندما نقسم د(س) على س - أ فإن الباقي = د(أ) حيث أ هو العدد الذي يجعل س - أ = ٠ في الحالة التي يكون فيها د(أ) = صفر نقول أن د (س) قابلة للقسمة على (س - أ) وعندئذ يكون (س - أ) عاملاً للدالة د(س).

تعريف :

يكون (س - أ) عاملاً للدالة كثيرة الحدود د(س) إذا وفقط إذا كان د (أ) = صفرًا

بواسطة هذه النظرية يمكننا تحليل كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة فأكثر .

مثال (١): حل تحليلًا كاملاً للدالة : $س^٣ - ٧س - ٦$

الحل :

لتكن د (س) = $س^٣ - ٧س - ٦$

نختار العدد أ من بين عناصر المجموعة $\{١ \pm, ٢ \pm, ٣ \pm, ٦ \pm\}$

وهي عوامل العدد ٦ في د (س) .

$$د(١) = ١ - ٧ - ٦ = -١٢ \neq ٠ \therefore ١ - س ليس عاملاً للدالة$$

$$د(-١) = -١ + ٧ - ٦ = ٠$$

$\therefore س - (١-) = س + ١$ عامل للدالة ثم بإجراء القسمة المطولة:

$$\begin{array}{r}
\text{س}^2 - \text{س} - 6 \\
\hline
\text{س}^3 - 7\text{س} - 6 \quad | \quad \text{س} + 1 \\
\hline
\text{س}^3 + \text{س}^2 \\
\hline
- \text{س}^2 - 7\text{س} - 6 \\
\hline
- \text{س}^2 - 6\text{س} \\
\hline
- 6\text{س} - 6 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\therefore \text{س}^3 - 7\text{س} - 6 = (\text{س} + 1)(\text{س}^2 - \text{س} - 6)$$

$$= (\text{س} + 1)(\text{س} + 2)(\text{س} - 3)$$

كما يمكن الاستمرار بنفس الطريقة الأولى مع بقية عوامل العدد 6 .

مثال (٢): إذا كان $\text{س} + 2$ عاملاً للدالة :

$\text{س}^3 + \text{ب}\text{س}^2 - 4\text{س} + 12$ ، جد قيمة ب ثم أكمل تحليل الدالة.

الحل :

$$\text{لتكن د (س)} = \text{س}^3 + \text{ب}\text{س}^2 - 4\text{س} + 12$$

بما أن $(\text{س} + 2)$ عامل للدالة

$$\therefore \text{د}(-2) = 0 \text{ حيث } -2 \text{ هو العدد الذي يجعل } \text{س} + 2 = 0$$

$$0 = (-2)^3 + \text{ب}(-2)^2 - 4(-2) + 12$$

$$0 = -8 + 4\text{ب} + 8 + 12$$

$$\text{ب} = -3$$

تصبح د (س) = $s^3 - s^2 - 4s + 12$
 نواصل الحل بعد ذلك أما باختيار أعداد أخرى من عوامل ١٢ أو بواسطة
 القسمة :

$$\begin{array}{r}
 s^3 - s^2 - 4s + 12 \\
 \underline{s^3 + 2s^2} \\
 -3s^2 - 4s + 12 \\
 \underline{-3s^2 - 6s} \\
 2s + 12 \\
 \underline{2s + 12} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore s^3 - s^2 - 4s + 12 &= (s+2)(s^2 - 3s + 6) \\
 &= (s+2)(s-2)(s-3)
 \end{aligned}$$

تمرين (٤ - ١٢)

(١) أثبت أن ق(س) عامل لكثيرة الحدود د(س) فيما يأتي :

$$أ/ ق(س) = س^3 + ٣ ، د(س) = س^3 + ٢س^٢ - ٥س - ٦$$

$$ب/ ق(س) = س^2 - ٢ ، د(س) = س^3 - س^2 - ٦س + ٦$$

(٢) حل تحليلاً كاملاً :

$$أ) س^٣ - ٣س^٢ + ٤$$

$$ب) ص^٣ + ٦ص^٢ + ١١ص + ٦$$

$$ج) س^٤ - س^٣ + ٤س^٢ + ٦س$$

$$د) س^٤ + س^٣ - ٣س^٢ - ٤س - ٤$$

$$هـ) س^٣ - ٦٤$$

$$(٣) إذا كان د(س) = س^٦ - ٥س^٤ - ١٠س^٢ + ك$$

جد قيمة ك التي تجعل س-١ عاملاً للدالة د(س).

$$(٤) إذا كان (س+١) و (س-٢) عاملين للدالة :$$

$$د(س) = س^٤ + م س^٣ + ن س^٢ - ١٦س - ١٢$$

جد قيمة كل من الثابتين م ، ن ثم عيّن بقية العوامل.

(٤-١٣) جذور المعادلة من درجة أكبر من ٢

تستخدم نظرية العامل لإيجاد جذور المعادلات من الدرجة الثالثة فما فوق.

إذا كانت د (س) دالة كثيرة حدود ، يقال أنّ العدد أ جذراً للمعادلة د (س) = ٠ إذا وفقط إذا كان د (أ) = ٠

مثال (١): أثبت أنّ س = ١ جذراً للمعادلة :

$$س^٣ - ٤س^٢ - ٧س + ١٠ = ٠ \text{ ثم أوجد الجذرين الآخرين.}$$

الحل :

$$\text{لتكن د (س) = } س^٣ - ٤س^٢ - ٧س + ١٠$$

$$د (١) = ١ - ٤ - ٧ + ١٠ = ٠$$

∴ العدد ١ جذر للمعادلة وبالتالي يكون س - ١ عاملاً للدالة د (س) .

لإيجاد بقية الجذور نجرب عوامل العدد ١٠ أو نجري القسمة المطوّلة .

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{س}^٣ - ٤س^٢ - ٧س + ١٠ \\
 \underline{\text{س}^٣ - ٤س^٢} \\
 ٧س + ١٠ \\
 \underline{٧س + ٧س} \\
 ١٠ - ٧س \\
 \underline{١٠ - ٧س} \\
 ٠
 \end{array}
 \end{array}$$

تصبح المعادلة هي (س - ١) (س^٢ - ٣س - ١٠) = ٠

$$٠ = (س - ١)(س + ٢)(س - ٥)$$

∴ الجذران الآخران -٢ ، ٥

مثال (٢): حل المعادلة ٢س^٤ + ٣س^٣ - ١٨س^٢ + ٨س = ٠

الحل :

باستخراج العامل المشترك تصبح المعادلة هي :

$$٠ = س (س٢ + ٣س + ٣س - ١٨ + ٨)$$

$$٠ = س د (س) = ٢س + ٣س - ١٨ + ٨$$

$$٠ \neq ٨ + ١٨ - ٣ + ٢ = د (١)$$

$$٠ \neq ٨ + ١٨ + ٣ + ٢ = د (-١)$$

$$٠ = ٨ + ٣٦ - ١٢ + ١٦ = د (٢)$$

∴ (س - ٢) عامل للدالة د (س)

نجري عملية القسمة المطوّلة:

$$\begin{array}{r} ٢س٢ + ٧س - ٤ \\ \hline ٢س٢ + ٣س - ١٨ + ٨ \quad ٢س - ٢ \\ \hline ٢س٢ - ٤س \\ \hline ٧س - ١٨ + ٨ \\ ٧س٢ - ٤س \\ \hline ٨ + ٤س - \\ ٨ + ٤س - \\ \hline ٠ \end{array}$$

تصبح المعادلة على الصورة :

$$\begin{aligned} \text{س (س-٢) (٢س}^2 + ٧\text{س-٤)} &= ٠ \\ \text{س (س-٢) (٢س}^2 + ٧\text{س-٤)} &= ٠ \\ \therefore \text{ جذور المعادلة هي } ٠, ٢, \frac{١}{٢}, -٤ \end{aligned}$$

تمرين (٤ - ١٣)

(١) جد جذور كل من المعادلات الآتية :

$$(أ) \text{ س}^3 - ٧\text{س} + ٦ = ٠$$

$$(ب) \text{ س}^3 + ٢\text{س}^2 - ١١\text{س} + ١٢ = ٠$$

$$(ج) \text{ س}^3 - ٣\text{س}^2 - ١٣\text{س} + ١٥ = ٠$$

(٢) إذا كان د (س) = $\text{س}^2 + \text{ب س} + \text{ج}$ (ب ، ج ثابتان) ، جد كل من ب ،

ج علماً بأن باقي قسمة د (س) على س-١ يساوي ٦ و باقي قسمتها على

(س + ١) يساوي ١٢

(٣) إذا كان د (س) = $\text{س}^n - \text{أ}^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ فأثبت أنه :

أ. عندما يكون ن عدداً زوجياً فإن د (س) تقبل القسمة على كل من

(س - أ) و (س + أ)

ب. عندما يكون ن عدداً فردياً فإن د (س) تقبل القسمة على (س - أ)

بينما لا تقبل القسمة على (س + أ) .

الربط مع الحياة

كثيرات الحدود ليست مجرد تعابير رياضية ، بل ترتبط ارتباطاً وثيقاً بحياتنا اليومية ، حيث تعكس انماطاً و علاقات أساسية تظهر في مواقف و مجالات مختلفة و متنوعة منها:

(أ) كثيرات الحدود وقسمتها نجدها في المجالات :

١. الهندسة المدنية (تصميم الطرق و الجسور) : تستخدم كثيرات الحدود لتمثيل الأقواس والانحناءات في الجسور و تقريب مسار المنعطفات في الطرق لضمان السلاسة والأمان.
٢. التنبؤ في التمويل : يتم استخدام كثيرات الحدود لتقدير النمو أو الهبوط في الأسواق.

(ب) حل معادلة الدرجة الثانية نجدها في المجالات :

١. الحركة الباليستية (المقذوفات) : مسار أي جسم مقذوف يمثل بمعادلة تربيعية حيث حلها يعطي زمن الوصول أو الارتفاع.
٢. البيئة (الانبعاثات والتلوث) : العلاقة بين عدد السيارات ومستوى التلوث قد تقارب بمعادلة تربيعية.

(ج) المميز وخواص الجذور نجده في المجالات :

١. الفيزياء (الحركة العمودية) : المميز يحدد إذا كان الجسم يصل للأرض أم لا.
٢. الزراعة (الإنتاج والسماد) : المميز يحدد إذا كان هناك كميتان مختلفتان للسماد تعطي نفس الإنتاج.

(د) نظرية الباقي نجدها في المجالات :

١. البرمجة (التحقق من صحة البيانات) :يستخدم لفحص أخطاء الأكواد.
مثلاً: كود تحقق (checksum) يعتمد على باقي القسمة.
٢. المحاسبة : تستخدم لتوزيع الأرباح أو الأرصدة. مثلاً: الباقي يحدد الجزء غير المستغل من رأس المال.

(هـ) نظرية العامل نجدها في المجالات :

١. الهيدروليك : لتصميم القنوات. مثلاً: العامل يشير إلى نقطة قصوى للتدفق.
٢. الروبوتات : تُستخدم في التحكم بالمسار.

(و) جذور المعادلة من الدرجة أكبر من ٢ نجدها في المجالات :

١. الملاحة الجوية : لتحديد مسار الطائرات. مثلاً: معادلة رباعية تمثل نقاط توازن الطائرة.
٢. الاقتصاد (نقاط التوازن) : معادلة من الدرجة الثالثة قد تحدد عدة نقاط توازن.

الوحدة الخامسة



أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :-

- ١- يتعرّف مفهوم التغيّر .
- ٢- يتعرّف التغيّر الطردي .
- ٣- يتعرّف التغيّر العكسي .
- ٤- يتعرّف التغيّر المشترك .
- ٥- يتعرّف التغيّر الجزئي .

(٥ - ١) التغير الطردي

يقصد بالتغير بصفة عامة الزيادة أو النقصان في الكمية . خذ مثلاً الجدول التالي الذى يوضح الزمن بالساعة مع المسافة المقطوعة بواسطة سيارة إذا كانت السيارة تتحرك بسرعة ثابتة .

الزمن بالساعة	المسافة بالكيلومتر
١	٣٠
٢	٦٠
٣	٩٠
٤	١٢٠

تلاحظ أنه كلما زاد الزمن زادت المسافة المقطوعة ونلاحظ أيضاً أن نسبة تزايد الزمن هي نفسها نسبة تزايد المسافة . مثل هذا التغير يُسمى بالتغير الطردي .
نشاط :

جد المسافة المقطوعة في ٥ ساعات ، ٧ ساعات ، ١٠ ساعات .

بفرض أن F المسافة و n الزمن

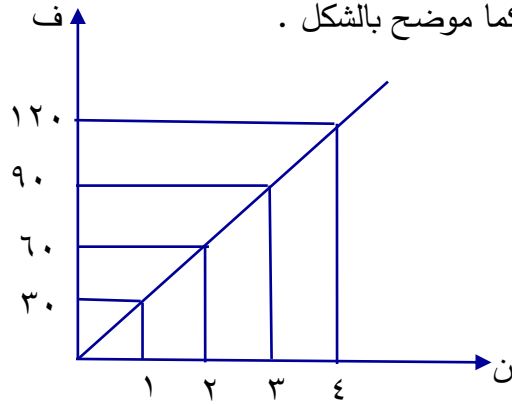
$$F_1 = 30 \times 5 = 150 \text{ كيلومتراً}$$

$$F_2 = 30 \times 7 = 210 \text{ كيلومتراً}$$

$$F_3 = 30 \times 10 = 300 \text{ كيلومتراً}$$

من النشاط السابق تلاحظ أنه لايجاد المسافة فإننا دائماً نضرب الزمن في الثابت ٣٠ ، أي أن $F = 30 \times N$ حيث F المسافة ، N الزمن .
وهذا الثابت يُسمى ثابت التغير أو ثابت التناسب .
وبصفة عامة فإن $F = A \times N$ حيث A ثابت التغير .

وإذا رسمنا الخط البياني للزمن (N) والمسافة (F) من الجدول أعلاه نجد أنه خطاً مستقيماً ماراً بنقطة الأصل كما موضح بالشكل .



مقياس الرسم:

١ سم $\equiv$ ١ ساعة على N
١ سم $\equiv$ ٣٠ كلم على F

ومن أمثلة التغير الطردي (أو التناسب الطردي) :

١- محيط الدائرة يتغير طردياً بتغير طول قطرها أى كلما كبر طول القطر كبر المحيط .

٢- مساحة الدائرة تتغير طردياً مع مربع نصف قطرها .

٣- شدة التيار الكهربائي (بالأمبير) تتغير طردياً مع فرق الجهد (بالفولت).

تعريف :

إذا كان s ، v متغيرين ، a عدد حقيقي موجب
(ثابت) . وكان $v = a s$ ، فإننا نقول أن v
تتغير طردياً مع s ، ونكتب $v \propto s$ أو v
تتناسب طردياً مع s .
ويُسمَّى s المتغير المستقل ، v المتغير التابع

مثال: (١)

إذا كان v يتغير طردياً مع s ، وكان $v = 15$ عندما $s = 7$. جد
قيمة s عندما $v = 30$

الحل :

$$v \propto s \Leftrightarrow v = a s$$

$$\therefore 15 = a \times 7 \Leftrightarrow a = \frac{15}{7}$$

$$\therefore v = a s$$

$$\therefore \frac{15}{7} = 30 \quad s$$

$$\therefore s = \frac{7 \times 30}{15} = 14$$

مثال: (٢)

إذا كان v يتغير طردياً مع الجذر التربيعي للمقدار s . فإذا كان $v = ١٠$ عندما $s = ٤$ جد ما يلي :

١- القانون العام (العلاقة بين v ، s) .

٢- قيمة v عندما $s = ٩$.

الحل :

$$\begin{aligned} v \propto \sqrt{s} &\Rightarrow v = \sqrt{s} \cdot k \\ ١٠ = \sqrt{٤} \cdot k &\Rightarrow ١٠ = ٢ \cdot k \\ k &= \frac{١٠}{٢} = ٥ \\ v &= ٥ \sqrt{s} \end{aligned}$$

$$٢- \text{ إذا كان } s = ٩ \text{ فإن } v = ٥ \sqrt{٩} = ٥ \times ٣ = ١٥$$

ومن التعريف نستنتج ما يأتي :

إذا كان $v \propto s$ ، وأخذ المتغير s القيمتين $s_١$ ، $s_٢$ وتبعاً لذلك أخذ

$v_١$ ، $v_٢$ القيمتين $v_١$ ، $v_٢$ على الترتيب فإن :

$$\frac{v_١}{v_٢} = \frac{s_١}{s_٢}$$

$$\text{أي إذا كان } v \propto s \text{ فإن } \frac{v_١}{v_٢} = \frac{s_١}{s_٢}$$

مثال: (٣)

س ، ص متغيران حقيقيان مرتبطان بعلاقة ما ، فإذا اخذت س القيمتين ١,٥ ، ٥ و كانت قيمتا ص المناظرتان لقيمتي س هما ٤,٨ ، ١٥ فهل ص تتغير طردياً مع س ؟
الحل :

$$\frac{3}{10} = \frac{15}{50} = \frac{1,5}{5} = \frac{1س}{2ص}$$

$$\frac{8}{25} = \frac{48}{150} = \frac{4,8}{15} = \frac{1ص}{2ص}$$

$$\frac{1ص}{2ص} \neq \frac{1س}{2ص}$$

∴ العلاقة بين س ، ص ليست علاقة تغير طردي .

مثال: (٤)

مخروط دائري قائم ، ارتفاعه ثابت و حجمه ح يتغير بتغير مربع طول نصف قطر قاعدته نق . وكان حجم المخروط ٤٧٢,٥سم^٣ عندما كان طول نصف قطر قاعدته ١٥سم . جد حجم المخروط عندما يكون نصف قطر قاعدته ١٠سم .

الحل :

$$\therefore \text{ح} \propto \text{نق}^2 \quad \therefore \frac{\text{نق}_1^2}{\text{نق}_2^2} = \frac{\text{ح}_1}{\text{ح}_2}$$

$$\text{ح}_1 = 472,5 \quad , \quad \text{نق}_1 = 15$$

$$\text{ح}_2 = ? \quad , \quad \text{نق}_2 = 10$$

$$\therefore \frac{15^2}{10^2} = \frac{472,5}{\text{ح}_2}$$

$$\therefore \text{ح}_2 = 472,5 \times \frac{100}{225} = 210 \text{ سم}^3$$

بطريقة أخرى :

$$\text{ح} \propto \text{نق}^2 \Leftrightarrow \text{ح} = \text{أ} \text{نق}^2$$

$$\text{ح} = 472,5 \text{ عندما } \text{نق} = 15$$

$$\text{أ} = \frac{472,5}{15^2} = 2,1$$

$$\therefore \text{ح} = 2,1 \text{ نق}^2 \quad , \quad \text{عندما } \text{نق} = 10$$

$$\therefore \text{ح} = 2,1 \times 100 = 210 \text{ سم}^3$$

تمرين (٥ - ١)

(١) إذا كان v يتغير طردياً مع s ، و كان $v = ١٠$ عندما $s = ٥$ ، فجد

قيمة v عندما $s = ١٥$ ثم أرسم الخط البياني للعلاقة بين v ، s .

(٢) إذا كان $v = أ$ $s = ٦$ ، $v = ١٥$ عندما $s = ٦$ ، فجد قيمة $أ$ ثم قيمة s

عندما $v = ٦٠$.

(٣) $ح \propto نق^٣$ ، $ح = ٥٠$ عندما $نق = ٥$ جد العلاقة بين $ح$ ، $نق$.

(٥ - ٢) التغير العكسي

رجلان يكملان عملاً في ٣٠ يوماً ، ثلاثة رجال يكملون نفس العمل في ٢٠ يوماً ، ٤ رجال يكملون نفس العمل في ١٥ يوم ، ٦ رجال يكملون نفس العمل في ١٠ أيام ... وهكذا .

مع ملاحظة أن انتاج الرجال يتساوى في اليوم الواحد ، نلاحظ أنه كلما زاد عدد الرجال كلما قلت الأيام وكلما قل عدد الرجال كلما زادت الأيام ، أي إذا تضاعف عدد الرجال انخفض عدد الأيام إلى النصف وهنا نقول أن عدد الأيام يتناسب عكسياً مع عدد الرجال أو الأيام تتغير عكسياً تبع الرجال .

نلاحظ أيضاً { عدد الرجال $\times$ عدد الأيام = ٦٠ } في كل الحالات أي يساوي قيمة ثابتة .

فإذا فرضنا أن عدد الرجال (ص) رجلاً وعدد الأيام التي يكملون فيها العمل (س) يوماً فالعلاقة بين س ، ص هي :

$$ص = ٦٠ \quad \text{أو} \quad ص = \frac{٦٠}{س}$$

وتقرأ ص يتغير طردياً مع $\frac{١}{س}$ أو ص يتغير عكسياً مع س

وتكتب ص $\propto \frac{١}{س}$. كما نعبر عن ذلك أيضاً على الصورة ص = $\frac{أ}{س}$ و نسمي

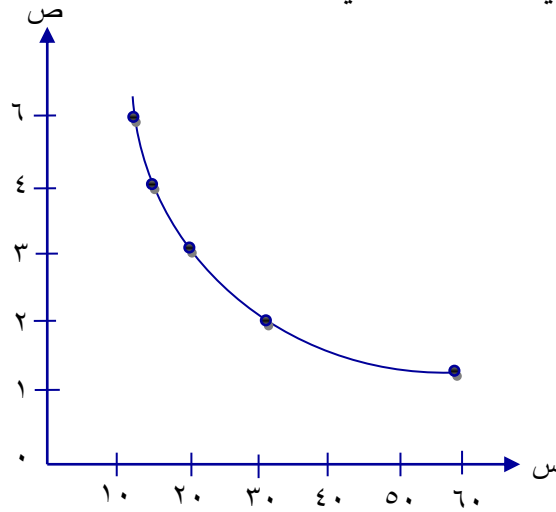
أ ثابت التغير أو ثابت التناسب .

وإذا مثلنا الكميات السابقة عدد الرجال (ص) مع عدد أيام العمل (س) فإننا نلاحظ أنَّ قيم (س) تتزايد بتناقص قيم (ص) والعكس، وهما كميتان موجبتان كما في الجدول أدناه:

عدد الأيام (س)	١٠	١٥	٢٠	٣٠	٦٠
عدد الرجال (ص)	٦	٤	٣	٢	١

فإننا نقول أنَّ ص تتغير عكسياً مع س بحيث $ص \times س = ٦٠$ أو $ص = \frac{٦٠}{س}$

و يكون التمثيل البياني لهذه المعادلة في الشكل أدناه:



تعريف :

إذا كان لدينا المتغيران s ، v ، وكان s يتغير طردياً مع $\frac{1}{v}$ ، أو كان v يتغير طردياً مع $\frac{1}{s}$ فإننا نقول في هذه الحالة إن s ، v يتغيران عكسياً .

فإذا كان $v \propto \frac{1}{s}$ و بادخال ثابت التغير

فإن : $v = \frac{A}{s}$ حيث A ثابت التغير

وإذا كانت s_1 ، s_2 قيمتان للمتغير s تناظرهما القيمتان v_1 ، v_2 للمتغير v . فإنه في حالة التغير العكسي يكون :

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

وبالضرب العكسي نجد أن : $s_1 v_1 = s_2 v_2$

مثال: (١)

س ، ص متغيران حقيقيان مرتبطان بعلاقة ما ، فإذا أخذ المتغيران س ، ص القيمتين ١٥ ، ٢١ على الترتيب وزادت قيمة س حتى أصبحت ٣٥ بينما نقصت تبعاً لذلك قيمة ص إلى ٨ ، فهل ص $\propto \frac{1}{س}$ ؟

الحل :

$$\frac{٧}{٣} = \frac{٣٥}{١٥} = \frac{٢س}{١س}$$

$$\frac{٢١}{٨} = \frac{١ص}{٢ص}$$

$$\frac{١ص}{٢ص} \neq \frac{٢س}{١س} \therefore$$

$\therefore$ ص لا تتغير عكسياً بالنسبة ل س .

مثال: (٢)

إذا كان طول مستطيل ل يتغير عكسياً بتغير عرضه ع عند ثبوت مساحة المستطيل . وكان ل = ١٢ سم عندما ع = ٨ سم فجد قيمة ل عندما ع = ٣ سم.

الحل

$$\therefore ل \propto \frac{١}{ع} \Leftrightarrow \frac{١ل}{٢ل} = \frac{٢ع}{١ع}$$

$$١٢ = ١ل ، ٨ = ١ع$$

$$٣ = ٢ع ، ؟ = ٢ل$$

$$\therefore \frac{١٢}{٢ل} = \frac{٣}{٨} \Leftarrow ٢ل = \frac{٨ \times ١٢}{٣} = ٣٢ \text{ سم}$$

حل آخر :

$$\therefore ل \propto \frac{١}{ع} \Leftarrow ل = \frac{أ}{ع}$$

$$\therefore ل = ١٢ \text{ عندما } ع = ٨$$

$$\therefore ١٢ = \frac{أ}{٨} \Leftarrow أ = ٨ \times ١٢ = ٩٦$$

$$\therefore \text{العلاقة بين ل ، ع هي } ل = \frac{٩٦}{ع}$$

$$\text{وعندما } ع = ٣$$

$$\therefore ل = \frac{٩٦}{٣} = ٣٢ \text{ سم}$$

تمرين (٥ - ٢)

- (١) إذا كان ص يتغير عكسياً مع س ، وكان س = ١٦ عندما ص = ٢٥ ، فجد قيمة ص عندما س = ٢٠ ثم أرسم الخط البياني للعلاقة بين ص ، س .
- (٢) إذا كان تربيع ص يتغير عكسياً مع (٢ س + ١) ، ص = ٢ عندما س = ١ ، فجد قيمة س عندما ص = -٣ .
- (٣) القوة ق بين قطبين تتناسب عكسياً مع مربع المسافة بينهما ن . فإذا كانت المسافة بين القطبين ٥ سم تكون القوة ١١٠ داین . فكم تكون القوة عندما تكون المسافة ١١ سم ؟
- (٤) حجم الغاز ح يتغير عكسياً مع ضغطه ض عند ثبوت درجة الحرارة . فإذا كان حجم الغاز ٤,٥ قدماً مكعباً عندما كان على ضغط ٣٠ رطلاً / قدم^٢ فجد بالقدم المكعب حجم الغاز على ضغط ٥٠ رطلاً/قدم^٢ .
- (٥) المقاومة الكهربائية لأسلاك ذات أطوال متساوية تتغير عكسياً مع تربيع قطر قاعدة مقطعها . فإذا كانت المقاومة ٠,٨ أوم عندما يكون القطر ٢,١ سم . فجد المقاومة لسلك من نفس النوع والطول إذا كان قطره ١,٤ سم .

(٥ - ٣) التغير المشترك

لاحظنا في حالتنا التغير الطردي والعكسي أن الكمية الأولى تتغير تبعاً للتغير في كمية واحدة فقط طردياً أو عكسياً . وهذا ما يعرف أحياناً بالتغير البسيط ، ولكن قد تتغير الكمية الأولى أو المتغير الأول مع أكثر من متغير ، وهذا ما يُسمى بالتغير المشترك . فمثلاً مساحة المثلث تتغير مع تغير قاعدته وارتفاعه . وبصورة عامة عندما نقول س تتغير طردياً مع ص ، ع معاً نكتبها س $\propto$ ص ع أو س = أ ص ع حيث أ ثابت (موجب) .

وعندما نقول س يتغير طردياً مع ص وعكسياً مع ع نكتبها س $\propto \frac{ص}{ع}$ أو س = أ $\frac{ص}{ع}$ حيث أ ثابت (موجب)

ملحوظة : (إذا لم يذكر نوع التغير فيفهم على أنه تغيراً طردياً)

مثال: (١)

إذا كان ص يتغير طردياً بتغير س ، ع معاً . وكان ص = ٢ عندما س = ٠,٦ ،

$$ع = \frac{١٠}{٢٧} . \text{ فجد قيمة س عندما ص} = \frac{١}{٢} ، ع = \frac{٨}{٩}$$

الحل :

ص يتغير بتغير س ، ع معاً

$$\therefore \text{ص} \propto \text{س} \text{ ع} \Leftarrow \text{ص} = \text{أ س ع}$$

$$\therefore \text{ص} = ٢ \text{ عندما س} = ٠,٦ ، ع = \frac{١٠}{٢٧}$$

$$\therefore 2 = A \times \frac{6}{10} \times \frac{10}{27} \Leftarrow A = 9$$

$\therefore$ ص = ٩ س ع

$$\therefore \frac{1}{2} = 9 \times \text{س} \times \frac{8}{9}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{1}{16}$$

مثال: (٢)

المقاومة لسلك كهربائي م تتغير طردياً مع طول السلك بالسنتيمتر ل وعكسياً مع تربيع قطر قاعدته ق بالسنتيمتر . فإذا كان سلك طوله ٥ أمتار وقطر قاعدته ٢,٥ ملم كانت مقاومته ٠,٤ اوم . فما هي مقاومة سلك من نفس النوع طوله ٩ أمتار وقطر قاعدته ٣ ملم ؟

الحل :

$$\frac{ل}{ق} = م \Leftrightarrow \frac{ل}{ق} \propto م$$

$$\therefore \text{بالتعويض } ٠,٤ = \frac{٥٠٠ \times أ}{٠,٢٥ \times ٠,٢٥}$$

$$أ = \frac{١}{٢٠٠٠٠}$$

$$\therefore م = \frac{ل}{٢٠٠٠٠ ق}$$

وعندما يكون ل = ٩ أمتار ، ق = ٣ ملم

$$م = \frac{٩٠٠}{٠,٣ \times ٠,٣ \times ٢٠٠٠٠} = ٠,٥ \text{ أوم}$$

تمرين (٥ - ٣)

(١) إذا كان ع يتغير تغيراً مشتركاً مع س ، ص ، وكان ص = ٤ عندما س = ١ ، ع = ٢ . فجد ثابت التغير .

(٢) إذا كان ص يتغير طردياً مع س ، وعكسياً مع ل تغيراً مشتركاً . وكان ص = $\frac{3}{2}$ عندما س = ٢ ، ل = ٤ . جد ثابت التغير ثم جد العلاقة بين ص ، س ، ل .

(٣) إذا كانت مقاومة موصل منتظم (م) تتغير طردياً مع طول الموصل (ل) وعكسياً مع مساحة مقطعه (س) تغيراً مشتركاً. فجد صيغة رياضية للعلاقة بين م ، ل ، س.

وإذا كانت مقاومة الموصل ٨,٦ أوم وطوله ٥٠٠ متر جد مساحة مقطعه إذا كان ثابت التغير $1,72 \times 10^{-8}$ أوم.متر

(٤) ص يتغير تبع س ، ع^٢ معاً. إذا كان ص = ٦ عندما تكون س = ٩ ، ع = ٣ ، فجد

(أ) قيمة ص عندما س = ٨ ، ع = ٢
(ب) قيمة س عندما ص = ٩ ، ع = $\frac{1}{4}$

(٥) يقول قانون بويل أن حجم الغاز ح يتغير تبعاً لدرجة حرارته المطلقة م وعكسياً تبعاً لضغطه ض . إذا كان حجم غاز ٤٥٠ سم^٣ على ضغط ٨٢٥ ملم زئبق ودرجة حرارة ١٥° مئوية . فكم يكون حجمه على ضغط ٧٥٠ ملم زئبقاً ودرجة حرارة ٤٧° مئوية علماً بأن درجة الحرارة المطلقة = درجة الحرارة المئوية + ٢٧٣ .

(٥ - ٤) التغير الجزئي

في الحالات الثلاث السابقة كانت العبارة المتغيرة تتكون من حد واحد .
ولكن أحياناً قد تتركب العبارة من حدين أو أكثر . فمثلاً $ص = أ س + ب ع^٢$ حيث
 $أ$ ، $ب$ عدنان ثابتان موجبان ، يمكن أن نقول أن $ص$ يتركب من كميتين، أحدهما
تتغير تبعاً لتغير $س$ و الأخرى تتغير تبعاً لتغير تربيع $ع$ ، ونعبر عن ذلك كالآتي :

$ص$ يتغير جزئياً مع $س$ وجزئياً مع تربيع $ع$.

وأيضاً إذا كان $ص = أ + \frac{ب}{ع}$ حيث $أ$ ، $ب$ عدنان ثابتان . نقول أن $ص$

جزئياً ثابت وجزئياً يتغير عكسياً مع $ع$.

مثال (١): إذا كان $ص$ يتغير جزئياً مع $س$ وجزئياً مع تربيع $س$.

وكان $ص = ١٤$ عندما $س = ٢$

و $ص = ٤٤$ عندما $س = ٤$

فجد $ص$ بدلالة $س$ ، وقيمة $ص$ عندما $س = ٣$

الحل :

$ص = أ س + ب س^٢$ ، حيث أن $أ$ ، $ب$ عدنان ثابتان

$$١٤ = أ ٢ + ب ٤ \quad (١)$$

$$٤٤ = أ ٤ + ب ١٦ \quad (٢)$$

بحل المعادلتين (١) ، (٢) آنياً ، نجد أن :

$$أ = ٣ ، ب = ٢$$

∴ ص بدلالة س هي $ص = ٣س + ٢س^٢$

وعندما $س = ٣$

$$ص = ٣ \times ٣ + ٩ \times ٢ = ٢٧$$

مثال: (٢)

إذا كان م جزئياً ثابت ، وجزئياً يتغير عكسياً تبع ن .

وإذا كان م $= ١٧$ يكون ن $= ٤$ وإذا كان م $= ١٦$ يكون ن $= ٥$
فجد م عندما يكون ن $= ٦$

الحل :

$$م = أ + \frac{ب}{ن} \quad (أ ، ب عدنان ثابتان)$$

$$١٧ = أ + \frac{ب}{٤} \Leftarrow ٦٨ = ٤أ + ب \quad (١)$$

$$١٦ = أ + \frac{ب}{٥} \Leftarrow ٨٠ = ٥أ + ب \quad (٢)$$

∴ بالطرح $أ = ١٢$

بالتعويض في (١) : $٦٨ = ٤٨ + ب$

$$٢٠ = ب$$

$$\therefore م = \frac{٢٠}{٦} + ١٢ \Leftarrow \therefore م = \frac{١}{٣} + ١٢ = ١٥$$

تمرين (٥ - ٤)

(١) ص جزئياً ثابت ، وجزئياً يتغير مع س .

إذا كان س = ٥ ، يكون ص = ٢٦ .

إذا كان س = ٣ ، يكون ص = ١٨ . فجد :

(أ) ص بدلالة س

(ب) ص إذا كان س = ٦

(٢) ص جزئياً ثابت وجزئياً يتغير مع س وجزئياً مع تربيع س . عندما يكون

ص = ٦ ، ١١ ، ١٨ يكون س يساوى على الترتيب ١ ، ٢ ، ٣ . ما العلاقة

بين س ، ص ؟ وما قيمة ص عندما يكون س = ٤ ؟

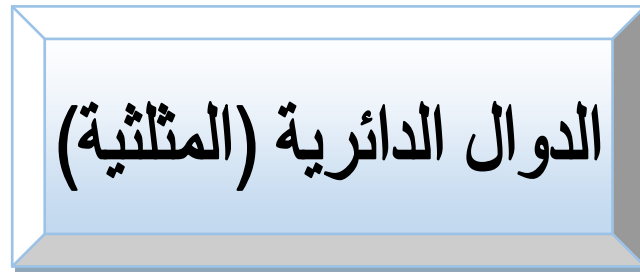
(٣) الزمن الذى يستغرقه حفر بئر يتغير جزئياً مع عمق البئر وجزئياً مع تربيع

العمق. إذا كان العمق ٢٠ قدماً يستغرق الحفر ٨٠ ساعة . وإذا كان العمق ٣٠

قدماً يستغرق الحفر ١٥٠ ساعة . ففى كم ساعة يتم حفرها إذا كان العمق ٤٠

قدماً ؟

الوحدة السادسة



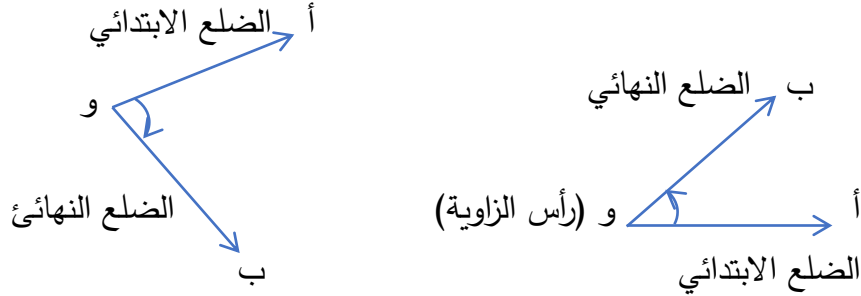
أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن:-

- ١- يتعرّف الزاوية المُوَجَّهة.
- ٢- يتعرّف الوضع القياسي للزاوية المُوَجَّهة.
- ٣- يتعرّف قياس الزاوية ويرسمها.
- ٤- يتعرّف وحدة قياس الزوايا بالتقدير الستيني.
- ٥- يتعرّف الزاوية نصف القطرية (وحدة قياس الزاوية بالتقدير الدائري).
- ٦- يتعرّف النقطة المثلثية والدوال المثلثية الجيب وجيب التمام.
- ٧- يتعرّف دالة الظل.
- ٨- يجد النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- ٩- يتعرّف زاوية الإسناد.
- ١٠- يتعرّف دوال القاطع وقاطع التمام وظل التمام.
- ١١- يتعرّف العلاقة الأساسية بين الدوال المثلثية .

(٦ - ١) الزاوية الموجهة

الزاوية الموجهة هي الزاوية التي تتكون من ساقين أو نصفي مستقيمين أو شعاعين و أ ، و ب يمتدان من نقطة مشتركة (و) تسمى رأس الزاوية . تكتب في صورة زوج مرتب (و أ ، و ب) من أنصاف المستقيمات (شعاعين) أو يرمز لها بالرمز $\angle$ أ و ب . ويُسمى نصف المستقيم (الشعاع) و أ الضلع الابتدائي للزاوية . ويُسمى نصف المستقيم (الشعاع) و ب الضلع النهائي .



الشكل (٦ - ٢)

الشكل (٦ - ١)

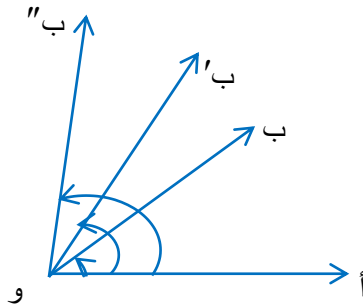
وتتكوّن الزاوية بدوران ضلعها النهائي حول رأسها بينما يظل ضلعها الابتدائي ثابتاً.

فإذا دار الضلع النهائي حول (و) في اتجاه مضاد لحركة عقارب الساعة فإن قياس الزاوية الناتجة يكون موجباً . أما إذا دار في اتجاه حركة عقارب الساعة فإن قياس الزاوية الناتجة سالباً . ففي الشكل (٦ - ١) الضلع النهائي و ب دار حول (و) في اتجاه مضاد لحركة عقارب الساعة لذا يكون قياس $\angle$ أ و ب موجباً . وفي الشكل (٦ - ٢) دار الضلع النهائي و ب في اتجاه عقارب الساعة لذا يكون قياس $\angle$ أ و ب سالباً .

وعلى ذلك فإنه لتعيين الزاوية الموجهة يلزم معرفة قياسها واتجاه دوران الضلع النهائي ، ويعتمد قياسها على مقدار دوران الضلع النهائي واتجاه دورانه ففي

الشكل (٣ - ٦) التالي:

$$\angle \text{أوب} > \angle \text{أوب}' > \angle \text{أوب}''$$



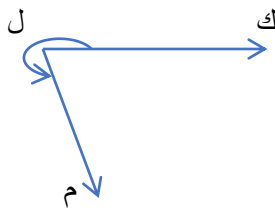
الشكل (٣ - ٦)

مثال :

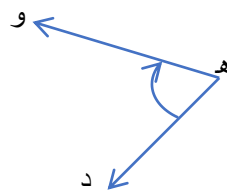
في كل من الأشكال التالية اكتب :

أ. اسم الزاوية وهل هي سالبة أم موجبة ؟

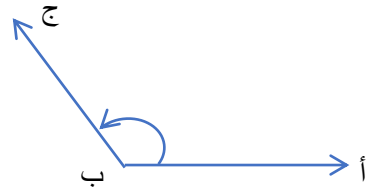
ب. ضلعها الابتدائي وضلعها النهائي .



الشكل (٧ - ٦)



الشكل (٦ - ٦)



الشكل (٥ - ٦)

الحل :

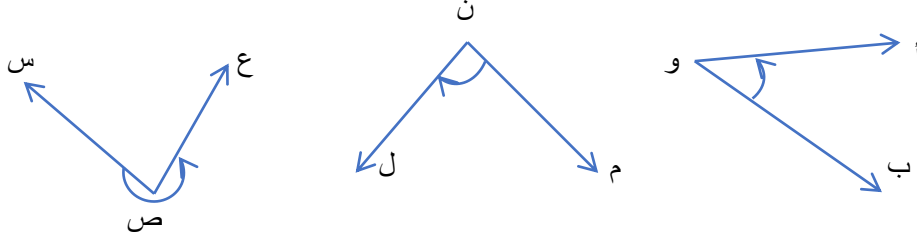
فى الشكل (٥ - ٦) الزاوية هي $\angle \overrightarrow{أ ب ج} \overrightarrow{أ ب ج}$ أو $\angle \overrightarrow{أ ب ج} \overrightarrow{أ ب ج}$ وهي موجبة
فإن الضلع الابتدائي $\overrightarrow{أ ب ج}$
و الضلع النهائي $\overrightarrow{أ ب ج}$

الشكل (٦ - ٦) : الزاوية هي $\angle \overrightarrow{د ه و} \overrightarrow{د ه و}$ أو $\angle \overrightarrow{د ه و} \overrightarrow{د ه و}$ وهي سالبة فإن
الضلع الابتدائي $\overrightarrow{د ه و}$
و الضلع النهائي $\overrightarrow{د ه و}$

الشكل (٧ - ٦) الزاوية $\angle \overrightarrow{ك ل م} \overrightarrow{ك ل م}$ أو $\angle \overrightarrow{ك ل م} \overrightarrow{ك ل م}$ وهي موجبة فإن
الضلع الابتدائي $\overrightarrow{ك ل م}$
و الضلع النهائي $\overrightarrow{ك ل م}$

تمرين (٦ - ١)

(١) في كل من الأشكال التالية سمّ الزاوية و اكتب الضلع الابتدائي والضلع النهائي لها :



الشكل (٦ - ١٠)

الشكل (٦ - ٩)

الشكل (٦ - ٨)

(٢) أرسم الزوايا التالية :

- الزاوية الحادة (أ م ، أ ن)
- الزاوية المنفرجة (ك ل ، ك م)
- الزاوية المنعكسة (ه س ، ه ص)

(٣) اكتب الزوايا الموجهة التالية بطريقة أخرى

- (م و ، م ه)
- (أ ب ، أ ج)
- (د و ، د س)

(٤) اكتب الزوايا الموجهة التالية في صورة أزواج مرتبة :

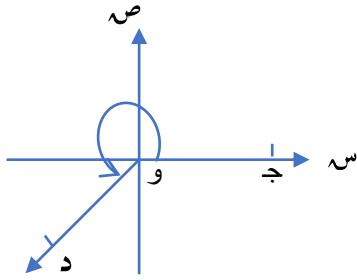
- (أ) $\angle$ أ ب ج ، $\angle$ س ع ص (ب) $\angle$ س ع ص ، $\angle$ ه و د (ج) $\angle$ ه و د

(٥) ما هو الفرق بين (أ) $\angle$ أ ب ج ، $\angle$ ج أ ب

- (ب) (س ع ، س ص) ، (س ص ، س ع)

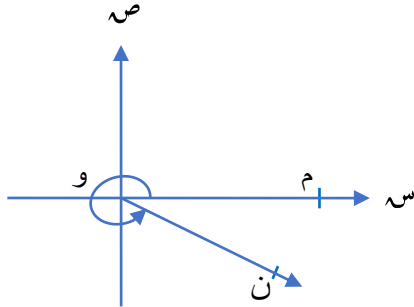
(٦ - ٢) الوضع القياسي للزاوية الموجهة

يقال ان الزاوية الموجهة في وضعها القياسي - إذا وقع رأس الزاوية على نقطة الأصل وانطبق ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب للمحور السيني. والأشكال التالية توضح زوايا في وضعها القياسي :



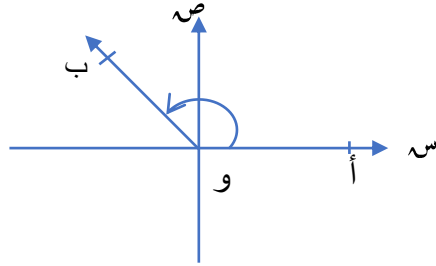
الشكل (٦-١٢)

➤ ج و د في وضعها القياسي
وتقع في الربع الثالث



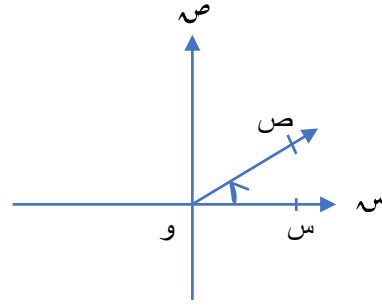
الشكل (٦ - ١٤)

➤ م و ن في وضعها القياسي
وتقع في الربع الرابع



الشكل (٦ - ١١)

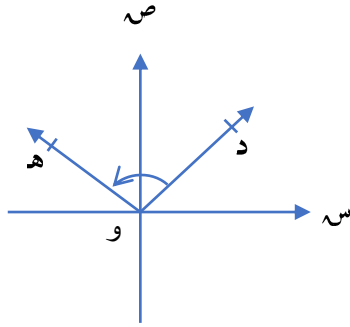
➤ أ و ب في وضعها القياسي
وتقع في الربع الثاني



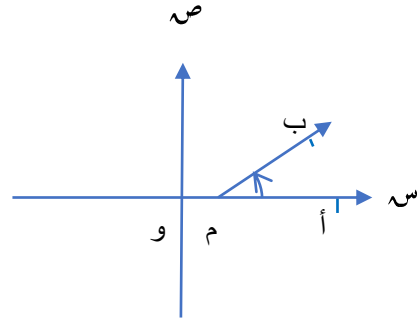
الشكل (٦ - ١٣)

➤ س و ص في وضعها القياسي
وتقع في الربع الأول

أمّا الزوايا فى الأشكال التالية فليست فى وضعها القياسى



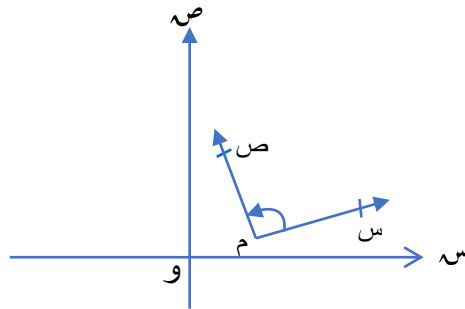
الشكل (٦ - ١٦)



الشكل (٦ - ١٥)

➤ د و هـ ليست فى وضعها القياسى لأن ضلعها الابتدائى لم ينطبق على الجزء الموجب للمحور السينى

➤ أ م ب ليست فى وضعها القياسى لأن رأسها لم ينطبق على نقطة الأصل

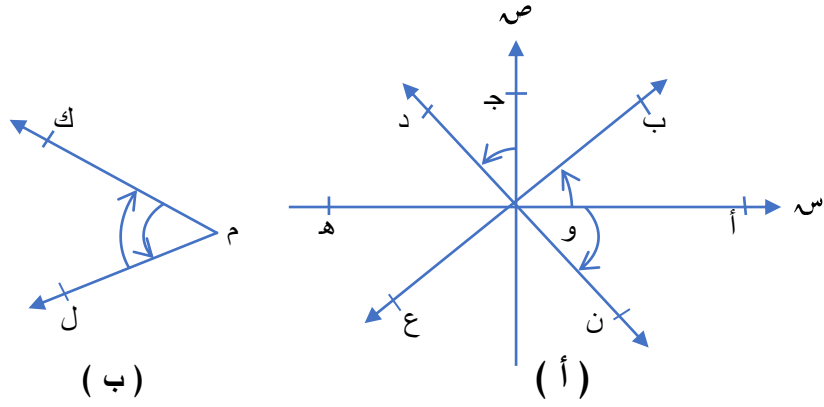


الشكل (٦ - ١٧)

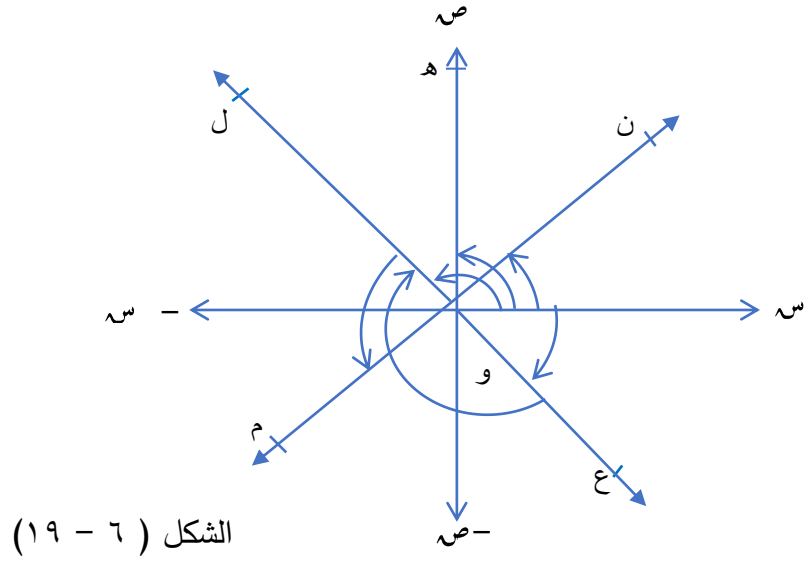
➤ س م ص ليست فى وضعها القياسى لأن رأسها لم ينطبق على نقطة الأصل وضلعها الابتدائى لم ينطبق على الجزء الموجب للمحور السينى.

تمرين (٦ - ٢)

١. اكتب كلاً من الزوايا المُوَجَّهة في الأشكال التالية بصورة أزواج مرتبة ، ثم اذكر أي الزوايا السالبة في وضع قياسي ، وبين السبب في كل حالة :



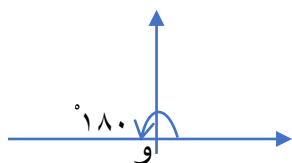
الشكل (٦ - ١٨)



الشكل (٦ - ١٩)

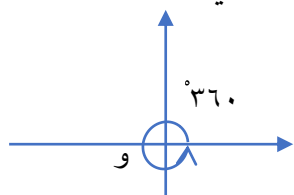
(٦-٣) قياس الزوايا

قد نستخدم أكثر من نوع من وحدات القياس لمعرفة مقادير الأشياء المختلفة .
فقد نستخدم الكيلوجرام والطن والرطل لمعرفة أوزان الأشياء أو كتلتها. وكذلك
نستخدم السنتيمتر والمتر أو الياردة والقدم لمعرفة - أطوال الأشياء وكذلك نتعامل
مع قياسات معينة في قياس الزوايا . ومن ذلك القياس الستيني : و وحدته الدرجة
وقد مر بنا سابقاً عند استخدام المنقلة لقياس الزوايا ونجد ان قياس الزاوية الموجهة
التي تتكون بدوران الضلع النهائي دورة كاملة تساوي ٣٦٠ درجة وتكتب ٣٦٠° ،
ونصف واحد من هذه الزاوية ١٨٠° وربع واحد منها يساوي ٩٠° وتسمى بالزاوية
القائمة كما في الأشكال التالية :



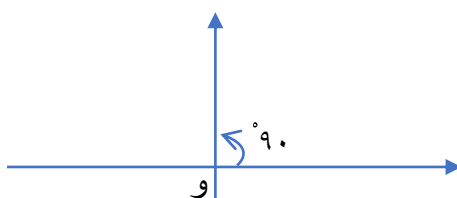
زاوية ١٨٠°

(ب)



دورة كاملة

(أ)



زاوية قائمة

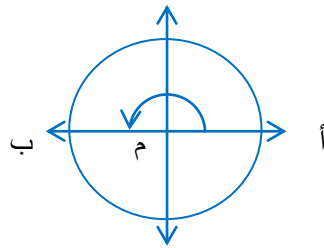
(ج)

الشكل (٦ - ٢٠)

إذن يمكن أن تعرف الدرجة في القياس الستيني بأنها هي القياس لزاوية مركزية في
دائرة تقابل قوساً طوله $\frac{1}{360}$ من محيط الدائرة.

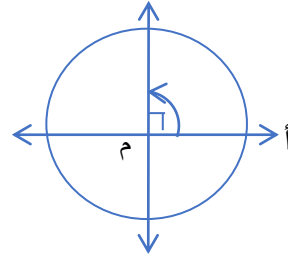
وللدرجة أجزاء منها الدقيقة = $\frac{1}{60}$ من الدرجة والثانية = $\frac{1}{3600}$ من الدقيقة
 ويلاحظ أن كل جزء يساوي $\frac{1}{60}$ من سابقه لذا سمي بالتقدير الستيني
 وتقاس الزوايا بالمنقلة التي درجت على الأساس السابق في تقسيم الدائرة إلى

٣٦٠ جزءاً .



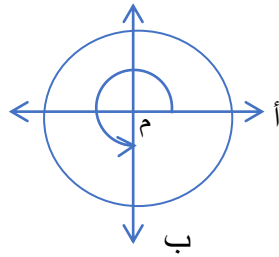
(أ)

قياس $\angle \text{أ م ب} = 180^\circ$
 $\frac{1}{2}$ دائرة



(ب)

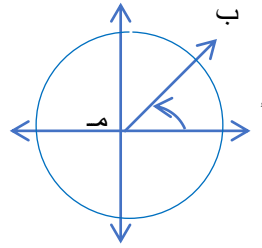
قياس $\angle \text{أ م ب} = 90^\circ$
 $\frac{1}{4}$ دائرة



ب

قياس $\angle \text{أ م ب} = 270^\circ$

(د) $\frac{3}{4}$ دائرة (زاوية منعكسة)



قياس $\angle \text{أ م ب} = 45^\circ$

$\frac{1}{8}$ دائرة

(ج)

الشكل (٦ - ٢١)

مثال: (١)

أرسم الزوايا الآتية :

(١) $\angle \text{أ ب ج} = ٤٢^\circ$

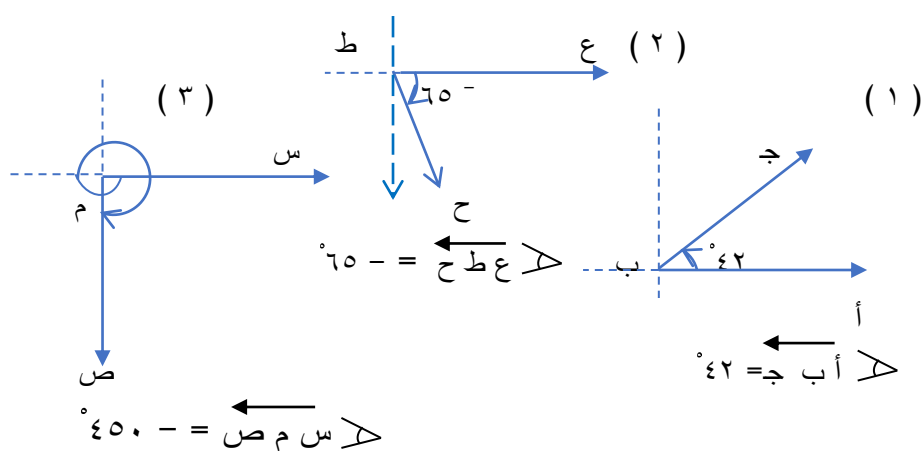
(٢) $\angle \text{ع ط ح} = ٦٥^\circ$

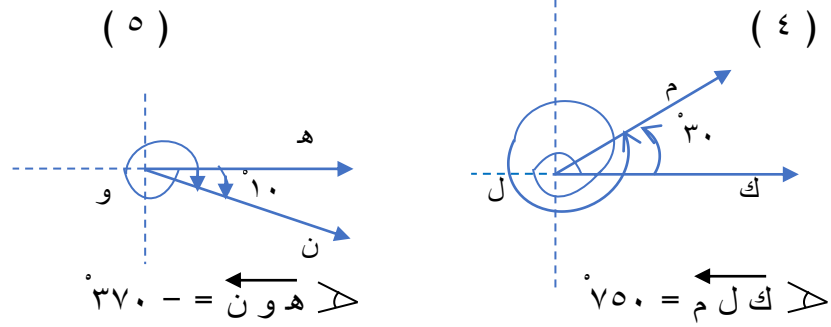
(٣) $\angle \text{س م ص} = ٤٥^\circ$

(٤) $\angle \text{ك ل م} = ٧٥^\circ$

(٥) $\angle \text{هـ و ن} = ٣٧^\circ$

الحل :



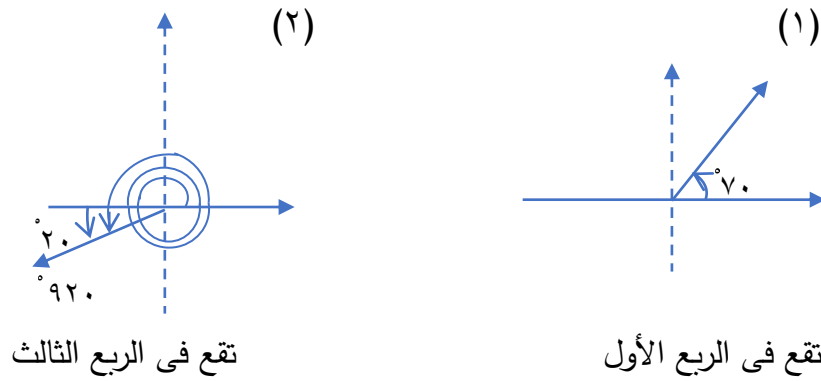


مثال: (٢)

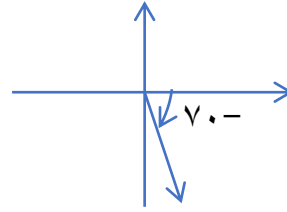
ضع كلاً من الزوايا الآتية في وضعها القياسي وارسمها ثم حدد الربع الذي تقع فيه.

- (١) ٧٠° (٢) ٩٢٠° (٣) ٧٠° (٤) ٥٨٥°

الحل :

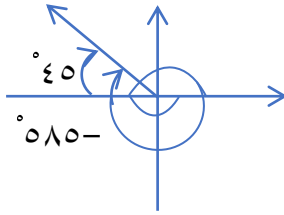


(٣)



تقع فى الربع الرابع

(٤)



تقع فى الربع الثاني

تمرين (٦ - ٣)

(١) ارسم الزوايا الآتية :

أ- 90° ، 225° ، 175° ، 1005°

ب- 90° ، 195° ، 320° ، 900°

(٢) ضع كلاً من الزوايا الآتية فى وضعها القياسى وارسمها ثم حدد الربع الذى

تقع فيه

أ- 340° ، 420° ، 560° ، 680°

ب- 172° ، 900° ، 350°

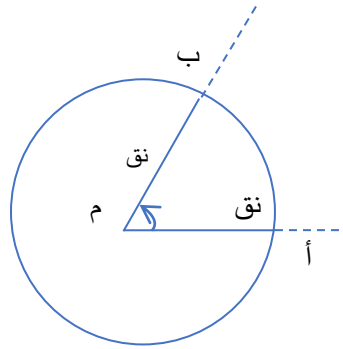
(٦ - ٤) التقدير الدائري

وحدة قياس الزوايا بالتقدير الدائري هي الراديان أو الزاوية نصف القطرية.

تعريف:

الزاوية نصف قطرية (أو راديان واحد) هي قياس لزاوية مركزية في دائرة تقابل قوساً طوله يساوي نصف قطر تلك الدائرة .

انظر الشكل (٦ - ٢٢)



الشكل (٦ - ٢٢)

ونتخذ هذه الزاوية وحدة لقياس الزوايا ويرمز لها بالرمز (د)
لهذا السبب فالراديان هو مقياس النسبة بين طول القوس إلى نصف القطر وغير معتمد على مقدار نصف القطر . وحيث أن المحيط (مح) لدائرة نصف قطرها نق هو 2π نق . يتبع ذلك ان :
 $\text{مح} = 2\pi \text{ نق}$

$$\therefore \frac{\text{مح}}{\text{نق}} = \pi \text{ ٢}$$

لكن $\frac{\text{مح}}{\text{نق}}$ يحوي الزاوية التي مقدارها ٣٦٠°

عليه فالزاوية التي مقدارها ٣٦٠° تحوي $\pi \text{ ٢}$ راديان يمكن كتابة ذلك بالمعادلة:

$$\pi \text{ ٢ راديان} = ٣٦٠^\circ$$

$$\text{أو } \pi \text{ راديان} = ١٨٠^\circ$$

$$\text{ويكون } ١ = \frac{\pi \text{ ٢}}{٣٦٠} = \frac{\pi}{١٨٠} \text{ راديان}$$

$$١ \text{ راديان} = \frac{١٨٠}{\pi} \text{ درجة}$$

وبذلك يكون :

$$٢ \text{ زاوية نصف قطرية أو } ٢ \text{ راديان} = \frac{١٨٠}{\pi} \times ٢ = \frac{٣٦٠}{\pi} \text{ درجة}$$

$$٥ \text{ زاوية نصف قطرية} = ٥ \times \frac{١٨٠}{\pi} = \frac{٩٠٠}{\pi} \text{ درجة}$$

$$\therefore \text{س زاوية نصف قطرية} = \text{س} \times \frac{١٨٠}{\pi} = \frac{١٨٠ \text{ س}}{\pi} \text{ درجة}$$

وأيضاً :

$$\frac{\pi^\circ}{36} = \frac{\pi}{180} \times 25 = 25^\circ \quad \text{زاوية نصف قطرية (راديان)}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{180} \times 30 = 30^\circ \quad \text{زاوية نصف قطرية (راديان)}$$

$$\therefore \left[\frac{h\pi}{180} \right] = \frac{\pi \times h}{180} = h^\circ$$

جدول درجات وراديان لبعض الزوايا كثيرة الاستعمال قياسها بالتقدير الستيني والمقابل لها بالتقدير الدائري:

زوايا بالتقدير الستيني	زوايا بالتقدير الدائري
°	0
30	$\pi/6$
45	$\pi/4$
60	$\pi/3$
90	$\pi/2$
120	$2\pi/3$
135	$3\pi/4$
150	$5\pi/6$
180	π

جدول (٦ - ١)

مثال: (١)

جد قياس كل من الزوايا الآتية بالتقدير الدائري

أ. 60° ب. 225°

الحل :

$$(أ) \quad 1 \text{ درجة} = \frac{\pi}{180} \text{ راديان}$$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{3} \text{ راديان} = 60^\circ \times \frac{\pi}{180}$$

$$(ب) \quad 225^\circ = \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{180} \text{ راديان}$$

مثال: (٢)

جد قياس كل من الزوايا الآتية بالتقدير الستيني

$$\frac{\pi}{6} \text{ راديان} , \quad \frac{\pi^3}{4} \text{ راديان} , \quad 2,6 \text{ راديان}$$

الحل :

$$1 \text{ راديان} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{6} \text{ راديان} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\frac{\pi^3}{4} \text{ راديان} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{\pi^3}{4} = 135^\circ$$

$$2,6 \text{ راديان} = \frac{180^\circ}{\pi} \times 2,6 = \frac{468}{\pi} \text{ درجة}$$

تمرين (٦ - ٤)

(١) جد قياس كل من الزوايا الآتية بالتقدير الدائري

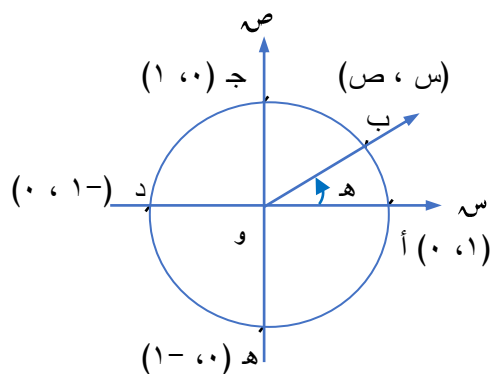
أ/ 35° ب/ -30° ج/ 500° د/ -225°
هـ/ 72° و/ -25° ز/ 2000°

(٢) جد قياس كل من الزوايا الآتية بالتقدير الستيني

أ/ 1 ب/ π^2 ج/ π د/ $\pi/9$
هـ/ $\pi^3 -$ و/ $\pi 10 -$ ز/ 3

(٦ - ٥) النقطة المثلثية والدوال المثلثية

ستعالج كثيرا من مفاهيم الدوال المثلثية من دائرة الوحدة و دائرة الوحدة هي دائرة مركزها عند نقطة الأصل عند تقاطع محوري الإحداثيات ونصف قطرها الوحدة . فإذا كانت لدينا زاوية مُوجَّهة في وضعها القياسي ، فإن نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة تسمى **النقطة المثلثية** لتلك الزاوية:



الشكل (٦ - ٢٣)

ففي الشكل (٦ - ٢٣) تكون ب هي النقطة المثلثية للزاوية أ و ب وتكون ج هي النقطة المثلثية للزاوية أ و ج . نلاحظ أن أ هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها صفر ، وأيضا للزاوية التي قياسها 2π أو 360° إذا دار الضلع النهائي دورة كاملة وكذلك يمكن أن تكون نقطة مثلثية للزاوية 4π أو 720° وأيضا للزاوية 6π ، ...

أي أن النقطة المثلثية للزاوية صفر هي نفسها النقطة المثلثية لكل الزوايا صفر $+2\pi$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

وكذلك النقطة المثلثية للزاوية s هي نفسها النقطة المثلثية للزاوية $s + 2\pi$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ أما إذا حصرنا قيم الزوايا فقط في المدى من الصفر إلى أقل من 2π أو أقل من 360° فعندئذ نجد أن كل زاوية مُوجَّهة رُسمت في وضعها القياسي تقابلها نقطة مثلثية واحدة على دائرة الوحدة وكذلك كل نقطة مثلثية على دائرة الوحدة تعين زاوية مُوجَّهة واحدة في الوضع القياسي في هذا المدى . أي أن هناك تقابل بين نقاط دائرة الوحدة والزوايا المُوجَّهة في وضعها القياسي داخل هذا المدى . وبالمثل يقابل كل نقطة على دائرة الوحدة زوج من الأعداد (s ، v) هما إحدائيات هذه النقطة أي أن لدينا السلسلة التالية من التقابلات ، زاوية مُوجَّهة ذات وضع قياسي مقاسها بالتقدير الدائري أو الستيني تقابل نقطة مثلثية إحدائياتها (s ، v) .

ففي الشكل (٦ - ٢٣) السابق :

النقطة أ تقابل الزاوية صفر تقابل النقطة المثلثية التي إحدائياتها (٠ ، ١) فإذا رمزنا لهذا التقابل بالرمز t نجد أن $t = (٠) = (١ ، ٠)$ والنقطة ج تقابل الزاوية 90° أو $\pi/2$ تقابل نقطة إحدائياتها (١ ، ٠) أي أن $t = (\pi/2) = (١،٠)$ إن هذا يوضح لنا أن كل زاوية مُوجَّهة في وضعها القياسي يقابلها إحداثي سيني يساوي واحد وهذا التقابل يعطينا دالة . وكذلك كل زاوية مُوجَّهة في وضعها القياسي يقابلها إحداثي صادي يساوي واحد وهذا التقابل يعطينا دالة أخرى وهذا يقودنا للتعريف التالي :

تعريف:

لكل قياس زاوية مُوجَّهة h في وضعها القياسي يوجد دالتان تسميان دالة الجيب ودالة جيب التمام تعرفان كما يلي :

(١) جيب h ويرمز له بالرمز $جا\ h$ هو الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية التي قياسها h مع دائرة الوحدة أي أن $جا\ h = ص$

(٢) جيب تمام الزاوية h ، ويرمز له جتا h هو الإحداثي السيني لنقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية التي قياسها h مع دائرة الوحدة أي أن جتا $h = س$

(٣) في كل من الدالتين $جا$ ، جتا يكون المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية h حيث $صفر \leq h < ٣٦٠^\circ$

(٤) بما أن كل من الإحداثيين السيني والصادي في دائرة الوحدة من -١ إلى $+١$ فإن المدى لكل من دالتي الجيب وجيب التمام ينحصر في هذه القيم أي :

$$-١ \leq جا\ h \leq ١$$

$$-١ \leq جتا\ h \leq ١$$

مثال: (١)

إذا كان $t = (h) = (٠, ١)$ للزاوية h في وضعها القياسي

جد: $جا\ h$ ، جتا h

الحل :

$$t = (h) = (٠, ١)$$

$$\therefore جا\ h = ٠$$

$$جتا\ h = ١$$

مثال: (٢)

تأمل دائرة الوحدة في الشكل (٦-٢٤)

و جد :

ت ($\pi^-/٢$) ، ت (π)

ت ($\pi^٢/٢$) ، ت ($\pi^٣/٢$)

ثم جد جا هـ ، جتا هـ لكل منها :

الحل:

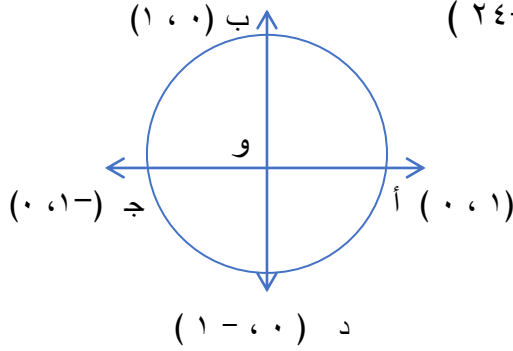
ت ($\pi^-/٢$) = ($١- ، ٠$)

∴ جا ($\pi^-/٢$) = $١- ،$ جتا ($\pi^-/٢$) = ٠

ت (π) = ($٠ ، ١-$) ، ∴ جا π = $٠ ،$ جتا π = $١-$

ت ($\pi^٢$) = ($٠ ، ١$) ، ∴ جا $\pi^٢$ = $٠ ،$ جتا $\pi^٢$ = ١

ت ($\frac{\pi^٣}{٢}$) = ($١- ، ٠$) ، ∴ جا ($\frac{\pi^٣}{٢}$) = $١- ،$ جتا ($\frac{\pi^٣}{٢}$) = ٠



الشكل (٦-٢٤)

تمرين (٦ - ٥)

(١) إذا كان ت (هـ) معطى بالعلاقات التالية في كل حالة :

$$(أ) \text{ ت (هـ) } = (٠,٥, \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad (ب) \text{ ت (هـ) } = (٠,٠, ١)$$

$$(ج) \text{ ت (هـ) } = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

جد في كل حالة جا هـ ، جتا هـ :

(٢) من دائرة الوحدة اوجد قيم ت (هـ) المعطاه ثم اوجد جا هـ ، جتا هـ في كل

حالة :

$$(أ) \text{ ت (هـ) } = (\pi -) \quad (ب) \text{ ت (هـ) } = (\pi ٦)$$

$$(ج) \text{ ت (هـ) } = \left[\frac{\pi ٧}{2} \right] \quad (د) \text{ ت (هـ) } = \left[\frac{\pi ٥-}{2} \right]$$

(٦ - ٦) دالة الظل

رأينا إذا كانت ه قياس زاوية مُوجَّهة ، فإنَّه يوجد (أ) دالة الجيب (ب) دالة جيب التمام .

وحيث أن كلاً من جا ه ، جتا ه عبارة عن أعداد حقيقية فإنَّه من الممكن أن نعرِّف دالة أخرى جديدة سوف نطلق عليها دالة الظل ونرمز لها بالرمز ظا

$$\text{بحيث أن : } \text{ظا ه} = \frac{\text{جا ه}}{\text{جتا ه}}$$

بشرط أن ه $\neq 90^\circ$ ، ه $\neq 270^\circ$ وحيث أن ظا ه هي قيمة دالة الظل المرتبطة بقياس الزاوية المُوجَّهة ه يمكن أن نعتبر التعريف التالي:

تعريف :

نُسمِّي حاصل قسمة جا ه على جتا ه ظل الزاوية ه ونرمز له بالرمز ظا ه أي:

$$\text{ظا ه} = \frac{\text{جا ه}}{\text{جتا ه}} , \text{ حيث جتا ه} \neq 0$$

واستناداً إلى هذا التعريف نجد أن :

$$\text{ظا } 0 = \frac{0}{1} = 0 , \text{ ظا } \pi = \frac{\pi \text{ جا}}{\pi \text{ جتا}} = \frac{0}{0} = \frac{0}{1-0}$$

$$\text{أما ظا } 90 = \frac{\text{جا } 90}{\text{جتا } 90} = \frac{1}{0} = \infty \text{ حيث الرمز } \infty : \text{تقرأ ما لا نهاية}$$

(أي عدد لا نهائي)

مثال :

$$\left(\frac{\sqrt[3]{1}}{2}, \frac{1}{2} \right) = (\text{هـ})$$

جد: (أ) جـ هـ (ب) جـ هـ (ج) ظـ هـ (د) جـ هـ + جـ هـ

الحل :

$$\left(\frac{\sqrt[3]{1}}{2} \right) = \text{جـ هـ} \quad (\text{أ})$$

$$\frac{1}{2} = \text{جـ هـ} \quad (\text{ب})$$

$$\sqrt[3]{1} = \frac{2}{1} \times \frac{\sqrt[3]{1}}{2} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{جـ هـ}} = \text{ظـ هـ} \quad (\text{ج})$$

$$^2\left(\frac{1}{2}\right) + ^2\left(\frac{\sqrt[3]{1}}{2}\right) = \text{جـ هـ} + \text{جـ هـ} \quad (\text{د})$$

$$1 = \frac{4}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} =$$

تمرين (٦ - ٦)

(١) إذا كانت $(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}) = (هـ)$ جد :

(أ) $جَاه$ (ب) $جَتَاه$

(ج) $ظَاه$ (د) $جَاه + جَتَاه$

(٢) إذا كانت $(-١, ٠) = (س)$ جد :

(أ) $ظَاس$ (ب) $جَاس + جَتَاس$

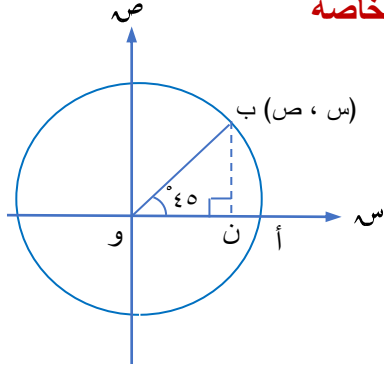
(٣) إذا كانت $(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}) = (د)$ جد :

$ظَاد$ ، $جَاد + جَتَاد$

(٤) إذا كانت $(٠, ١) = (هـ)$ جد :

$جَاه$ ، $ظَاه$

(٦ - ٧) الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة



(أ) الزاوية أ و ب $\overleftarrow{45^\circ}$ أو $(\pi/4)$ د

إذا كانت ه = $45^\circ = \pi/4$ راديان

فان المثلث ن ب و متساوي

الساقين انظر الشكل (٦ - ٢٥)

فيه $\overline{ب ن} = \overline{ن و}$ أي أن :

(س = ص)

الشكل (٦ - ٢٥)

ومن نظرية فيثاغورث $س^2 + ص^2 = نق^2 = 1$

أي $س^2 + س^2 = 1$ (معادلة دائرة الوحدة)

$$س^2 = 1/2$$

$$س = 1/\sqrt{2}$$

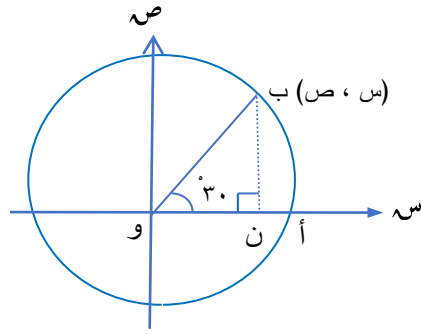
لأن س موجبة في الربع الأول

ومما سبق تعرّفنا أن : $س = جتا ه$ ، $ص = جا ه$

$$نجد أن : جتا ٤٥ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$جا ٤٥ = \frac{1}{\sqrt{2}} ، ظا ٤٥ = \frac{جا ٤٥}{جتا ٤٥} = 1$$

أي أن إحداثيات النقطة المثلثية للزاوية ٤٥° هي $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$



الشكل (٦ - ٢٦)

(ب) الزاوية $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ راديان

إذا كانت $h = 30^\circ$

وتذكرنا أن طول الضلع

المقابل للزاوية 30° في المثلث

القائم يساوي نصف طول الوتر

نجد أن $\sin = \frac{1}{2}$

وبالتعويض في المعادلة $\sin^2 + \cos^2 = 1$

نجد أن $\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وعليه يكون إحداثيات النقطة المثلثية للزاوية 30° هي $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

ومنه نستنتج أن :

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \text{ظا } 30^\circ = \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2}$$

(ج) الزاوية $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ راديان :

وبصورة مماثلة وبالنظر الى دائرة الوحدة في الشكل (٦ - ٢٧)

نجد أن $\overline{ON} = \frac{1}{2}$ الوتر

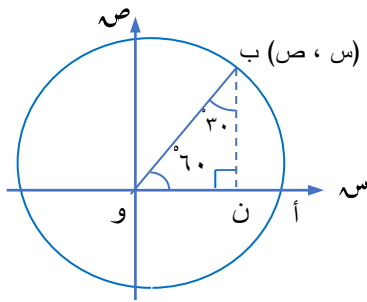
أي أن $\sin = \frac{1}{2}$

$$\therefore \sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$\therefore \cos^2 = 1 - \sin^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

∴ إحداثيات النقطة المثلثية للزاوية 60° هي $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$



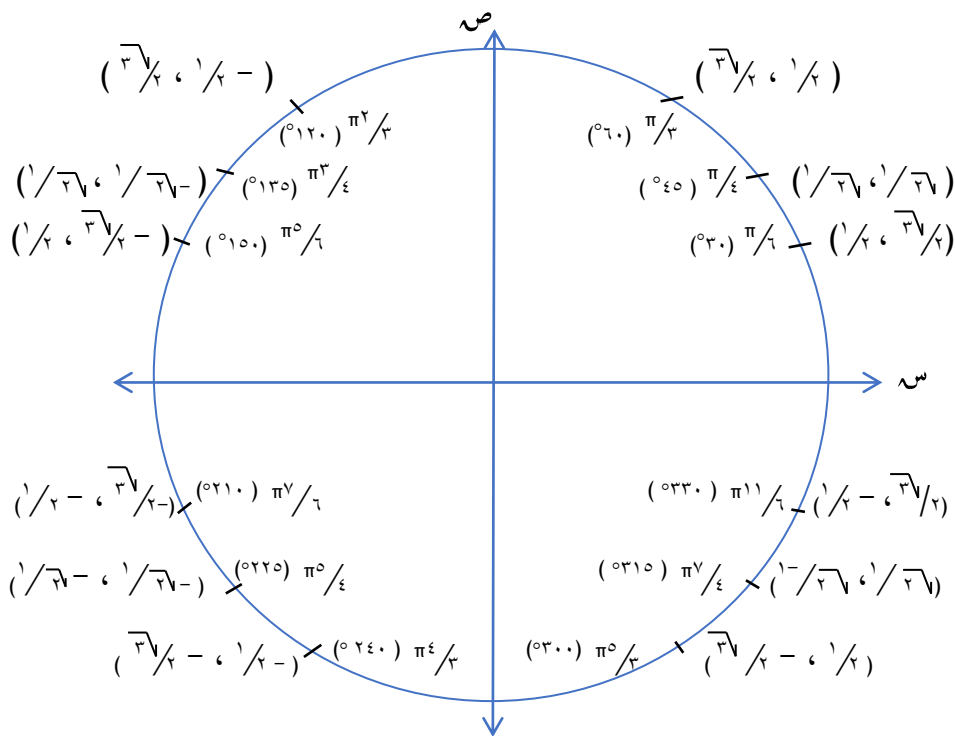
$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0.625$$

و هكذا يمكننا إيجاد إحداثيات النقط المثلثية لزوايا

مثل ١٢، ١٥، ٢٢٥، ٢٤٠، ٣٠٠، ٣١٥، ٣٣٠، ...

في الأبعاد المختلفة مراعين إشارات هذه الإحداثيات في الربع الذي تقع فيه النقطة المثلثية للزاوية .

والشكل (٦ - ٢٨) التالي يوضح لنا قياس الزوايا وإحداثيات نقاطها المثلثية ويمكننا من ذلك إيجاد الدالة المثلثية لها :



الشكل (٦ - ٢٨)

ويمكننا من الشكل (٦ - ٢٨) تكوين الجدول (٦ - ٢)

الزاوية بالدرجة	٣٠	٤٥	٦٠	١٢٠	١٣٥	١٥٠	١٦٠	٢٢٥	٢٤٠	٣٠٠
بالراديان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
الجيب	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
جيب التمام	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
الظل	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	١	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	١	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	١	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

الجدول (٦ - ٢)

مثال: (١)

جد : أ) جتا $\pi - \frac{\pi}{3}$ جا $\frac{\pi}{3}$

ب) ظا $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$ جا $\frac{\pi}{2}$ جتا $\frac{\pi}{4}$

ج) جا $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ ظا $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$ جتا $\frac{\pi}{3}$

الحل :

من الجدول (٦ - ٢) أو من الشكل (٦ - ٢٨) نجد أن :

$$(أ) \quad \text{جتا } ٢ - \pi \text{ جا } ٢ = \frac{\pi^2}{3} = ١ - ٢ \times \frac{\sqrt{3}}{2} = ١ - \sqrt{3}$$

$$(ب) \quad \text{ظا } ٣ + \frac{\pi^3}{4} \text{ جا } ٢ + \frac{\pi}{2} \text{ جتا } ٤ = \frac{\pi^4}{3} = ١ - ٢ \times ١ \times (- \frac{1}{2})$$

$$٢ - = ١ - ١ - =$$

(ج) حاول حلها مستعيناً بالجدول (٦ - ٢)

مثال: (٢)

جد ما يأتي :

$$(أ) \quad \text{جا } ٣٠٠^\circ \text{ جتا } ٤٥^\circ - ٣ \text{ ظا } ٢٢٥^\circ$$

$$(ب) \quad \text{جتا } ٠^\circ \text{ ظا } ١٣٥^\circ + ٢ \text{ جا } ٣١٥^\circ$$

الحل :

$$(أ) \quad \text{جا } ٣٠٠^\circ \text{ جتا } ٤٥^\circ - ٣ \text{ ظا } ٢٢٥^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = ١ \times ٣ - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$(ب) \quad \text{جتا } ٠^\circ \text{ ظا } ١٣٥^\circ + ٢ \text{ جا } ٣١٥^\circ = ٠ + ٢ \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$(\frac{2}{\sqrt{2}} + ١) - = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ٢ + (١ -) \times ١$$

تمرين (٦ - ٧)

(١) اذا كانت (هـ) = $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ جد :

جاه ، جتا هـ ، ظا هـ

(٢) اذا كانت (هـ) = $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ جد :

ظا هـ ، جا هـ + جتا هـ

(٣) اذا كانت (هـ) = $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ جد :

جا^٢ هـ + جتا^٢ هـ

(٤) جد ما ياتي :

أ. جا ٣٠ جتا ٦٠ + ٢ ظا ٤٥°

ب. ٢ ظا $\frac{\pi}{4}$ جتا $\frac{\pi}{6}$

ج. ظا ٣٠ جتا ١٢٠° + جا ١٥٠° جتا ٢١٠°

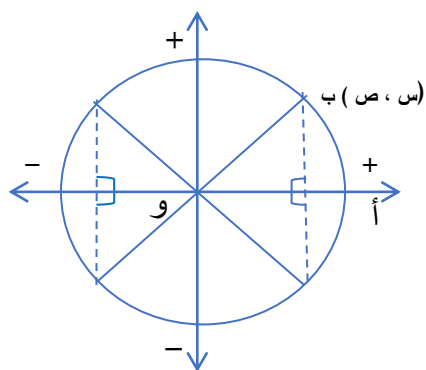
د. جا ٩٠° + جتا ٢٧٠°

هـ. ظا^٢ ١٨٠° + جتا^٢ ٣٦٠°

و. جا π + جتا $\frac{\pi}{2}$ - جا $\frac{\pi}{2}$

(٦ - ٨) زاوية الاسناد

عند تعريفنا للدوال المثلثية عرّفنا أنّ الإحداثي السيني للنقطة المثلثية للزاوية التي قياسها h هو جتا h وأنّ الإحداثي الصادي هو جا h . ونعلم ان اشارات إحداثيات النقاط تتوقّف على الربع الذي تقع فيه النقطة . فإذا وقعت النقطة المثلثية للزاوية في الربع الأول فإن كلاً من الإحداثيين s ، c يكون موجبا ويكون بالتالي كل من الجيب وجيب التمام للزاوية موجبا (الشكل ٦ - ٢٩) أما إذا وقعت في الربع الثاني فإن الإحداثي السيني يكون سالبا بينما يكون الإحداثي الصادي موجبا ويكون جيب الزاوية في هذه الحالة موجبا وجيب تمامها سالبا .



الشكل (٦ - ٢٩)

وإذا وقعت النقطة في

الربع الثالث يكون كل

من s ، c سالبا وبالتالي

يكون كل من جتا h ، جا h

سالبا . وإذا وقعت النقطة

في الربع الرابع يكون

s موجبا و c سالبا

وبالتالي تكون جتا h موجبا و جا h سالبا

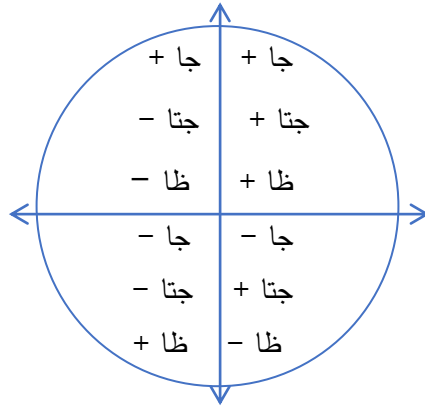
وبما أنّ ظل الزاوية هو ناتج قسمة

الجيب على جيب التمام فإن اشارات

الظل في الأرباع المختلفة تتبع اشارات الجيب

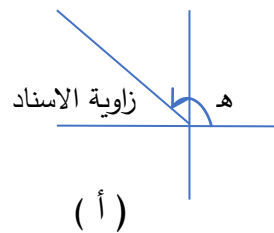
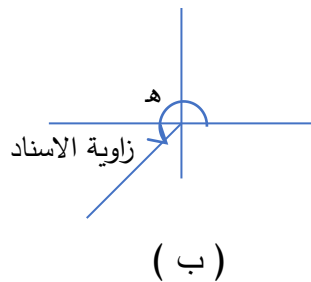
وجيب التمام فيكون في الربعين

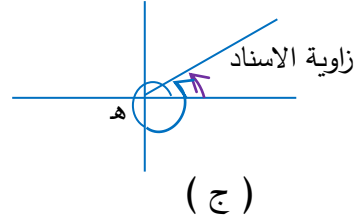
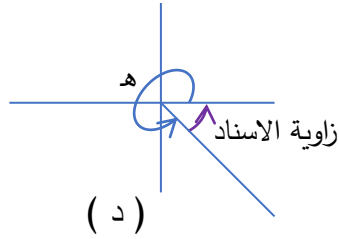
الأول والثالث موجباً وفي
الربعين الثاني والرابع سالباً



الشكل (٦ - ٣٠)

ولإيجاد قيمة الدالة المثلثية لأي زاوية مهما كانت قيمتها لابد من أن نتعرض لما يُعرف بزاوية الإسناد . ونعني **بزاوية الإسناد لأي زاوية هـ هي الزاوية الحادة المحصورة بين محور السينات والضلع النهائي للزاوية هـ** . وقياس زاوية الإسناد هو قياس هذه الزاوية فزاوية الإسناد للزاوية ١٥٠° هي الزاوية التي قياسها ٣٠° وزاوية الإسناد للزاوية ١٧٠° هي الزاوية ١٠° وزاوية الإسناد للزاوية ٢٠٠° هي ٢٠° وللزاوية ٢٣٠° هي ٥٠° وللزاوية ٣١٠° هي الزاوية ٥٠°. كما تبدو في الأشكال التالية التي توضح زاوية الإسناد للزاوية هـ لقيم مختلفة.





الشكل (٦ - ٣١)

ولإيجاد قيمة الدالة المثلثية لأي زاوية مهما كانت قيمتها نتعرض لهذه النظرية التي نقبلها دون برهان.

نظرية :

إذا كانت د هي زاوية الاسناد للزاوية ه فإن قيمة أي دالة مثلثية للزاوية ه تساوي قيمة نفس الدالة المثلثية للزاوية د عددياً ولكنهما قد يختلفان في الإشارة حسب الربع الذي تقع فيه الزاوية ه
أي $د = ١٨٠ \pm ه$ أو $د = ٣٦٠ \pm ه$
وعموماً $د = ١٨٠ ن \pm ه$
حيث ن ∈ ص و تسمى أحياناً بصيغة الزوايا المنتسبة.

مثال: (١)

جد جا ١٢٠° ، جتا ١٢٠° ، ظا ١٢٠°

الحل :

زاوية الاسناد للزاوية ١٢٠° هي ٦٠° في الربع الثاني

$$\therefore \text{جا } ١٢٠^\circ = \text{جا } ٦٠^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{جتا } ١٢٠^\circ = - \text{جتا } ٦٠^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ظا } ١٢٠^\circ = - \text{ظا } ٦٠^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال : (٢)

جد جا 33° ، جتا 33° ، ظا 33°

الحل :

زاوية الاسناد للزاوية 33° هي الزاوية 30° وتقع في الربع الرابع

$$\text{جا } 33^\circ = - \text{جا } 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{جتا } 33^\circ = \text{جتا } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ظا } 33^\circ = - \text{ظا } 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

مثال : (٣)

جد قيم الدوال المثلثية للزاوية 40.5°

الحل :

زاوية الاسناد للزاوية 40.5° هي الزاوية 45° في الربع الأول :

$$\therefore \text{جا } 40.5^\circ = \text{جا } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{جتا } 40.5^\circ = \text{جتا } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ظا } 40.5^\circ = \text{ظا } 45^\circ = 1$$

تمرين (٦ - ٨)

جد قيم الدوال المثلثية لكل من الزوايا التالية بعد تحديد زاوية الاسناد وتحديد الربع الذي تقع فيه:

$$\text{(أ) } 210^\circ \quad \text{(ب) } 240^\circ \quad \text{(ج) } 135^\circ$$

$$\text{(د) } 300^\circ \quad \text{(هـ) } 390^\circ$$

$$\text{(و) } 510^\circ \quad \text{(ز) } 585^\circ \quad \text{(ح) } - 45^\circ$$

(٦ - ٩) دوال القاطع وقاطع التمام وظل التمام

كما عرفنا سابقاً أن الدوال المثلثية للزاوية ه التي نقطتها المثلثية

(س، ص) هي :

$$\text{جا ه} = \text{ص} , \text{جتا ه} = \text{س} , \text{ظا ه} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

وهناك ثلاث دوال مثلثية أخرى يمكن تعريفها من مقلوبات هذه الدوال كما يلي :

تعريف :

إذا كانت ه هي الزاوية التي نقطتها المثلثية النقطة (س، ص) على

دائرة الوحدة. فإن دوالاً جديدة أخرى يمكن تعريفها مثل :

(١) دالة القاطع : ويرمز لها بالرمز قاه بحيث :

$$\text{قاه} = \frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{\text{جتاه}} \quad (\text{س} \neq 0, \text{أو جتا ه} \neq 0)$$

وعندما $\text{س} = 0$ أو $\text{جتاه} = 0$ فإن قاطع ه $= \infty$

(٢) دالة قاطع التمام : ويرمز لها بالرمز قتا ه بحيث :

$$\text{قتا ه} = \frac{1}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{جاه}} \quad (\text{ص} \neq 0, \text{جا ه} \neq 0)$$

وعندما $\text{ص} = 0$ أو $\text{جاه} = 0$ فإن قتا ه $= \infty$

(٣) دالة ظل التمام : ويرمز لها بالرمز ظتا ه

$$\text{بحيث ظتا ه} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{جتاه}}{\text{جاه}}$$

($\text{ص} \neq 0$ ، أو $\text{جا ه} \neq 0$)

$$\text{لاحظ أن ظتا ه} = \frac{1}{\text{ظاه}} , \quad (\text{ظاه} \neq 0)$$

وعندما $\text{ظاه} = 0$ فإن ظتا ه $= \infty$.

تذكر أنّ القاطع هو مقلوب جيب التمام . أي قا هـ = $\frac{1}{\text{جتا هـ}}$

وأنّ قاطع التمام هو مقلوب الجيب . أي قتا هـ = $\frac{1}{\text{جا هـ}}$

وأنّ ظل التمام هو مقلوب الظل . أي ظتا هـ = $\frac{1}{\text{ظاه}}$

مثال: (١)

إذا كانت النقطة المثلثية للزاوية هـ هي $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ جد: قا هـ ، قتا هـ ، ظتا هـ .

الحل :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \text{النقطة المثلثية للزاوية هـ} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= \text{قا هـ} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= \text{قتا هـ} \\ 1 &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \text{ظتا هـ} \end{aligned}$$

مثال: (٢)

إذا كانت النقطة المثلثية للزاوية ٣٠° هي $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

جد قيمة كل من :

أ. ظا ٣٠° قتا ٣٠° - جا ٣٠°

ب. ٢ جا ٣٠° + ظتا ٣٠° قا ٣٠°

الحل :

النقطة المثلثية للزاوية 30° هي $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\therefore \text{جا } 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ جتا } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ ظا } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{أ. ظا } 30^\circ \text{ قتا } 30^\circ - \text{جا } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} - 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ب. } 2 \text{ جا } 30^\circ + \text{ظتا } 30^\circ \text{ قا } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \times 2 = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

تمرين (٦ - ٩)

جد قيمة ما يأتي :

$$(١) \quad 2 \text{ جا } 30^\circ + \text{قا } 30^\circ$$

$$(٢) \quad \text{قا } 60^\circ \text{ جتا } 60^\circ$$

$$(٣) \quad \text{قا } 30^\circ - \text{جا } 30^\circ$$

$$(٤) \quad 2 \text{ ظا } 45^\circ + \text{قتا } 45^\circ$$

$$(٥) \quad 2 \text{ قا } 30^\circ + \text{ظتا } 45^\circ + \text{قتا } 30^\circ \text{ جتا } 60^\circ$$

$$(٦) \quad 2 \text{ ظا } 30^\circ + \text{ظتا } 60^\circ$$

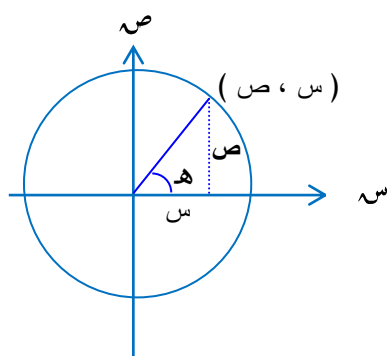
$$(٧) \quad \text{قتا } 30^\circ + \text{قا } 30^\circ$$

$$(٨) \quad \text{أثبت أن :}$$

$$\text{أ. } 0 = \text{ظا } 180^\circ - \text{جتا } 180^\circ + 3 \text{ قتا } 270^\circ + \text{جا } 90^\circ = 0$$

$$\text{ب. } 5 = \text{جا } 0^\circ + 3 \text{ ظتا } 90^\circ - 5 \text{ قا } 180^\circ - 4 \text{ جتا } 270^\circ = 5$$

(٦ - ١٠) العلاقة الأساسية : $\text{جا}^2 \text{ه} + \text{جتا}^2 \text{ه} = ١$



الشكل (٦ - ٣٣)

إذا كان (س ، ص) هما إحداثيا

النقطة المثلثية للزاوية هـ

وبما أن (س ، ص) هي نقطة

على دائرة الوحدة فإن :

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = ١$$

لكننا نعلم أن :

$$\text{س} = \text{جتا هـ}$$

$$\text{ص} = \text{جا هـ}$$

$$\therefore (\text{جتا هـ})^2 + (\text{جا هـ})^2 = ١$$

$$\therefore \text{جتا}^2 \text{ه} + \text{جا}^2 \text{ه} = ١$$

وهذه إحدى العلاقات الأساسية للدوال المثلثية وإذا قسمنا طرفي هذه العلاقة على

$\text{جتا}^2 \text{ه}$ عندما ($\text{جتا هـ} \neq ٠$) نحصل على العلاقة التالية :

$$\frac{\text{جتا}^2 \text{ه}}{\text{جتا}^2 \text{ه}} + \frac{\text{جا}^2 \text{ه}}{\text{جتا}^2 \text{ه}} = \frac{١}{\text{جتا}^2 \text{ه}} \quad \text{ولكن} \quad \frac{\text{جا}^2 \text{ه}}{\text{جتا}^2 \text{ه}} = \text{ظا}^2 \text{ه} , \quad \frac{١}{\text{جتا}^2 \text{ه}} = \text{قا}^2 \text{ه}$$

$$\therefore ١ + \text{ظا}^2 \text{ه} = \text{قا}^2 \text{ه} \Leftrightarrow \text{قا}^2 \text{ه} = ١ + \text{ظا}^2 \text{ه}$$

وبالمثل إذا قسمنا على $\text{جا}^2 \text{ه}$ نحصل على العلاقة :

$$\frac{\text{جتا}^2 \text{ه}}{\text{جا}^2 \text{ه}} + \frac{\text{جا}^2 \text{ه}}{\text{جا}^2 \text{ه}} = \frac{١}{\text{جا}^2 \text{ه}} \quad \text{لكن} \quad \frac{\text{جتا}^2 \text{ه}}{\text{جا}^2 \text{ه}} = \text{قتا}^2 \text{ه} , \quad \frac{١}{\text{جا}^2 \text{ه}} = \text{قتا}^2 \text{ه}$$

$$(\text{جا هـ} \neq ٠)$$

$$\text{أي أن} \quad \text{قتا}^2 \text{ه} = ١ + \text{ظتا}^2 \text{ه}$$

مثال: (١)

إذا عُلم أنَّ جتا ي = ٣/٥ ، ي زاوية حادة جد بقية الدوال المثلثية الأخرى :

الحل :

من العلاقة : جتا ي + جا ي = ١

$$\therefore (٣/٥) + جا ي = ١ \quad \leftarrow \quad ١ = ٩/٢٥ + جا ي$$

$$جا ي = ١ - ٩/٢٥ = ١٦/٢٥ \quad \therefore جا ي = \pm ٤/٥$$

لكن ي زاوية حادة $\therefore جا ي = ٤/٥$

$$\therefore ظاي = \frac{جا ي}{جتا ي} = \frac{٤/٥}{٣/٥} = ٤/٣ = ٥/٣ \times ٤/٥ = ٤/٣$$

$$\therefore قاي = جتا ي / ٥/٣ = ٣/٥ ، \therefore قتا ي = جا ي / ٤/٥ = ٥/٤ ، \therefore ظتا ي = ظاي / ٤/٥ = ٣/٤$$

مثال: (٢)

أثبت أنَّ :

$$جا س ظا س + جتا س = قا س$$

الحل :

تبسيط الطرف الأيمن

$$جا س \times \frac{جا س}{جتا س} + جتا س = \frac{جا^٢ س}{جتا س} + جتا س$$

بتوحيد المقامين

$$\frac{١}{جتا س} = \frac{جا^٢ س + جتا^٢ س}{جتا س} = \frac{١}{جتا س}$$

$$= قا س = الطرف الأيسر$$

مثال: (٣)

أختصر ما يأتي لأبسط صورة :

$$\frac{\text{ظاس قتا}^2 \text{س}}{١ + \text{ظا}^2 \text{س}}$$

الحل :

$$\text{بما أن } ١ + \text{ظا}^2 \text{س} = \text{قا}^2 \text{س}$$

$$= \frac{\text{ظاس قتا}^2 \text{س}}{١ + \text{ظا}^2 \text{س}}$$

وبكتابة ظا س ، قتا س بدلالة جا س ، جتا س ينتج :

$$\frac{\frac{١}{\text{جتا س جا س}}}{\frac{١}{\text{جتا}^2 \text{س}}} = \frac{\frac{١}{\text{جا}^2 \text{س}} \times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}}{\frac{١}{\text{جتا}^2 \text{س}}} = \frac{\text{ظاس قتا}^2 \text{س}}{\text{قا}^2 \text{س}} \quad \therefore$$

$$\text{جتا س جا س} = \frac{١}{\text{جتا}^2 \text{س}} \times \frac{\text{جتا}^2 \text{س}}{١} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} = \text{ظتا س}$$

تمرين (٦ - ١٠)

(١) إذا كان $\frac{\pi}{13} = \text{جا ه}$ وكان $\frac{\pi}{2} > \text{س} > \pi$ جد كلا من جتا ه ، ظا ه ، قا ه ، قتا ه ، ظتا ه .

(٢) أثبت أن :

$$\frac{\text{جتا ه}}{\text{جتا ه} + ١} = \frac{١ - \text{جا ه}}{\text{جتا ه}}$$

(٣) أثبت أن : $\text{قا}^٢ \text{س} = (١ - \text{جا}^٢ \text{س}) = ١$

(٤) أثبت أن : $٢ \text{جتا ه} - \text{جا ه} + ١ = ٣ \text{جتا ه}$

(٥) أثبت أن : $\text{ظتا س} + \text{ظا س} = \text{قا س قتا س}$

(٦) أختصر :

$$\frac{\text{قتا س} - \text{ظتا س}}{\text{جا س}}$$

(٧) أختصر : $\text{ظتا}^٢ \text{س} + \frac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{ظتا س} + ١}$

(٨) أختصر : $(\text{جا س} + \text{جتا س})^٢ + (\text{جا س} - \text{جتا س})^٢$

(٩) أثبت أن $\text{ظتا س} + \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س} + ١} = \text{قتا س}$

الربط مع الحياة

تُمثّل الدوال الدائرية جانباً أساسياً في الرياضيات، إذ تعكس ارتباط الأشكال والزوايا بالحياة اليومية، وتساعد في وصف الظواهر الطبيعية وفهم العلاقات المتكررة بصورة دقيقة وواضحة مثلاً :

(أ) الزاوية الموجهة و وضعها القياسي نجدها في المجالات :

١. الجيش : لتحديد اتجاه و زاوية المدفعية أو القصف.
٢. الأقمار الصناعية : لتوجيه مسار القمر الصناعي في مداره.
٣. التصميم المعماري : لتحديد الزوايا انطلاقاً من محور ثابت لإنشاء المباني.

(ب) التقدير الدائري (الراديان) نجده في المجالات :

١. الفيزياء : يُستخدم لحساب السرعة الزاوية في الحركة الدائرية بدقة.
٢. الروبوتات: لبرمجة حركات الأذرع الدوارة يُستخدم القياس بالراديان.

(ج) النقطة المثلثية والدوال المثلثية نجدها في المجالات :

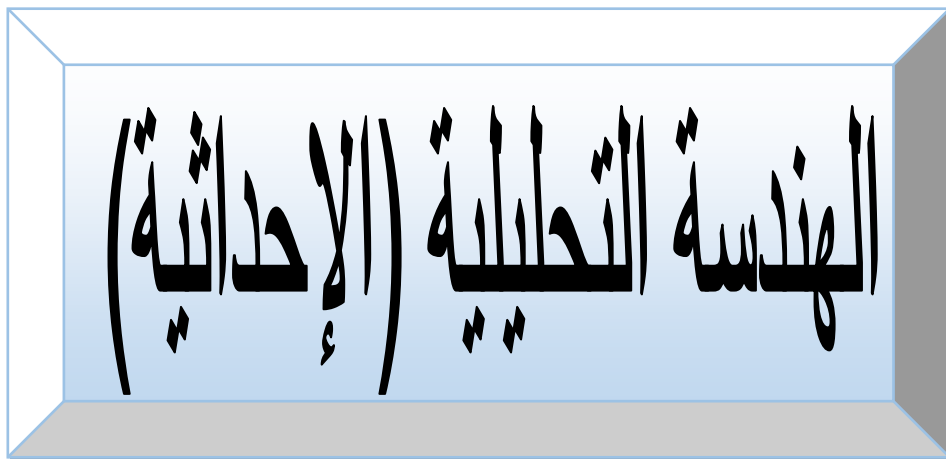
٣. البصريّات : لتحديد انكسار الأشعة داخل مواد مختلفة.
٤. الصوتيات: تحليل الذبذبات الصوتية عبر الدوال المثلثية.

(د) زاوية الإسناد نجدها في المجالات :

١. الطيران : لتحديد زاوية الصعود أو الهبوط.
 ٢. الرسم الهندسي: استخدام زاوية مرجعية لتصميم أشكال.
- ### (هـ) العلاقة الأساسية $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ نجدها في المجالات :

١. الأرصاد الجوية : لوصف موجات الرياح أو الأمواج.
٢. الفلك : إثبات انتظام مسارات الكواكب.

الوحدة السابعة



أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :-

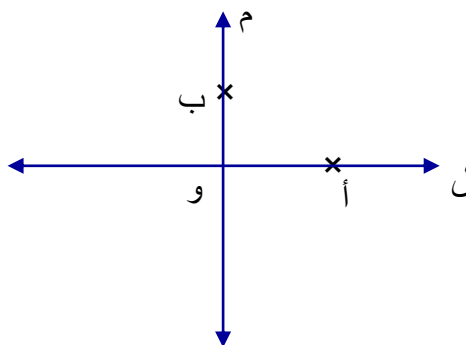
- ١- يتعرّف نظام الإحداثيات المتعامدة في المستوى .
- ٢- يتعرّف نظام الإحداثيات في المستوى الإحداثي .
- ٣- يجد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي .
- ٤- يجد نقطة تقسيم قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي من الداخل .
- ٥- يجد نقطة تقسيم قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي من الخارج .
- ٦- يجد ميل الخط المستقيم .
- ٧- يجد ميل الخط المستقيم إذا عرفت نقطتين عليه .
- ٨- يجد الزاوية بين مستقيمين .
- ٩- يتعرّف المستقيمات المتوازية .
- ١٠- يتعرّف المستقيمات المتعامدة .

(٧ - ١) مقدمة

الهندسة التحليلية هي التحليل الجبري للهندسة المستوية (الاقليدية) . ونظراً لأنها طريقة فعّالة ، فقد ساهمت منذ إدخالها في أوائل القرن السابع عشر بقدر كبير في تقدّم الهندسة ، وكان لها الدور الكبير في تبسيط وعرض البراهين للحقائق في الهندسة المستوية وخاصة ما ارتبط منها بالتعامد والتوازي . والهندسة التحليلية - كغالبية الأفكار الرياضية العظيمة - لم تكن من اختراع شخص واحد ، بل تطورت تدريجياً خلال فترة طويلة . وقد قام العالم المسلم ثابت بن قرة (٨٣٥ - ٩٠٠ م) بوضع مبادئ الهندسة التحليلية عندما ألف كتاباً بيّن فيه علاقة الجبر بالهندسة والهندسة بالجبر وكيفية الجمع بينهما . أما الشخصان اللذان قاما فعلاً بتطويرها وأوصلها إلى صورتها الحالية - فهما الرياضى الفرنسى بيير دى فرما (١٦٠١ - ١٦٦٥ م) والفيلسوف الرياضى الفرنسى رينيه ديكارت (١٥٩٦ - ١٦٥٠ م) .

(٧ - ٢) نظام الإحداثيات المتعامدة في المستوى

ارسم على دفترك خطين متعامدين ل ، م يتقاطعان عند و كما في الشكل (٧ - ١) ادناه :



الشكل (٧ - ١)

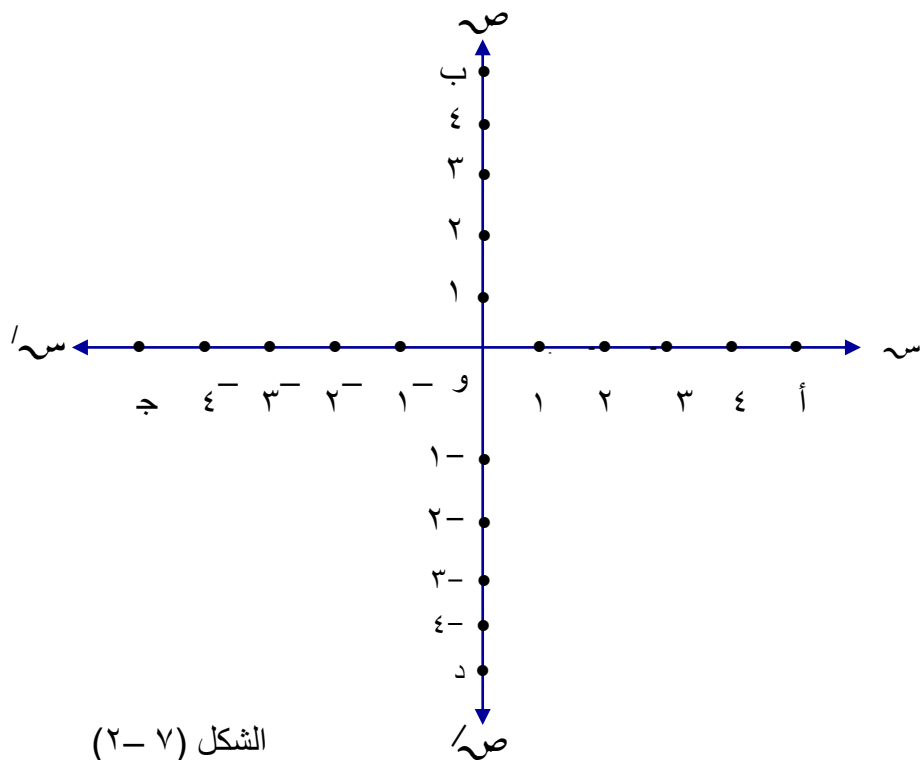
عَيّن على هذين الخطين النقطتين أ ، ب بحيث يكون أ و = ١ سم ،
ب و = ١ سم

نظام الإحداثيات على الخط l : نعتبر النقطة (أ) نقطة الوحدة والنقطة (و) نقطة الأصل .

نظام الإحداثيات على الخط م : نعتبر النقطة (ب) نقطة الوحدة والنقطة (و) نقطة الأصل . نسمي خطي الإحداثيات اللذين عرفناهما بنظام إحداثيات متعامدة للمستوى المحدد .

اصطلاحاً يُسمّى المستقيم ل محور السينات ، م محور الصادات.

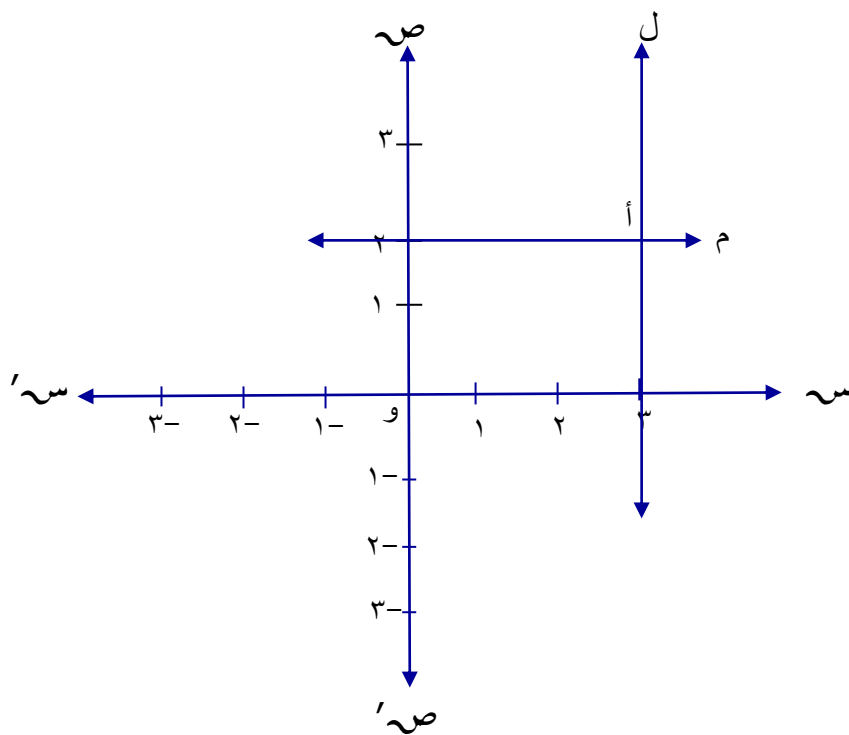
لاحظ أنّ أقسام التدرج على محور السينات ليس بالضرورة أن يساوى تدرج محور الصادات إلاّ أن الشائع والمتبع أن يكونا متساويين . والآن لننظر إلى الشكل (٧ - ٢) والذي يمثّل نظام إحداثيات متعامدة وفيه التدرج المستخدم على المحور السيني يساوى التدرج على المحور الصادي .



يُسمَّى الشعاع $\overrightarrow{أ}$ الاتجاه الموجب لمحور السينات ونرمز له بالرمز s
ويُسمَّى الشعاع $\overrightarrow{ب}$ الاتجاه السالب لمحور السينات ونرمز له بالرمز s'
ويُسمَّى الشعاع $\overrightarrow{ج}$ الاتجاه الموجب لمحور الصادات ونرمز له بالرمز v
ويُسمَّى الشعاع $\overrightarrow{د}$ الاتجاه السالب لمحور الصادات ونرمز له بالرمز v'

نشاط :

(١) ارسم على دفترك نظام إحداثيات ذا تدرج موحد كما في الشكل (٧ - ٣)



الشكل (٧ - ٣)

(٢) ارسم الخط ل عمودياً على محور السينات وماراً بالنقطة التي إحداثياتها السيني ٣ .

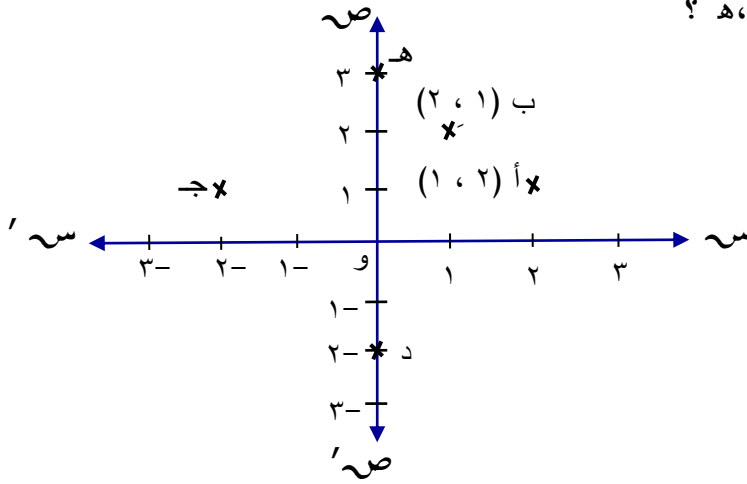
(٣) ارسم الخط م عمودياً على محور الصادات وماراً بالنقطة التي إحداثيها الصادي ٢ .

(٤) أفرض أن نقطة تقاطع المستقيمين ل ، م هي أ سنعرّف النقطة أ بدلالة الإحداثي السيني وهو العدد ٣ والإحداثي الصادي وهو العدد ٢ وسنكتب النقطة أ على النحو أ (٢ ، ٣) مستخدمين الزوج المرتب (٢ ، ٣) (لاحظ الترتيب) . مما سبق نستطيع أن نستنتج أن أي نقطة ن في المستوى الإحداثي تحدّد زوجاً مرتباً وحيداً من الاعداد الحقيقية (س ، ص) يعيّن موقع النقطة ن . يُسمّى المسقط الأول س الإحداثي السيني للنقطة ن كما يُسمّى المسقط الثاني ص الإحداثي الصادي للنقطة ن . وكذلك كل زوج مرتب من الاعداد الحقيقية (س ، ص) يعيّن نقطة وحيدة في المستوى الإحداثي . وبذلك يكون لدينا تطبيق

ت : مجموعة نقط المستوى ← مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) حيث س ،

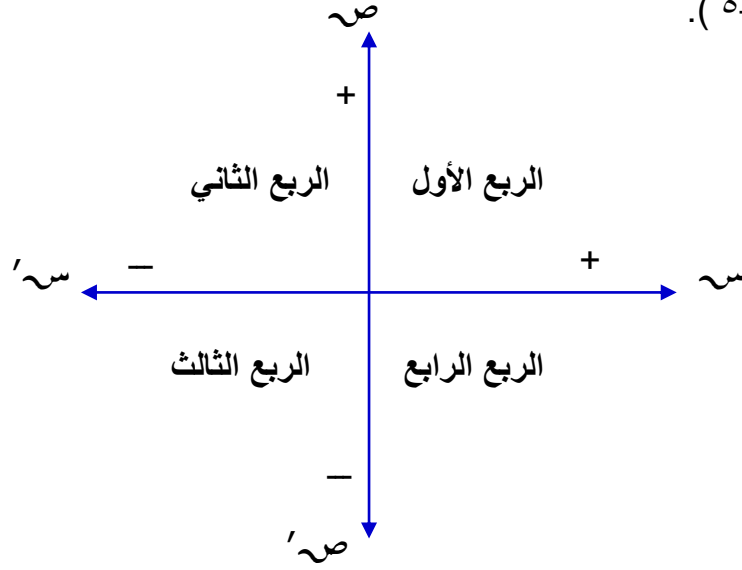
ص $\in \mathbb{R}$. ونكتب عادة ن = (س ، ص) أو ن (س ، ص) أو النقطة

(س، ص) للتعبير عن النقطة في النظام الإحداثي للمستوى ففي الشكل (٧-٤) (١، ٢) يمثل النقطة أ ، (٢، ١) يمثل النقطة ب ، ما الإحداثيات التي تمثل النقاط ج ، د ، و ، هـ ؟



الشكل (٧-٤)

نلاحظ أن محوري الإحداثيات السيني والصادي يقسمان المستوى الإحداثي إلى أربع مجموعات من النقاط ، كل مجموعة تُسمّى ربعاً انظر شكل (٧ - ٥).



الشكل (٧ - ٥)

ويمكن التعبير عن كل مجموعة بالصفة المميزة لها كما يلي :

الربع الأول = $\{ (س ، ص) : س > ٠ ، ص > ٠ \}$

الربع الثاني = $\{ (س ، ص) : س < ٠ ، ص > ٠ \}$

الربع الثالث = $\{ (س ، ص) : س < ٠ ، ص < ٠ \}$

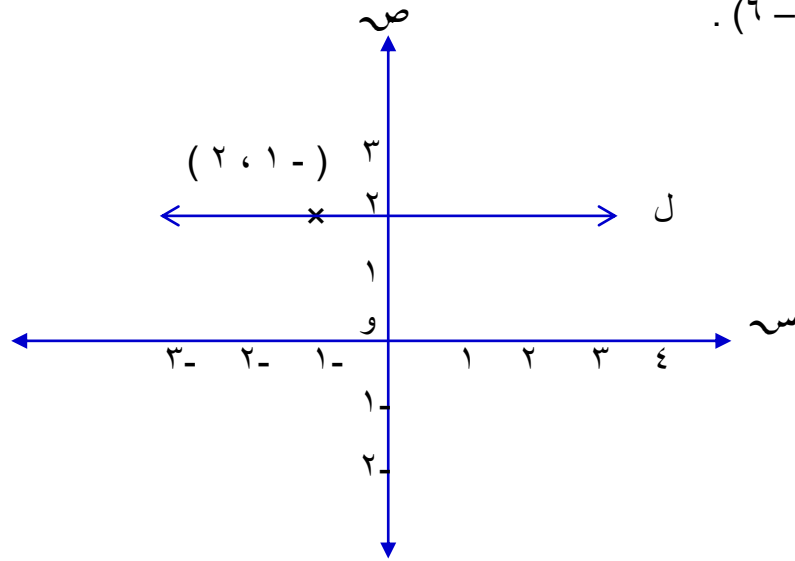
الربع الرابع = $\{ (س ، ص) : س > ٠ ، ص < ٠ \}$

لاحظ أن جميع نقاط المحور السيني إحداثيها الصادي يساوى صفراً ، أي أن المحور السيني = $\{ (س ، ص) : ص = ٠ \}$.

وكذلك جميع نقاط المحور الصادي إحداثيها السيني يساوى صفراً أي أن المحور الصادي = $\{ (س ، ص) : س = ٠ \}$

وعليه يمكن وصف أي مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي لها صفات معينة وذلك بكتابة هذه المجموعة بالصفة المميزة لها .

فالمستقيم $ل$ المار بالنقطة $(-1, 2)$ ويوازي محور السينات تكون كل نقطة عليه إحداثيها الصادي 2 دوماً ، أما إحداثيها السيني فيتغير حسب موقع النقطة ويأخذ كل قيم $ص$ ، وعليه فإن $ل = \{(ص, 2) : ص = 2\}$. شكل (٦ - ٧) .



الشكل (٦ - ٧)

مثال :

باستخدام الصفة المميزة عبر عن الجمل الهندسية التالية :

- (أ) نقطة الأصل .
- (ب) الجزء السالب من المحور الصادي .
- (ج) الربع الرابع .
- (د) المستقيم المار بالنقطة $(2, 5)$ وموازٍ لمحور الصادات .

الحل :

- (أ) $\{(ص, 0) : ص = 0\}$
- (ب) $\{(ص, 0) : ص < 0\}$
- (ج) $\{(ص, 0) : ص > 0\}$
- (د) $\{(ص, 5) : ص = 5\}$

تمرين (٧-١)

(١) على المستوى الإحداثي عيّن النقاط الآتية :

أ (٣ ، ١) ، ب (-٥ ، ٠) ، ج (-٣ ، ١) ، د (٠ ، ٤)
هـ (٥ ، -١)

(٢) على المستوى الإحداثي ارسم شكلاً يوضح مجموعة النقاط التالية :

(أ) { (س ، ص) : س < ٠ ، ص ≥ ٠ }

(ب) { (س ، ص) : س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠ }

(٣) باستخدام المجموعات عبّر عن الجمل التالية على المستوى الإحداثي :

(أ) الجزء الموجب من محور السينات .

(ب) الربع الثالث .

(ج) المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) وموازٍ لمحور السينات .

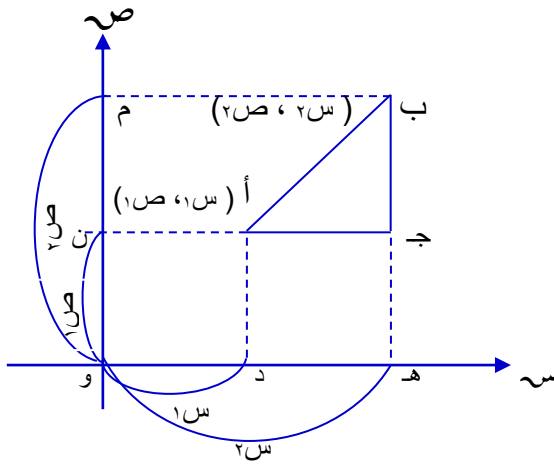
(د) نصف المستوى الواقع فوق محور السينات .

(٧ - ٣) المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي

درسنا في النظام الإحداثي للمستقيم كيف نعيّن المسافة بين نقطتين . فإذا كان إحداثي النقطة أ = س_١ ، وإحداثي النقطة ب = س_٢ ، فإن المسافة بين النقطتين أ ، ب = | س_٢ - س_١ | أو | س_١ - س_٢ | . أما في المستوى الإحداثي حيث تتعيّن النقطة بزواج مرتّب من الأعداد الحقيقية (س ، ص) فلايجاد المسافة بين النقطتين أ ، ب في المستوى الإحداثي وكان أ (س_١ ، ص_١)

ب (س_٢ ، ص_٢)

نرسم القطعة أ ب ومن طرفيها
نرسم مستقيمين يوازيان المحور
الصادي فيقطعان المحور السيني
في النقطتين د ، هـ ثم نرسم من
طرفي أ ب مستقيمين يوازيان
المحور السيني ، فيقطعان
المحور الصادي في النقطتين ن ، م .
شكل (٧ - ٧) . فيكون
طول أ ج = طول د هـ



الشكل (٧ - ٧)

$$\begin{aligned} |س_٢ - س_١| &= \overline{د هـ} \\ \overline{ج ب} = \overline{ن م} &= |ص_٢ - ص_١| \\ \Delta أ ب ج قائم الزاوية في ج \\ \therefore \text{طول أ ب}^2 &= \overline{أ ج}^2 + \overline{ج ب}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{أ ب}^2 &= (|س_٢ - س_١|)^2 + (|ص_٢ - ص_١|)^2 \\ \overline{أ ب}^2 &= (س_٢ - س_١)^2 + (ص_٢ - ص_١)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{أ ب} = \sqrt{(س_٢ - س_١)^2 + (ص_٢ - ص_١)^2}$$

وبما أن $|س٢ - س١| = |س١ - س٢|$ فيمكن كتابة ايضاً :

$$\sqrt{(س١ - س٢)^2 + (ص١ - ص٢)^2} = \text{طول } \overline{أب}$$

مثال (١) :

جد المسافة بين كل من أزواج النقاط الآتية :

(أ) أ (٦ ، ٣) ، ب (٩ ، ٢ -)

(ب) د (٤ - ، ٣) ، هـ (٢ - ، ٥)

الحل :

$$(أ) \sqrt{(س١ - س٢)^2 + (ص١ - ص٢)^2} = \text{طول } \overline{أب}$$

$$= \sqrt{(٦ - ٩)^2 + (٣ - ٢ -)^2}$$

$$= \sqrt{٣^2 + (-١)^2} = \sqrt{١٠} \text{ وحدة}$$

$$(ب) \sqrt{(س١ - س٢)^2 + (ص١ - ص٢)^2} = \text{طول } \overline{د هـ}$$

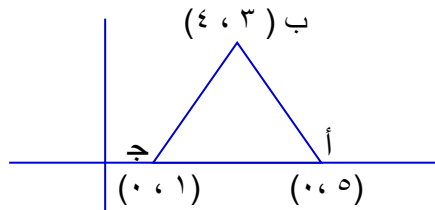
$$= \sqrt{(٤ - - ٢ -)^2 + (٣ - ٥)^2} = \sqrt{٢^2 + (-٢)^2} = \sqrt{٨} \text{ وحدة}$$

مثال (٢) :

بيّن أن المثلث الذي رؤوسه النقاط أ (٥ ، ٠) ، ب (٣ ، ٤) ، ج (١ ، ٠) متساوي الساقين .

الحل :

ارسم الشكل التقريبي للمثلث :



شكل (٧ - ٨)

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2(0 - 4) + 2^2(5 - 3)} = \overline{AB}$$

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20} \text{ وحدة}$$

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2(4 - 0) + 2^2(3 - 1)} = \overline{BC}$$

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2(5 - 1) + 2^2(0)} = \overline{CA} = 4 \text{ وحدات}$$

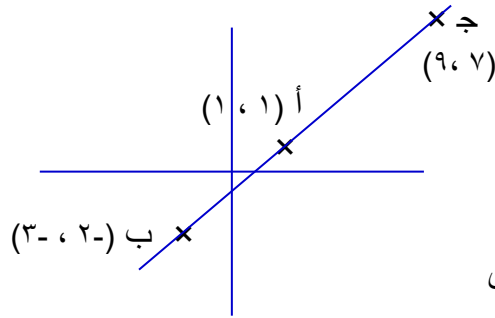
$$\therefore \overline{AB} = \overline{BC}$$

$\therefore \Delta ABC$ متساوي الساقين

مثال (٣) :

برهن أن النقاط أ (١ ، ١) ، ب (٣ - ، ٢ -) ، ج (٩ ، ٧) تقع على استقامة واحدة .

الحل :



شكل (٧ - ٩)

تكون النقاط أ ، ب ، ج على استقامة واحدة إذا كان مجموع قطعتين مستقيمتين يساوي طول القطعة المستقيمة الثالثة ففي الشكل (٧ - ٩) :

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2(1 - 3) + 2^2(1 - 2)} = \overline{AB}$$

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2(4 - 0) + 2^2(3 - 1)} = \sqrt{2^2(5 - 1) + 2^2(0)} = \overline{BC}$$

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2(3 + 9) + 2^2(2 + 7)} = \overline{CA} = 10 \text{ وحدة}$$

طول جـ أ $\sqrt{= \sqrt{(٧-١)^2 + (٩-١)^2}} = ١٠٠ \sqrt{= ١٠}$ وحدات
 $\therefore$ طول أ ب + طول جـ أ = طول بـ جـ = ١٥ وحدة
 $\therefore$ أ ، ب ، ج تقع على استقامة واحدة .

تمرين (٧-٢)

(١) جد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي :

(أ) أ (١ ، ٧) ، ب (٢ ، ١-)

(ب) أ (٠ ، ٠) ، ب (١ ، ٣)

(ج) أ (٦ ، ٩) ، ب (٩ ، ٦)

(د) أ (ب + ج ، ج + أ) ، ب (ج + أ ، أ + ب)

(٢) أثبت أن كلاً من المثلثين الآتيين قائم الزاوية

(أ) Δ أ ب ج : أ (٥ ، ٣) ، ب (١ ، ٤) ، ج (٢ ، ٢)

(ب) Δ ل م ن : ل (٠ ، -٤) ، م (٦ ، ٢) ، ن (٣ ، ٥)

(٣) برهن أن النقاط الأربع أ (٢ ، ٤) ، ب (٠ ، ١) ، ج (٣ ، -١) ، د (٥ ، ٢) هي رؤوس مربع .

(٤) بيّن أي من مجموعات النقاط الآتية تقع على استقامة واحدة وأيها لا تقع

على إستقامة واحدة

(أ) أ (٣- ، ٣-) ، ب (١ ، ٠) ، ج (٥ ، ٣)

(ب) ك (٣- ، ١-) ، ل (٥ ، ١) ، م (١ ، ٧)

- (٥) بيّن أن النقاط أ (٠، ٤) ، ب (٣، ١) ، ج (٣، -١) تقع على دائرة مركزها (٠، ١) ، جد طول نصف قطرها .
- (٦) بيّن نوع كل من المثلثات الآتية من حيث الاضلاع :
- (أ) أ (٠، ١) ، ب (٦، ٠) ، ج (٣، ٧)
- (ب) ك (٦، ٠) ، ل (٣، ٧) ، م (٠، ٠)
- (٧) أثبت أن الرباعي الذى رؤوسه و (٠، ٠) ، أ (٠، ٠) ، ب (أ، ٠) ، ج (٠، ٠) مستطيل .
- (٨) أثبت أن النقاط الأربع (١، -٢) ، (٢، -١) ، (٢، ١) ، (١، -٢) ، (٢، -١) هي رؤوس متوازي اضلاع .

(٧ - ٤) إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي

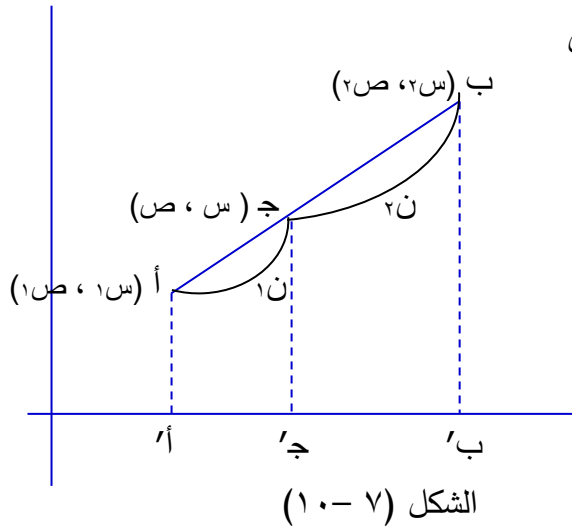
(أ) التقسيم من الداخل :

لتكن لدينا القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ حيث $A(س١، ص١)$ ، $B(س٢، ص٢)$.
ولتكن $ج(س، ص)$ نقطة تقسيم القطعة $\overline{AB}$ من الداخل

بنسبة $ن١ : ن٢$.

شكل (٧ - ١٠) أي

$$\frac{\text{طول } \overline{AJ}}{\text{طول } \overline{JB}} = \frac{ن١}{ن٢}$$



وللحصول على إحداثيي النقطة ج . دون مساس بالعمومية نفرض أن

$$س١ < س٢ ، ص١ < ص٢$$

نرسم مساقط النقاط أ ، ج ، ب على المحور السيني ولتكن أ' ، ج' ، ب' على الترتيب .

من تعريف الإحداثيات نجد أن إحداثيات النقاط أ' ، ج' ، ب' على

المحور السيني هي س١ ، س ، س٢ على الترتيب .

$$\therefore \text{طول } \overline{AJ} = س - س١ \quad (س < س١)$$

$$\text{طول } \overline{JB} = س٢ - س \quad (س < س٢)$$

ومن دراستنا لنظريات الهندسة المستوية بالمرحلة المتوسطة عرفنا أنه إذا

$$\text{كان } \overline{AA'} \parallel \overline{JJ'} \parallel \overline{BB'}$$

$$\frac{ن_1}{ن_2} = \frac{\overline{\text{طول أ ج}}}{\overline{\text{طول ج ب}}} = \frac{\overline{\text{طول أ' ج'}}}{\overline{\text{طول ج' ب'}}} \quad \text{فإن}$$

$$\frac{ن_1}{ن_2} = \frac{س - س_1}{س - س_2} \quad \therefore$$

$$\therefore 2ن_1 = (س - س_1) \quad 1ن_2 = (س - س_2)$$

$$\Leftarrow 2ن_1 - س = 2ن_2 - س \Rightarrow 1ن_2 - 2س_1 = 1ن_1 + س_2 \Rightarrow 1ن_2 + 2س_1 = 2ن_1 + س_2$$

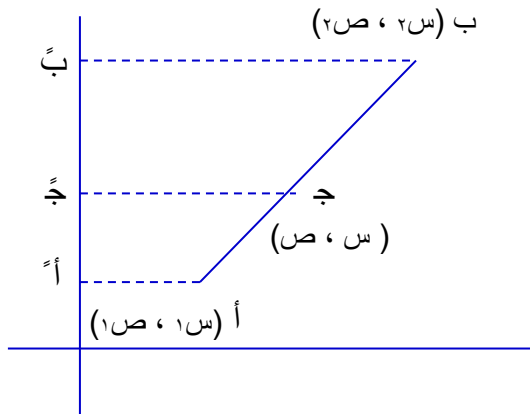
$$\Leftarrow س = (1ن_2 + 2ن_1)$$

$$\Leftarrow س = \frac{2ن_1 + 1س_2}{1ن_2 + 2ن_1} = \frac{1س_1 + 2ن_2}{1ن_2 + 2ن_1}$$

وبالمثل وبالطريقة نفسها
إذا أنزلنا مساقط النقاط
أ ، ب ، ج على المحور
الصادي لتكون أ' ، ج' ، ب'
فإن إحداثياتها على المحور
الصادي هي :
ص₁ ، ص₂ ، ص₃ على

الترتيب . شكل (٧-١١)
يمكننا التوصل إلى أن :

$$ص = \frac{1ص_1 + 2ص_2}{1ن_2 + 2ن_1}$$



الشكل (٧-١١)

وبذلك نستنتج ما يلي :

إذا كانت أ (س_١ ، ص_١) ، ب (س_٢ ، ص_٢) ، وكانت ج تقع على القطعة أ ب وتقسم أ ب بنسبة ن_١ : ن_٢ من الداخل فإن إحداثيي ج هما :

$$\left(\frac{ن_١ ص_٢ + ن_٢ ص_١}{ن_١ + ن_٢} , \frac{ن_١ س_٢ + ن_٢ س_١}{ن_١ + ن_٢} \right)$$

نشاط :

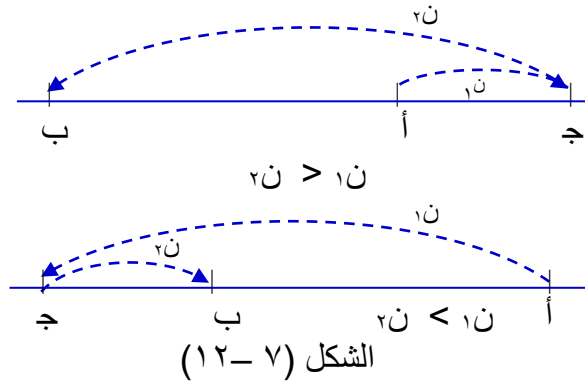
إذا كانت ج منتصف أ ب فما هي النسبة التي تقسم بها ج القطعة أ ب .
وإذا كانت أ (س_١ ، ص_١) ، ب (س_٢ ، ص_٢) استنتج أن إحداثيي نقطة منتصف

أ ب هما :

$$\left(\frac{ص_٢ + ص_١}{٢} , \frac{س_٢ + س_١}{٢} \right)$$

(ب) التقسيم من الخارج :

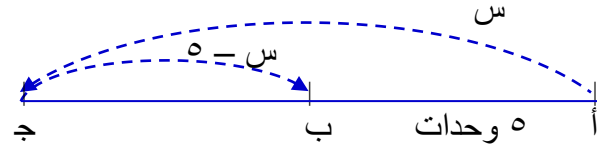
أما إذا كانت ج تقسم القطعة المستقيمة أ ب من الخارج بنسبة ن_١ : ن_٢ ، فإن نقطة التقسيم ج تقع خارج القطعة المستقيمة أ ب ، فتكون على أحد امتداديهما، حيث تكون على إمتداد ب أ أي أقرب إلى أ إذا كانت ن_١ > ن_٢ ، وتكون على إمتداد أ ب أي أقرب إلى ب في حالة أن تكون ن_١ < ن_٢ كما يبدو في الشكل (٧-١٢) .



تلاحظ في حالة التقسيم من الخارج اختلاف اتجاهي القطعتين $\overline{أ ج}$ ، $\overline{ج ب}$ الناشئتين من التقسيم ، لذلك تكون النسبة في حالة التقسيم من الخارج سالبة . لأن أحد حديها سالب . وتوضح الإشارة السالبة في حالة التقسيم من الخارج إذا تأملت المثال العددي التالي :

أ ب قطعة مستقيمة طولها ٥ وحدات . فإذا كانت النقطة ج تقسمها من الخارج بنسبة ٣ : ٢ ، فإن ج تقع على إمتداد أ ب أي أقرب إلى ب بحيث

$$\frac{\text{طول } \overline{أ ج}}{\text{طول } \overline{ج ب}} = \frac{٣}{٢} \quad \text{كما في الشكل (٧-١٣)}$$



الشكل (٧-١٣)

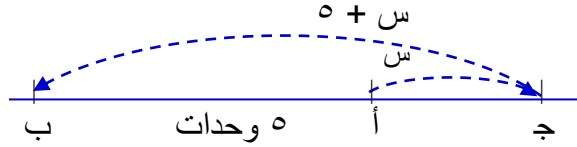
وبفرض أن $\overline{أ ج} = \text{س وحدة}$ ، فإن $\overline{ب ج} = \text{س} - ٥ \text{ وحدة}$

$$\therefore \frac{\text{س}}{\text{س} - ٥} = \frac{٣}{٢} \Leftrightarrow ٢ \text{ س} = ٣ (\text{س} - ٥) \Leftrightarrow ٢ \text{ س} = ٣ \text{ س} - ١٥ \Leftrightarrow \text{س} = ١٥ \text{ وحدة}$$

$\therefore \text{طول } \overline{أ ج} = ١٥ \text{ وحدة}$ ، $\text{طول } \overline{ب ج} = ١٥ - ٥ = ١٠ \text{ وحدات}$

تلاحظ أننا طرحنا إحدى القطعتين من الأخرى ، أي أخذنا إحدى القطعتين بالسالب .

أما إذا كان ج تقسم طول أ ب من الخارج بنسبة ٣ : ٢ فإن ج تقع على إمتداد طول ب أ أي أقرب إلى أ بحيث يكون طول أ ج : طول ج ب = ٣ : ٢ كما في الشكل (٧-١٤)



الشكل (٧-١٤)

فإذا كان $\overline{أ ج} = س$ وحدة ، فإن $\overline{ج ب} = س + ٥$ وحدات

$$\therefore \frac{س}{س + ٥} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow ٣ س = ٢ (س + ٥) \Leftarrow ٣ س = ٢ س + ١٠$$

$$\Leftarrow س = ١٠ \text{ وحدات}$$

$$\text{تلاحظ أن } \overline{أ ب} = \overline{ج ب} - \overline{أ ج} = ١٥ - ١٠$$

أي طرحنا إحدى القطعتين كذلك من الأخرى

أي أخذنا إحدى القطعتين بالسالب أيضاً .

مما يوضح أنه في حالة التقسيم من الخارج تكون إحدى القطعتين دائماً سالبة مما يجعل أحد حدى النسبة سالباً .

وبصورة عامة إذا أعطينا نسبة التقسيم في سؤال ما بالإشارة السالبة فنعرف أن التقسيم من الخارج . وبذلك نستنتج ما يلي :

إذا كانت $أ (س١ ، ص١)$ ، $ب (س٢ ، ص٢)$ وكانت $ج$ تقسم $\overline{أ ب}$ من الخارج بنسبة $ن١ : ن٢$ فإن إحداثيي $ج$ هما :

$$\left(\frac{ن١ ص٢ - ن٢ ص١}{ن٢ - ن١} , \frac{ن١ س٢ - ن٢ س١}{ن٢ - ن١} \right)$$

نشاط : حاول استنتاج النتيجة السابقة باستخدام التقسيم من الداخل .

مثال : (١)

إذا كانت $ج$ هي منتصف $\overline{أ ب}$ حيث $أ (-٤ ، ١)$ ، $ب (٦ ، -٩)$ جد

إحداثيي $ج$.

الحل :

بفرض أن إحداثيي $ج (س ، ص)$

$$1 = \frac{6 + 4-}{2} = \frac{2س + 1س}{2} = س \therefore$$

$$4- = \frac{(9-) + 1}{2} = \frac{2ص + 1ص}{2} = ص$$

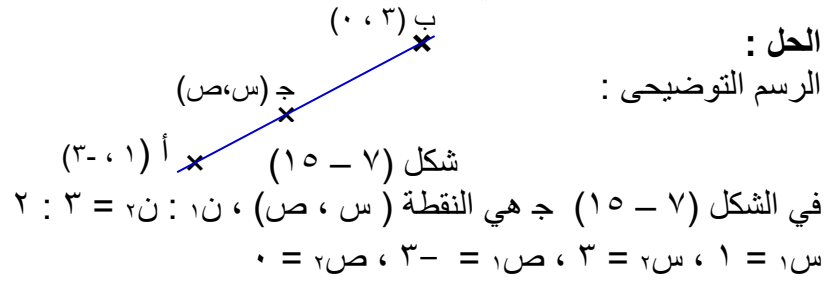
$\therefore$ نقطة التنصيف هي ج (1 ، 4-)

مثال: (٢)

إذا كانت أ (1 ، 3-) ، ب (3 ، 0) وكانت ج تقسم أ ب من الداخل بنسبة 3 : 2 ، احسب إحداثيي ج .

الحل :

الرسم التوضيحي :



$$\therefore س = \frac{1س \cdot 2ن + 2س \cdot 1ن}{2ن + 1ن} = \frac{1 \times 2 + 3 \times 3}{2 + 3}$$

$$= \frac{2 + 9}{5} = \frac{11}{5} = 2 \frac{1}{5}$$

$$ص = \frac{1ص \cdot 2ن + 2ص \cdot 1ن}{2ن + 1ن} = \frac{3- \times 2 + 0 \times 3}{2 + 3}$$

$$= \frac{6-}{5} = 1 \frac{1}{5} -$$

$\therefore$ إحداثيا ج هما $(2 \frac{1}{5} ، 1 \frac{1}{5} -)$

مثال: (٣)

إذا كانت أ (٠ ، ٤-) ، ب (٢ ، ١-) ، جد إحداثيي ج إذا كانت :

(أ) ج تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٣ : ١ .

(ب) ج تقسم ب أ من الخارج بنسبة ٥ : ٧ .

الحل :

(أ) ج تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٣ : ١

∴ $١س = ٠$ ، $٢س = ٢$ ، $١ص = ٤-$ ، $٢ص = ١-$

$١ن = ٣$ ، $٢ن = ١$

$$\therefore ج = \left(\frac{١س \cdot ٢ص - ٢س \cdot ١ص}{٢ن - ١ن} , \frac{١س \cdot ١ص - ٢س \cdot ٢ص}{٢ن - ١ن} \right)$$

$$= \left(\frac{٠ \times ١ - ٢ \times ٣}{١ - ٣} , \frac{٤- \times ١ - ١- \times ٣}{١ - ٣} \right) =$$

$$= \left(\frac{٦-}{٢} , \frac{٤+٣-}{٢} \right) = \left(٣ , \frac{١}{٢} \right)$$

(ب) ج تقسم ب أ من الخارج بنسبة ٥ : ٧ شكل (٧ - ١٦)

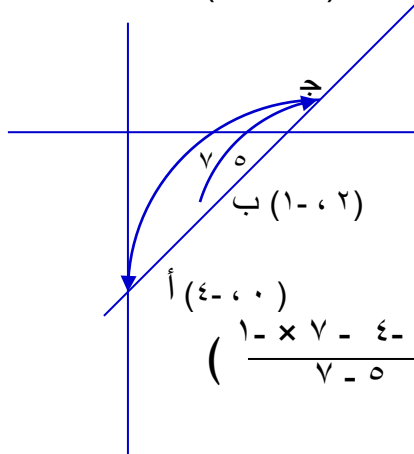
∴ $١س = ٢$ ، $٢س = ٠$ ،

$١ص = ١-$ ، $٢ص = ٤-$

$١ن = ٥$ ، $٢ن = ٧$

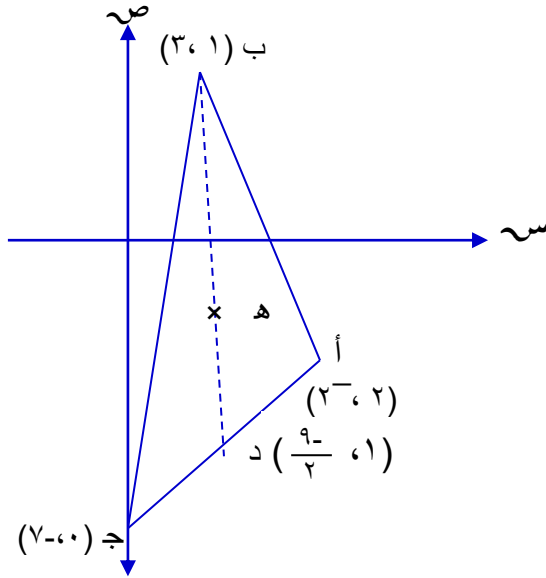
$$\therefore ج = \left(\frac{٢ \times ٧ - ٠ \times ٥}{٧ - ٥} , \frac{١- \times ٧ - ٤- \times ٥}{٧ - ٥} \right)$$

$$= \left(٧ , \frac{١٣}{٢} \right)$$



مثال : (٤)

إذا كان أ ب ج مثلث رؤوسه أ (٢، ٢) ، ب (٣، ١) ، ج (٧، ٠) . جد إحداثيي نقطة تقاطع متوسطاته .



الحل :

نقطة تقاطع متوسطاته
تقسم كل متوسط من
الداخل بنسبة ٢ : ١
من جهة الرأس .
أنظر الشكل (٧ - ١٧) المقابل

نفرض أن $\overline{D}$ منتصف $\overline{AC}$.

$$\therefore D = \left(\frac{7 + 2}{2}, \frac{0 + 2}{2} \right) = \left(\frac{9}{2}, 1 \right)$$

$\therefore$ ب د أحد متوسطاته

نفرض هـ هي نقطة تقاطع المتوسطات .

$\therefore$ هـ تقسم ب د من الداخل بنسبة ٢ : ١ .

$$\therefore H = \left(\frac{3 \times 1 + \frac{9}{2} \times 2}{3}, \frac{1 \times 1 + 1 \times 2}{3} \right)$$

$$\therefore H = (2, 1)$$

تمرين (٧ - ٣)

- (١) إذا كانت أ (٤ ، ٦) ، ب (٢ ، ٨) ، ج منتصف $\overline{AB}$ جد إحداثي ج.
 (٢) جد مركز الدائرة التي $\overline{AB}$ قطر فيها حيث أ (١- ، ٥) ، ب (٣- ، ١-).
 (٣) جد إحداثي النقطة ج التي تقسم المسافة بين النقطتين أ (٥ ، ٨) ، ب (١٠- ، ٣) من الداخل بنسبة ٢ : ٣ .
 (٤) جد إحداثي النقطة التي تقسم $\overline{AB}$ بالنسبة المعطاه في كل حالة مما يلي :

(أ) أ (٣ ، ٢) ، ب (١- ، ١٠) ، النسبة $\frac{1}{3}$

(ب) أ (١- ، ٢-) ، ب (٢ ، ٨) ، النسبة $\frac{1}{2}$ (النسبة $\frac{1}{2}$ تعنى أن التقسيم من الخارج) .

(ج) أ (١- ، ٣-) ، ب (٥ ، ١) ، النسبة ٣ : ٤

- (٥) إذا كان البعد بين النقطة ج (س ، ص) والنقطة أ (٢ ، ٤-) يساوى ربع البعد بين النقطتين أ (٢ ، ٤-) ، ب (٦ ، ٨) ، فما قيمة س ، ص إذا كانت ج $\in \overline{AB}$.

- (٦) أقسم المستقيم الواصل بين النقطتين (٥ ، ٢) ، (٣- ، ٣-) من الخارج بنسبة ٢ : ١ .

- (٧) برهن أن النقاط (٤ ، ١١) ، (١- ، ٧) ، (٦- ، ٣) على استقامة واحدة. ما هي النسبة التي تقسم بها النقطة (٦- ، ٣) المستقيم الواصل بين النقطتين الاخرتين وما نوع هذا التقسيم ؟

- (٨) جد إحداثي النقطتين اللتين تقسمان القطعة المستقيمة التي نهايتها (٧ ، ١٠) و (١١ ، ١٢) إلى ثلاثة أقسام متساوية .

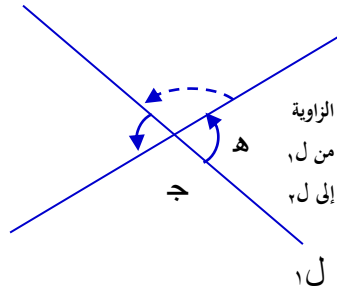
- (٩) أ ب ج مثلث رؤوسه أ (٣- ، ١) ، ب (٢ ، ٤) ، ج (٦ ، ٢-) جد إحداثي النقطتين اللتين تنصفان $\overline{AB}$ ، أ ج . ثم أثبت أن طول القطعة المستقيمة الواصله بين المنتصفين يساوى نصف طول الضلع ب ج .

- (١٠) أثبت أن إحداثي نقطة تقاطع متوسطات المثلث الذي رؤوسه (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) ، (س٣ ، ص٣) هما :

$$\left(\frac{ص١ + ص٢ + ص٣}{٣} ، \frac{س١ + س٢ + س٣}{٣} \right)$$

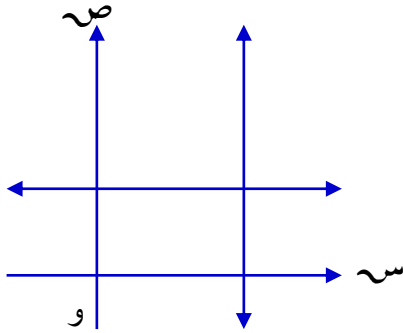
(٧ - ٥) ميل الخط المستقيم

ليكن $ل١$ ، $ل٢$ خطين مستقيمين متقاطعين عند ج شكل (٧ - ١٨)
إذا دار $ل١$ حول ج في اتجاه
مضاد لعقرب الساعة إلى أن
ينطبق لأول مرة على $ل٢$ فإن
الزاوية الموجبة التي دارها
تسمى الزاوية من $ل١$ إلى $ل٢$.
أي أن الزاويتين المشار إليهما
بقوس متصل هي الزاوية من $ل١$ إلى $ل٢$

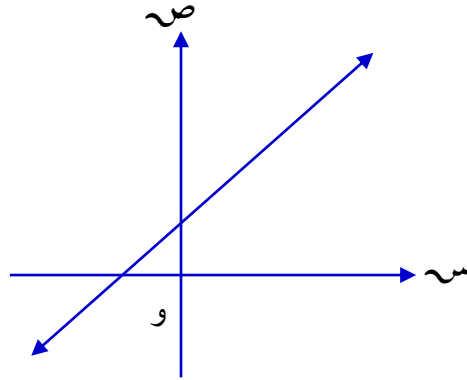


الشكل (٧ - ١٨)

أما الزاوية المشار إليها بقوس متقطع هي الزاوية من $ل٢$ إلى $ل١$. واضح أنه إذا كانت $هـ$ هي الزاوية من $ل١$ إلى $ل٢$ فإن $هـ$ تكون بين ٠ و ١٨٠° . أما إذا كان المستقيمان متوازيين أو منطبقين فمن المعتاد أن نقول إن الزاوية من مستقيم إلى الآخر مقدارها صفر . وإذن في كل حالة $١٨٠^\circ \geq هـ \geq ٠$.
فإذا اخترنا أي مستقيم على المستوى الإحداثي ، نجد أنه إما أن يكون رأسياً أو أفقياً كما في الشكل (٧ - ١٩) أو مائلاً كما في الشكل (٧ - ٢٠)



الشكل (٧ - ١٩)



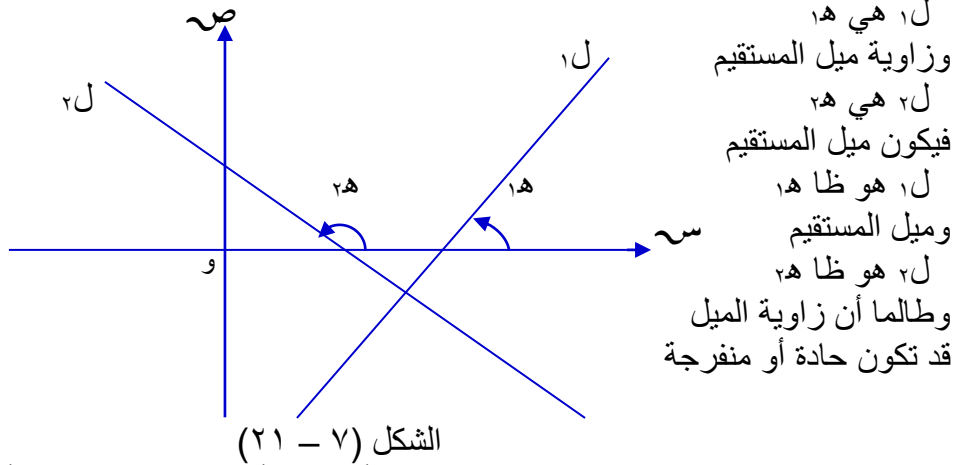
الشكل (٧ - ٢٠)

ولقياس الميل للمستقيم على المحور السيني نعرف زاوية ميل المستقيم كما يلي :

تعريف :

زاوية ميل أي خط مستقيم في مستوى الإحداثيات هي الزاوية من المحور السيني إلى الخط المستقيم .

وقد اتفق على أن يؤخذ ظل هذه الزاوية مقياساً لميل المستقيم ويرمز له بالحرف m . فميل الخط المستقيم هو ظل الزاوية من المحور السيني إلى الخط المستقيم . ويطلق على هذه الزاوية أحياناً زاوية المستقيم مع المحور السيني في الاتجاه الموجب . ففي الشكل (٧ - ٢١) زاوية ميل المستقيم



ل_١ هي α
 وزاوية ميل المستقيم
 ل_٢ هي β
 فيكون ميل المستقيم
 ل_١ هو $\tan \alpha$
 وميل المستقيم
 ل_٢ هو $\tan \beta$
 وطالما أن زاوية الميل
 قد تكون حادة أو منفرجة

فإن ميل المستقيم (ظل الزاوية) قد يكون موجباً أو سالباً حسب الزاوية، فمثلاً α زاوية حادة ، β زاوية منفرجة لذا نجد أن :
 ميل المستقيم ل_١ = $\tan \alpha$ ، قيمة موجبة
 ميل المستقيم ل_٢ = $\tan \beta$ ، قيمة سالبة
 أما إذا كان المستقيم موازياً للمحور السيني فإن زاوية ميله تساوى الصفر لذا نجد أن ميل هذا المستقيم يساوى صفراً .

مثال : (١)

إذا كانت الزاوية من المحور السيني إلى المستقيم ل 60° جد ميل المستقيم ل .

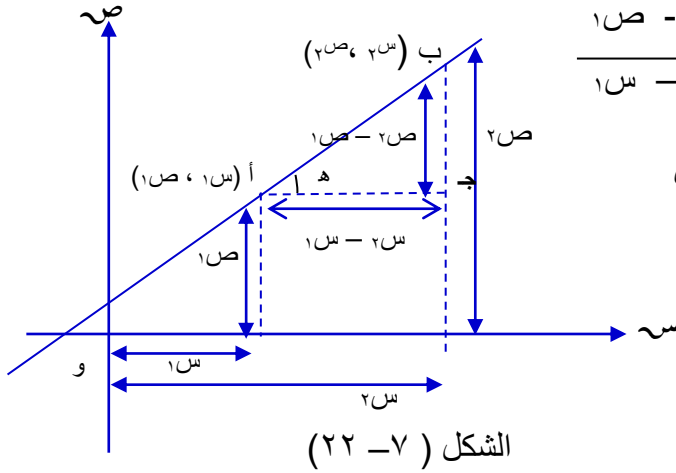
الحل : ميل المستقيم ل = $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

ميل المستقيم إذا عرفت نقطتين عليه :

إذا كان المستقيم $أ ب$ والذي زاوية ميله $هـ$ يمر بالنقطتين $أ (س١ ، ص١)$ ،
 $ب (س٢ ، ص٢)$ كما في الشكل (٧ - ٢٢) ، $أ ب$ ج قائم الزاوية في ج لماذا؟

$$\text{ظا } هـ = \frac{\overline{ب ج}}{\overline{أ ج}} = \frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$$

ومن ذلك يمكن التوصل
 للتعريف التالي :



الشكل (٧ - ٢٢)

تعريف :

إذا كان $أ (س١ ، ص١)$ ، $ب (س٢ ، ص٢)$ حيث $س١ \neq س٢$
 فإن ميل المستقيم المار بالنقطتين $أ ، ب$ هو العدد الحقيقي

$$\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١} \quad \text{أو} \quad \frac{ص١ - ص٢}{س١ - س٢}$$

مثال: (٢)

جد ميل المستقيم $أ ب$ في كل من الحالات التالية :

- (أ) $أ (٣ ، ٤)$ ، $ب (١ ، -٢)$ (ب) $أ (٥ ، ٢)$ ، $ب (-٣ ، ٥)$ (ج) $أ (٢ ، -٤)$ ، $ب (-٣ ، ٤)$

الحل :

$$(أ) \text{ ميل المستقيم أ ب } = \frac{\overleftrightarrow{ص_1ص_2} - \overleftrightarrow{ص_1ص_3}}{\overleftrightarrow{س_1س_2} - \overleftrightarrow{س_1س_3}} = \frac{ص_2 - ص_3}{س_2 - س_3} = \frac{٢ - ٣}{١ - ٤} = \frac{١}{٣}$$

$$(ب) \text{ ميل المستقيم أ ب } = \frac{\overleftrightarrow{ص_1ص_2} - \overleftrightarrow{ص_1ص_٥}}{\overleftrightarrow{س_1س_2} - \overleftrightarrow{س_1س_٥}} = \frac{ص_2 - ص_٥}{س_2 - س_٥} = \frac{١ - ٥}{١ - ٥} = ١$$

(لاحظ أن $ص_١ = ص_٢$ ، $\therefore$ أ ب موازٍ للمحور السيني) .

$$(ج) \text{ ميل المستقيم أ ب } = \frac{\overleftrightarrow{ص_1ص_2} - \overleftrightarrow{ص_1ص_٣}}{\overleftrightarrow{س_1س_2} - \overleftrightarrow{س_1س_٣}} = \frac{ص_2 - ص_٣}{س_2 - س_٣} = \frac{١ - ٣}{١ - ٤} = \frac{٢}{٣}$$

(المستقيم موازٍ للمحور الصادي ، زاوية الميل = ٩٠° ، $\therefore$ م = ظا $٩٠^\circ = \infty$)

مثال : (٣)

أ ب ج مثلث رؤوسه أ (١- ، ٢) ، ب (١ ، ١-) ، ج (٥- ، ١) .
ميل المستقيم المتوسط للمثلث والمار بالنقطة أ .

الحل :

نفرض أن د منتصف ب ج ،

$$\therefore \text{ د } = \left(\frac{١ + ١^-}{٢} , \frac{(٥^-) + ١}{٢} \right) = (٢ , ٣^-)$$

$$\therefore \text{ ميل أ د } = \frac{٢ - ١^-}{٣^- - ١^-} = ٢$$

تمرين (٧ - ٤)

(١) جد ميل كل من المستقيمات التي تمر بالنقاط التالية :

(أ) ج (٣ ، ٢-) ، د (٠ ، ٢-)

(ب) ك (٣ ، ١-) ، ل (٧ ، ٥)

(ج) ع (١- س ، ١+ ص) ، هـ (٢+ س ، ٥+ ص)

(د) أ (١ ، ٣) ، ب (١ ، ٥)

(٢) إذا كان ميل $\overline{أو} = ٢-$ ، (و) نقطة الأصل ، أ (س ، ٢-)

جد قيمة س .

(٣) أ ب ج مثلث رؤوسه أ (٢ ، ٧) ، ب (١- ، ٧-) ، ج (٨ ، ١-) .

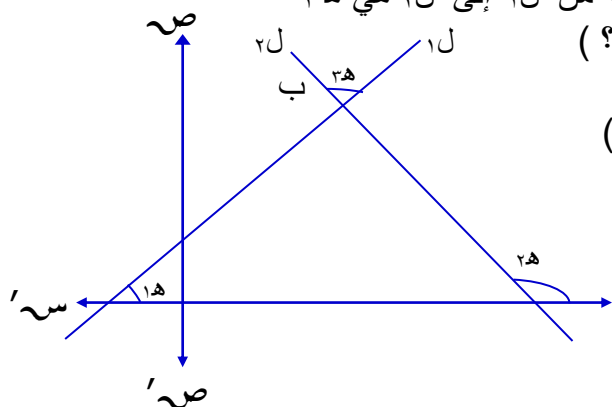
جد ميل $\overline{ب ج}$ ، $\overline{ج أ}$ ، وميل المستقيم المتوسط للمثلث أ ب ج والمار

بالرأس ج .

(٧ - ٦) الزاوية بين مستقيمين

ليكن l_1 ، l_2 مستقيمين متقاطعين في ب ولهما الميلان : $m_1 = \tan \alpha$ ، $m_2 = \tan \beta$ على الترتيب . شكل (٧ - ٢٣)

ذكرنا أن الزاوية من l_1 إلى l_2 هي الزاوية الناتجة من دوران l_1 حول نقطة تقاطعه مع l_2 في اتجاه مضاد لاتجاه عقارب الساعة حتى ينطبق على l_2 للمرة الأولى . ولحساب قيمة تلك الزاوية بدلالة ميل l_1 ، l_2 كما في الشكل (٧ - ٢٣) نفرض أن الزاوية من l_1 إلى l_2 هي θ



شكل (٧ - ٢٣)

$$\therefore \theta = \alpha + \beta \quad (\text{لماذا ؟})$$

$$\therefore \theta = \alpha + \beta$$

$$\therefore \theta = \alpha + \beta$$

$$\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} =$$

$$\therefore \theta = \alpha + \beta$$

ما قيمة الزاوية من l_1 إلى l_2 بدلالة θ ؟
جد قيمة ظل هذه الزاوية بدلالة الميلين m_1 ، m_2 .

$$\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right) = \text{ستجد أن ظل هذه الزاوية}$$

نلاحظ أن أي من هاتين الزاويتين هي زاوية بين المستقيمين .

إذا كانت θ هي زاوية بين مستقيمين غير متعامدين ميلهما m_1 ، m_2 .

$$\tan \theta = \pm \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2 + 1}$$

فالقائمة الموجبة هي ظل الزاوية الحادة بينهما أما السالبة فهي ظل الزاوية المنفرجة .

مثال: (١)

جد الزاوية من المستقيم L_1 إلى المستقيم L_2 حيث L_1 يمر بالنقطتين $(0, 2)$ ، $(3, 5)$ ، L_2 يمر بالنقطتين $(3, 7)$ ، $(2, 0)$

الحل :

$$\begin{aligned} \text{ميل المستقيم } L_1 &= m_1 = \frac{5 - 2}{3 - 0} = \frac{3}{3} = 1 \\ \text{ميل المستقيم } L_2 &= m_2 = \frac{7 - 0}{3 - 2} = \frac{7}{1} = 7 \end{aligned}$$

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2 + 1} = \frac{1 - 7}{1 \times 7 + 1} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$\tan \theta = -\frac{3}{4} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(-\frac{3}{4} \right) = -36.87^\circ$$

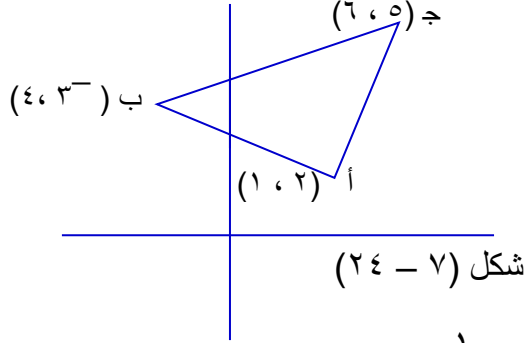
$\therefore$ $\theta = 36.87^\circ$ (زاوية تعني الزاوية التي ظلها θ)

$\therefore \theta = 36.87^\circ$ (من الآلة الحاسبة)

أي 36.87° و 36.87 دقيقة ويرمز للدقيقة في النظام الستيني بالرمز $(')$.
الدرجة الواحدة = $60'$.

مثال : (٢)

جد زاوية ب في المثلث أ ب ج حيث أ (١ ، ٢) ، ب (-٣ ، ٤) ، ج (٥ ، ٦)



الحل :

لمعرفة ما إذا كانت
الزاوية ب حادة أم منفرجة
نحتاج لإيجاد ميل ب ج ، ب أ
شكل (٧ - ٢٤)

$$m_{BC} = \frac{6 - 4}{5 - (-3)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$m_{AB} = \frac{4 - 2}{-3 - 1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

زاوية ب هي الزاوية من أ ب إلى ب ج

$$\therefore \text{ظا ب} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{-1}{2}}{1 + \frac{1}{4} \times \frac{-1}{2}}$$

$$1 = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{3}{2}$$

∴ ب زاوية حادة وتساوى ظا^{-١} ١ = ٤٥°

تمرين (٧ - ٥)

(أ) جد الزاوية بين كل زوج من المستقيمت الآتية :

(١) $l_1 : l_2$ المستقيم المار بالنقطتين $(3, 0)$ ، $(-2, 5)$

$l_2 : l_3$ المستقيم المار بالنقطتين $(0, 0)$ ، $(4, 4)$

(٢) $l_1 : l_2$ مستقيم ميله -2

$l_2 : l_3$ مستقيم ميله 1

(٣) $l_1 : l_2$ مستقيم يمر بالنقطة $(3, 7)$ ويقطع جزءاً موجباً من

المحور الصادي قدره 2 .

$l_2 : l_3$ مستقيم ينطبق على المحور السيني

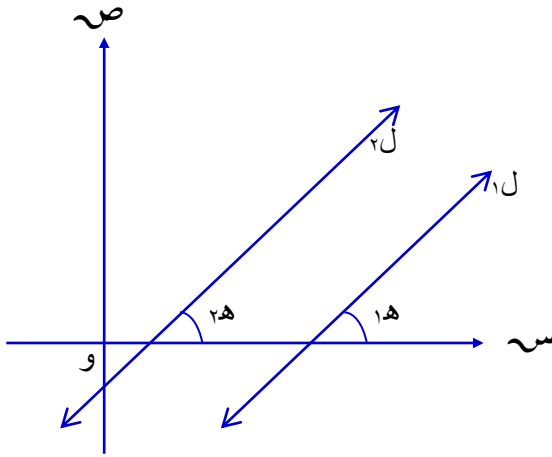
(ب) جد ظل الزاوية المحصورة بين المستقيم الذى ميله -1 والمستقيم المار

بالنقطتين $(7, 1)$ ، $(2, -3)$.

(٧ - ٧) المستقيمتان المتوازيتان و المستقيمتان المتعامدتان

(أ) المستقيمتان المتوازيتان :

كما نعلم أن المستقيمتين المتوازيتين يكون البعد بينهما ثابتاً على الدوام ، ولكن هناك علاقة بين ميليهما والعلاقة هذه تكون واضحة إذا تذكرنا العلاقة بين ميل المستقيم وظل زاوية ميله ، وإذا تذكرنا كذلك أن للمستقيمتين المتوازيتين زاويتي ميل متساويتين كما يبدو في الشكل (٧ - ٢٥) من خاصية تناظر الزوايا . وعليه فإن $\alpha_1 = \alpha_2$ ، وبالتالي $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$.



الشكل (٧ - ٢٥)

وبما أن ميل المستقيم $l_1 = m_1 = \tan \alpha_1$.

وميل المستقيم $l_2 = m_2 = \tan \alpha_2$

$$\therefore m_1 = m_2$$

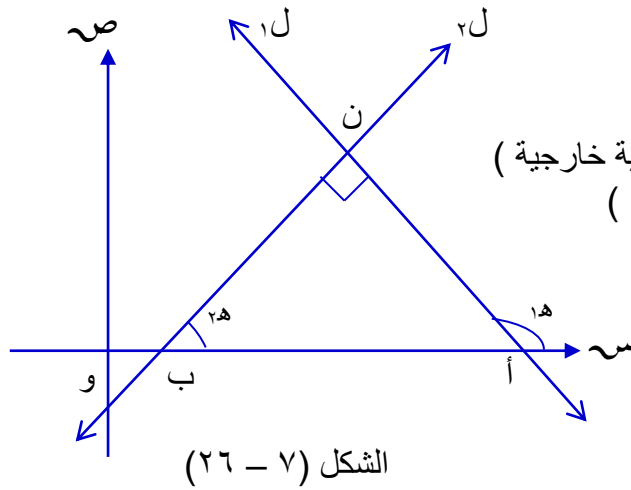
والعكس إذا كان ميلا المستقيمتين متساويين ، فإنهما يكونان متوازيتين ، وعلى ذلك يكون شرط توازي مستقيمتين على مستوى هو $m_1 = m_2$

المستقيمتان متوازيتان إذا
وفقط إذا تساوى ميلاهما

(ب) المستقيمتان المتعامدتان :

فيما سبق وجدنا المستقيم $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \text{ميل } l_1 = \text{ميل } l_2$

والآن ماذا عن المستقيمتين المتعامدتين ، هل هناك علاقة بين ميليهما ؟ لنفرض كما في الشكل (٧ - ٢٦) أن l_1 ، l_2 مستقيمتان متعامدتان يتقاطعان عند النقطة ن ، ويقطعان المحور السيني عند النقطتين أ ، ب على الترتيب . ونفرض أن زاوية ميل l_1 هي α_1 ، وزاوية ميل l_2 هي α_2 .
 $\therefore \text{ميل } l_1 = m_1 = \tan \alpha_1$



ميل $ل٢ = ل٢م = ل٢هـ$
 لكن في $\Delta أ ب ن$
 قائم الزاوية في ن
 $١هـ = ٩٠ + ٢هـ$ (زاوية خارجية)
 $\therefore ل٢هـ = ل٢هـ + ٩٠$
 $\therefore ل٢هـ - ل٢هـ = ٩٠$
 (انظر الزوايا المنتسبة)

$$\therefore ل٢هـ = \frac{١-}{٢هـ}$$

$$\therefore ل٢هـ = ل٢هـ - ١$$

$$\therefore ١ = ٢م - ١$$

∴ يتعامد المستقيمان إذا كان
 حاصل ضرب ميليهما يساوى -١

لقد تعرضنا في الدرس السابق إلى أنه إذا كانت ه هي الزاوية بين مستقيمين
 ميلاهما $٢م$ ، $١م$

$$\text{فإن ظاه} = \pm \left(\frac{١م - ٢م}{٢م + ١م} \right)$$

فإذا كان هذان المستقيمان متوازيين فإن ه في هذه الحالة تؤخذ بأنها تساوى
 الصفر وعليه فإن :

$$\text{ظاه} = \text{ظا} = ٠ = \pm \frac{١م - ٢م}{٢م + ١م} = ٠$$

$$\therefore ١م - ٢م = ٠ \quad (\text{لأن ظا} = ٠)$$

∴ $١م = ٢م$ وهذا شرط التوازي .

أما إذا كان المستقيمان متعامدين ، فإن ه في هذه الحالة تساوى ٩٠

$$\text{فإن ظاه} = \text{ظا} = ٩٠ = \pm \frac{١م - ٢م}{٢م + ١م} = ٩٠ \quad (\text{لأن ظا} = ٩٠)$$

$$\therefore ١ + ٢م = ٠ \quad \text{أو} \quad ١ - ٢م = ٠ \quad \text{وهذا شرط التعامد .}$$

مثال: (١)

بيّن أن المستقيم المار بالنقطتين أ (٤ ، ٠) ، ب (٧ ، ٢) يوازي المستقيم المار بالنقطتين ج (٠ ، ١) ، د (٣- ، ١-).

الحل :

$$\text{ميل } \overline{AB} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - ٠}{٢ - ٤} = \frac{٢}{-٢} = -١$$

$$\text{ميل } \overline{CD} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ١}{-٣ - ٠} = \frac{٠}{-٣} = ٠$$

$$\therefore \text{ ميل } \overline{AB} = \text{ ميل } \overline{CD} \therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

مثال: (٢)

أثبت أن النقاط أ (٧- ، ٥) ، ب (٠ ، ٠) ، ج (٥ ، ٧) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية .

الحل :

باستخدام الميل في هذا المثال (شكل (٧- ٢٧))

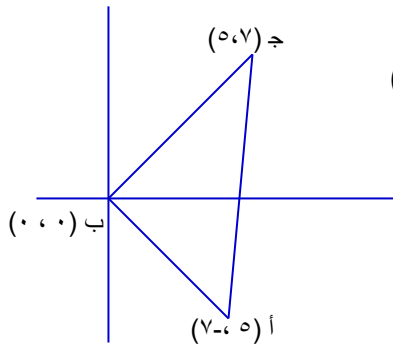
$$\text{ميل } \overline{AB} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٠}{٧ - ٠} = \frac{٥}{٧}$$

$$\text{ميل } \overline{BC} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧ - ٥}{٠ - ٧} = \frac{٢}{-٧} = -\frac{٢}{٧}$$

$$\frac{٥}{٧} \times -\frac{٢}{٧} = -\frac{١٠}{٤٩} \neq -١$$

$$\therefore \overline{AB} \not\perp \overline{BC}$$

$\therefore$ المثلث قائم الزاوية في ب



شكل (٧- ٢٧)

مثال : (٣)

أ ب ج مثلث حيث أ (٢ ، ٠) ، ب (-٢ ، ٨) ، ج (٧ ، -٢) جد ميل العمود النازل من أ على ب ج .

الحل :

ليكن ميل $\overline{ب ج} = m_1$

$$\therefore m_1 = \frac{-2 - 8}{7 - 2} = \frac{-10}{5} = -2$$

ولیکن أ د العمود النازل من أ على ب ج وميله m_2
 $\therefore m_1 \times m_2 = -1$ من شرط التعامد

$$\therefore -1 = m_2 \times -2$$

$$\therefore m_2 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

(لاحظ أن الميل m_2 يساوى مقلوب الميل m_1 مع تغيير الإشارة حيث $m_1 \neq 0$)

مثال : (٤)

بيّن أن النقاط أ (-٣ ، ٤) ، ب (-١ ، ٢) ، ج (٢ ، ١) تقع على استقامة واحدة .

الحل :

باستخدام الميل نجد أن :

$$\text{ميل أ ب} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{-3 - 4}{-1 - 2} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

$$\text{ميل ب ج} = \frac{١ - ٢}{٢ - (-١)} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

ميل أ ب = ميل ب ج ، وبما أنهما مشتركان في النقطة ب .

$\therefore$ أ ب ، ب ج قطعتان مستقيمتان من مستقيم واحد أي أن أ ، ب ، ج على استقامة واحدة.

تمرين (٧ - ٦)

- (١) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ (٦ ، ٢) ، ب (-١ ، ٦) يوازي المستقيم المار بالنقطتين ج (٢ ، -١) ، د (-٥ ، ٣) .
- (٢) أثبت أن $\overline{أ ج} \perp \overline{ب د}$ إذا كان أ (٢ ، ٢) ، ب (-١ ، ٣) ، ج (-٤ ، ٢) ، د (-٥ ، ٦) .
- (٣) باستخدام فكرة الميل ، أثبت أن أ (٥ ، ٢) ، ب (-٢ ، ١) ، ج (٢ ، -٢) ، هي رؤوس مثلث قائم الزاوية .
- (٤) إذا كان أ (٢ ، ٠) ، ب (-١٢ ، -٥) ، ج (-٢ ، ٦) ، د (١٢ ، ١١) أثبت أن الشكل أ ب ج د معين .
- (٥) مستخدماً فكرة الميل أثبت أن النقط أ (٢ ، ٣) ، ب (٣ ، ٧) ، ج (-١ ، ٩) تقع على إستقامة واحدة .
- (٦) إذا كانت النقط أ (٢ ، ٣) ، ب (-١ ، ٤) ، ج (س ، ص) على إستقامة واحدة فأثبت أن :
- $$س + ٣ ص - ١١ = ٠$$
- (٧) أ ب ج مثلث رؤوسه أ (٢ ، ٤) ، ب (٦ ، ٠) ، ج (-٢ ، ٣) جد :
- (أ) ميل العمود المرسوم من أ على $\overline{ب ج}$.
- (ب) ميل المستقيم المرسوم من ب وموازياً $\overline{أ ج}$.
- (٨) إذا كانت النقط أ (٢ ، ٤) ، ب (٢ ، -٤) ، ج (س ، ٠) $\exists$ مستقيم واحد ، جد قيمة س .

(٩) أثبت أن النقط أ (٤ ، ٣) ، ب (٥ ، ٠) ، ج (-٦ ، ٧) تقع على استقامة واحدة .

(١٠) إذا كان إحداثيا نقطة التصنيف للقطعة الواصلة بين النقطتين أ (٣ ، ٢) و ب (٤ ، ٣) هي (س ، ص) أثبت أنها تحقق المعادلة .

$$س - ص + ١ = صفر .$$

(١١) ل_١ مستقيم يصنع زاوية قدرها ٣٠° في الإتجاه الموجب مع محور السينات ويقاطع مستقيم آخر ل_٢ مستقيم آخر يصنع زاوية قدرها ٦٠° مع محور السينات . جد زاوية التقاطع .

(١٢) ل_١ مستقيم يوزاي مستقيماً ميله يساوي $\frac{1}{3}$ ويقاطع مستقيماً آخر ل_٢ يمر بالنقطتين أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، ٧) جد الزاوية الحادة بين المستقيمين ل_١ ، ل_٢ .

(١٣) ل_١ مستقيم يعامد مستقيماً آخر يصنع زاوية قدرها ٤٥° مع المحور السيني ويقاطع مستقيماً ل_٢ يصنع زاوية قدرها α مع المحور السيني .
 جد زاوية التقاطع بين ل_١ ، ل_٢ .

الربط مع الحياة

الهندسة التحليلية ليست مجرد نظريات و قوانين مجردة ، بل هي اللغة الرياضية التي تُترجم بها الظواهر الواقعية . فهي تربط بين الجبر و الهندسة لوصف العالم من حولنا بدقة ، مما يجعل حياتنا أكثر تنظيماً و فهماً مثلاً :

(أ) المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي نجدها في المجالات :

١. الملاحة الجوية : لتحديد المسافة بدقة بين مواقع الطائرات والمطارات.

٢. الأمن والمراقبة: لتحديد المسافة بين الكاميرا و المواقع المراقبة.

(ب) إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة نجدها في المجالات :

١. النجارة : لتقسيم الأخشاب إلى أطوال دقيقة بنسب محددة.

٢. الديكور: لتوزيع عناصر الزخرفة على جدار بشكل منظم.

(ج) ميل الخط المستقيم نجده في المجالات :

١. الطرق : لحساب درجة انحدار الشوارع والمنحدرات.

٢. المناخ : لتحليل تغيّر درجات الحرارة على مدار الزمن.

(د) الزاوية بين مستقيمين باستخدام الميل نجدها في المجالات :

١. الخرائط : لقياس الزوايا بين الطرق المتقاطعة.

٢. الميكانيكا : لحساب الزوايا بين القوى المؤثرة على جسم.

(هـ) توازي و تعامد المستقيمت باستخدام الميل نجده في المجالات :

١. الهندسة المعمارية: لتصميم جدران وأعمدة متوازية.

٢. التصميم الصناعي: لمسارات إنتاج تسير بخطوط متوازية.

٣. الروبوتات : برمجة الروبوت للحركة باتجاهين متعامدين.

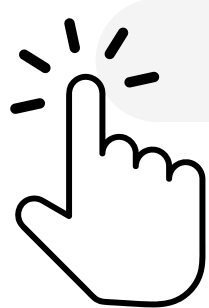
٤. الهندسة الميكانيكية: تصميم التروس بزوايا متعامدة.

تم تحميل ورفع المادة على منصة



المعلم التعليمي

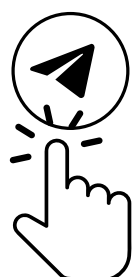
للعودة الى الموقع اكتب في بحث جوجل



المعلم التعليمي



ALMUALM.COM



انظم الى قناة المنهج السوداني على التلجرام

T.ME/ALMANHJ_S